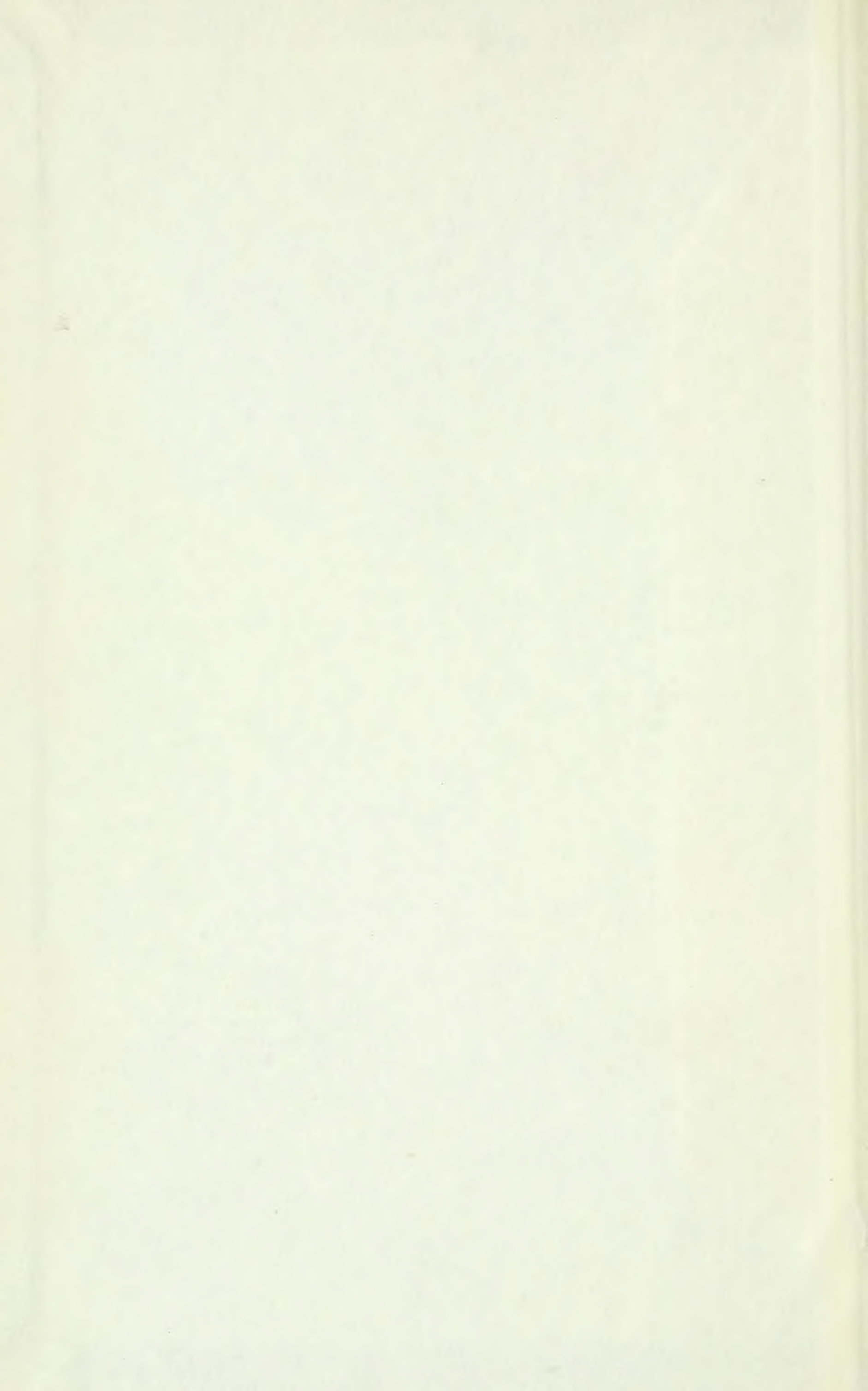

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01037975 8











GRUNDLAGEN

FÜR EINE

THEORIE DER FUNCTIONEN

EINER

VERÄNDERLICHEN REELLEN GRÖSSE

VON

ULISSE DINI,

ORDENTLICHEM PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT PISA.

MIT GENEHMIGUNG DES VERFASSERS

DEUTSCH BEARBEITET VON

DR. JACOB LÜROTH, PROFESSOR ZU FREIBURG I. B.

UND

ADOLF SCHEPP, PREMIERLIEUTENANT A. D. ZU WIESBADEN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1892.

Vorwort.

Die „Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali“, die Ulisse Dini, Professor an der Universität Pisa, schon 1878 veröffentlichte, bilden noch immer das einzige Lehrbuch der modernen Theorie der Functionen einer reellen Veränderlichen, zu dem in Folge dessen der angehende Mathematiker zum Zwecke des Studiums, der Gelehrte zum Nachschlagen immer wieder zurückzukehren gezwungen ist.

Beiden erschwert die fremde Sprache mehr oder minder die Benutzung des Buches. Wir glaubten daher manchen unserer Fachgenossen einen Dienst zu thun, wenn wir das genannte Werk ins Deutsche übertrügen. Freilich ergab sich dabei eine Schwierigkeit. Dini's Buch ist nicht aus einem Gusse entstanden. Es ist hervorgegangen aus Vorlesungen, die im Jahre 1871/72 gehalten worden waren und zu welchen dem Verfasser ausser den Arbeiten von Hankel, Dedekind, Cantor, Heine auch noch briefliche Mittheilungen von Schwarz zu Gebote standen. Die damals begonnene Veröffentlichung verzögerte sich aus äusseren Gründen bis 1876, zu welcher Zeit die ersten neun Kapitel fertig gedruckt waren. Als Dini 1877 sich wieder ganz wissenschaftlichen Arbeiten widmen konnte, waren Abhandlungen von Du Bois-Reymond, Thomae, Darboux und Anderen erschienen, die denselben Gegenstand behandelten. Durch diesen Umstand, und weil die eigenen Forschungen neue Resultate zu Tage gefördert hatten, die die früheren Ergebnisse wesentlich zu verallgemeinern gestatteten, wurde Dini zweifelhaft, ob es nicht angemessen sein möchte, die weitere Veröffentlichung des Buches ganz zu unterlassen. Die Rücksicht auf die Be-

sitzer der schon publicirten neun Kapitel bestimmten ihn, das Buch fortzusetzen unter Verwerthung der von ihm und Anderen neu gefundenen Resultate und unter Beschränkung auf die Functionen einer Variablen und die einfachen Integrale. So kommt es, dass die Kapitel, welche dem neunten folgen, manche Untersuchungen enthalten, die eigentlich besser in früheren Theilen ihren Platz gefunden hätten.

Diesem Sachverhalt gegenüber entstand für uns die Frage, ob wir das ganze Buch umarbeiten sollten, indem wir die neueren Arbeiten hinein verwebten, oder ob wir nur eine Uebersetzung liefern sollten, in der die wichtigsten neueren Arbeiten blos in Anhängen oder durch Hinweise Berücksichtigung fänden. Aus verschiedenen Gründen zogen wir die letzte Art der Bearbeitung vor und geben also im Folgenden eine sonst in allen Theilen getreue Uebersetzung des Originals, bei der wir uns aber natürlich im Interesse der Verständlichkeit, wo es nöthig schien, kleine Abweichungen und Zusätze erlaubt haben.

Die seit 1878 erschienenen Arbeiten, sofern in ihnen wichtige neue Begriffe eingeführt oder interessante Resultate enthalten sind, wurden in Zusatzparagraphen, deren Nummern mit einem Stern versehen sind, dem Texte einverleibt, während auf die übrige einschlägige Literatur in Anmerkungen hingewiesen wurde. Mit Hülfe der neuen Begriffe und Sätze liessen sich manche Theoreme allgemeiner fassen, als sie sich bei Dini finden. Ganz umgeändert haben wir die ersten acht Paragraphen, in welchen die irrationalen Zahlen eingeführt werden. Während Dini dabei der Dedekind'schen Definition folgt, zogen wir die Cantor'sche vor, weil sie jetzt wohl, wenigstens in Deutschland, sich des grössten Anhangs erfreut. Mit § 9, Seite 15, beginnt die Uebersetzung wieder. Es liess sich so einrichten, dass, abgesehen von den §§ 1*—8*, die Nummern der Paragraphen in Original und Uebersetzung übereinstimmen, so dass Citate nach Paragraphen ohne Weiteres für unsere Uebersetzung gültig sind[1]).

1) Im Originale sind, da ein § 274 zweimal vorkommt, von diesem an alle Nummern um eine Einheit zu klein.

Die Anwendung der Cantor'schen Definition der irrationalen Zahlen machte an einigen Stellen eine kleine Modification der Beweise nöthig. Von weiteren Abänderungen — abgesehen von der Correctur einiger Druckfehler — sei hier nur noch erwähnt, dass in den Formeln des § 190, 7 (Seite 353) auf der rechten Seite im Original $2k_1\sigma, 2k_2\sigma, \ldots$ steht, während wir auf Grund einer Fussnote zu Seite 340 des Originals den Factor 2 hier und in Folge dessen noch an einigen anderen Stellen unterdrückt haben.

Die von Hölder und Harnack gegebene Erweiterung des Integralbegriffes auf den Fall, dass die Function für die Punkte einer Menge zweiter Gattung unendlich wird, haben wir nicht aufgenommen, weil die für ein Lehrbuch nöthige Ausführlichkeit ein zu tiefes Eingehen auf die Mengenlehre und die Lehre von den transfiniten Zahlen erfordert hätte.

Endlich ist noch zu erwähnen, dass wir die beiden letzten Kapitel des Originals, die 66 und 176 Seiten umfassen, behufs besserer Uebersicht weiter gegliedert haben, so dass aus ihnen zehn Kapitel geworden sind.

Zum Schlusse geben wir ein nach Autornamen geordnetes Verzeichniss der im Buche citirten Arbeiten mit ausführlichen Titelangaben.

Ein Inhaltsverzeichniss, bei dem allerdings manchmal die Präcision des Ausdrucks der nothwendigen Kürze weichen musste, wird, wie wir hoffen, zum bequemen Gebrauch des Buches beitragen.

Lüroth. Schepp.

Inhaltsverzeichniss.

Erstes Kapitel.

Rationale und irrationale Zahlen.

Zweites Kapitel.

Werth- oder Punktmengen, ihr oberer und unterer Grenzwerth.

Drittes Kapitel.

Begriff des Grenzwerthes. Das unendlich Kleine und das unendlich Grosse.

Viertes Kapitel.

Functionsbegriff. Continuität und Discontinuität.

Fünftes Kapitel.

Functionen, die in einem gegebenen Intervall stetig sind.

Sechstes Kapitel.

Functionen, die unendlich oft unstetig sind.

Siebentes Kapitel.

Derivirte einer Function.

Achtes Kapitel.

Unendliche Reihen.

Neuntes Kapitel.

Das Princip der Verdichtung der Singularitäten.

Zehntes Kapitel.

Functionen ohne bestimmte und endliche Derivirte.

Elftes Kapitel.

Weitere allgemeinere Untersuchungen über Zuwachsverhältnisse und Derivirte.

Zwölftes Kapitel.

Sätze über die Ableitungen und ihre Existenz.

Dreizehntes Kapitel.

Definition eines bestimmten Integrals und Merkmale integrirbarer Functionen.

Vierzehntes Kapitel.

Haupteigenschaften der bestimmten Integrale.

Fünfzehntes Kapitel.

Das Integral als Function seiner oberen Grenze. (Integralfunction.)

Sechzehntes Kapitel.

Mittelwerthsätze.

Siebzehntes Kapitel.

Das Integral einer Function, die im Integrationsgebiet unendlich wird.

Achtzehntes Kapitel.

Integrale über unendlich grosse Intervalle.

Neunzehntes Kapitel.

Partielle Integration. Integration durch Substitution.

Zwanzigstes Kapitel.

Integration unendlicher Reihen. Die Grenzwerthe bestimmter Integrale.

Erstes Kapitel.

Rationale und irrationale Zahlen.

§ 1*. Bevor man das Studium der Theorie der Functionen beginnt, ist es nöthig, den Begriff der irrationalen Zahl und den des Grenzwerthes genau festzustellen. Obgleich diese Begriffe zweifelsohne durch Anlehnung an geometrische Vorstellungen entstanden sind, so ziehen wir doch vor, sie ohne solche Veranschaulichung zu entwickeln, um zu zeigen, dass die Arithmetik von der Geometrie ganz unabhängig ist und ohne Zuhülfenahme der Erfahrung consequent aus ihren Prämissen aufgebaut werden kann.

Das Material, mit dem sich die Arithmetik in ihren ersten Operationen allein beschäftigt, sind die positiven ganzen oder „natürlichen“ Zahlen, die eine gesetzmässig geordnete Reihe von Zeichen bilden, in der jedes Zeichen ein bestimmtes folgendes und mit Ausnahme des ersten ein bestimmtes vorausgehendes besitzt und in der beim Fortschreiten nie dasselbe Zeichen wiederkehrt[1]). Man kann dann[2]), unter $a+1$ die auf a folgende Zahl verstehend, die Addition, Multiplication und Potenzirung recurrirend durch die Gleichungen:

$$a+(b+1)=(a+b)+1$$
$$a(b+1)=ab+a, \quad a\cdot 1=a$$
$$a^{b+1}=a^b\cdot a^1, \quad a^1=a$$

definiren (es ist interessant hienach an der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ der griechischen Zahlzeichen mit $\alpha=1$ einige Rechnungen

---

1) Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Band I Seite 1—18. — Kronecker, Journal f. Math., Band CI Seite 337. — Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? — Helmholtz, Zählen und Messen.

2) Grassmann, H., Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten.

auszuführen) und ist dann im Stande auf Grund dieser Festsetzungen die bekannten Rechengesetze, nämlich Commutationsgesetz und Associationsgesetz der Addition und Multiplication, das Distributionsgesetz bei der Verknüpfung von Addition und Multiplication und bei der Potenzirung zu beweisen, sowie die Unabhängigkeit der Summe und des Products von der Anordnung der Operationen herzuleiten[1]). Der Versuch, die Operationen umzukehren, führt aber nicht immer zu lösbaren Aufgaben und das Bestreben, diese dennoch stets zu lösen, zu der Einführung von neuen Zahlen (wobei selbstverständlich nicht geleugnet werden soll, dass die Bedürfnisse des praktischen Lebens hiebei die Hauptrolle gespielt haben). Der gemeinsame Grundgedanke, der alle diese Bildungen neuer Zahlbegriffe oder Zahlzeichen beherrscht, scheint der zu sein, dass an Stelle von einfachen Zahlen mit Zahlgruppen gerechnet wird. Wenigstens lassen sich alle bis jetzt bekannt gewordenen Bildungen unter diese zuerst von Hamilton[2]) aufgestellte Betrachtungsweise fassen. Wir werden dies für die negativen und gebrochenen rationalen Zahlen kurz andeuten, für die irrationalen Zahlen noch weiter ausführen. Aber auch die complexen Zahlen fallen unter diesen Begriff; auch die Vectoren und Quaternionen, die Zahlen mit mehr als einer Einheit, wie sie Weierstrass und Dedekind betrachteten, können in ihn eingefügt werden. „Rechnen" mit Gruppen von Zahlen heisst: nach bestimmten Gesetzen aus zwei oder mehr Gruppen eine neue ableiten. Es ist also jedesmal bei Einführung einer neuen Gattung von Gruppen zu definiren: die Gleichheit, die Addition, die Multiplication, aus welchen Subtraction, Division einerseits, die Potenzirung andererseits mit ihren Umkehrungen sich ergeben.

---

§ 2*. So kann man für eine Gruppe $Q(a, b)$, wo a und b natürliche Zahlen sind, definiren:

---

1) Schröder, a. o. a. O., Seite 63, 94, 109. — Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Band I Seite 26.

2) Hamilton, Trans. of the R. Irish Academy, Band XVII Theil 2. Dublin 1835. S. 293. Hamilton, Lectures on Quaternions. Dublin 1853. Vorrede.

$$\left.\begin{array}{l} Q(a, b) = Q(c, d) \quad \text{wenn} \quad ad = bc \\ Q(a, b) + Q(c, d) = Q(ad + bc, bd) \\ Q(a, b) \cdot Q(c, d) = Q(ac, bd). \end{array}\right\} \quad (1)$$

Hieraus folgt, dass für die Verknüpfung von mehreren Symbolen Q die Rechengesetze der natürlichen Zahlen alle gelten, dass auch jedes Q durch ein ihm Gleiches ersetzt werden kann ohne Aenderung des Resultats der Rechnung. Mit Hilfe dieser Symbole ist nun die Division unbedingt ausführbar d. h. die Gleichung

$$x \cdot Q(a, b) = Q(c, d)$$

ist stets dadurch zu lösen, dass man für x wieder ein Symbol Q mit zwei passenden natürlichen Zahlen setzt. Da die Verknüpfung von Gruppen von der Form $Q(a, 1)$ sich nach den obigen Definitionen stets durch die entsprechende Verknüpfung der ersten Elemente vollzieht, so kann man solche Gruppen einfach mit ihrem ersten Elemente bezeichnen und sie in diesem Sinn $= a$ setzen. Versteht man nun in der Gleichung $ax = b$ unter a und b die Gruppen $Q(a, 1)$ und $Q(b, 1)$ und sucht für x wieder eine Gruppe Q, so ist die Aufgabe stets lösbar und liefert, auch wenn b durch a theilbar ist, die richtige Lösung.

Dagegen ist die Subtraction noch nicht immer ausführbar. Vielmehr gibt es nur dann ein Q, welches der Gleichung

$$x + Q(a, b) = Q(c, d)$$

genügt, wenn $Q(c, d) > Q(a, b)$ ist, d. h., wenn $cb - ad$ positiv ist.

Nun werden neue Symbole $D(\alpha, \beta)$ eingeführt, in welchen aber jetzt die α, β selbst solche Gruppen Q sind, so dass eigentlich eines dieser neuen Symbole D von vier natürlichen Zahlen abhängt. Es wird definirt

$$\left.\begin{array}{r} D(\alpha, \beta) = D(\gamma, \delta) \quad \text{wenn} \quad \alpha + \delta = \beta + \gamma \\ D(\alpha, \beta) + D(\gamma, \delta) = D(\alpha + \gamma, \ \beta + \delta) \\ D(\alpha, \beta) \cdot D(\gamma, \delta) = D(\alpha\gamma + \beta\delta, \ \alpha\delta + \beta\gamma). \end{array}\right\} \quad (2)$$

Auch hier ergibt sich die Gültigkeit aller Rechengesetze der natürlichen Zahlen, sowie der Satz, dass zwei gleiche Gruppen beim Rechnen durch einander ersetzt werden dürfen.

Die Gruppen von der Form $D(\alpha + \beta, \beta)$ hängen nur von α ab und können also einfach mit α bezeichnet oder in diesem Sinn $= \alpha$ gesetzt werden, indem auch bei Additionen und Multiplicationen von derartigen Gruppen diese Bezeichnung keine Widersprüche mit sich führt. Die Gruppe $D(\alpha, \alpha)$ ist jeder ähnlich gebauten $D(\beta, \beta)$ gleich; sie wird als Null bezeichnet und hat die bekannten Eigenschaften dieser Zahl.

Mit Hilfe dieser neuen Symbole ist nun die Gleichung

$$\beta + \xi = \alpha$$

stets auflösbar, wenn man nur, wenn nöthig, unter α und β die mit diesen Zeichen zu bezeichnenden Gruppen D versteht und als ξ ebenfalls eine solche Gruppe zulässt. Auch die Lösung der Gleichung

$$\alpha \xi = \beta$$

ist jetzt stets möglich, ausser wenn $\alpha = 0$ ist, und es ergibt sich noch der wichtige Satz, dass ein Product nur dann $= 0$ ist, wenn einer der Factoren $= 0$ ist. Diejenigen Symbole, für welche $\alpha > \beta$ ist, heissen positive, die andern negative Zahlen und $D(\alpha, \beta)$ heisst $> D(\gamma, \delta)$ wenn $D(\alpha, \beta) - D(\gamma, \delta)$ positiv ist. Die stets giltige Gleichung

$$D(\alpha, \beta) = 0 - D(\beta, \alpha)$$

gestattet nun für die negativen Zahlen die bekannte einfache Bezeichnung mit dem Minuszeichen einzuführen und wenn man dann noch für die Gruppen $Q(a, b)$ die übliche Bezeichnung $\frac{a}{b}$ anwendet, kommt man so zu den Zahlformen $\frac{a}{b}$ bezüglich $-\frac{a}{b}$ und findet dann in den früher gegebenen Definitionen 1) und 2) deren bekannte Rechengesetze wieder.

---

§ 3*. Bezeichnen wir nun solche rationalen Zahlen mit einem einzelnen lateinischen Buchstaben, so zeigt sich weiter, dass auch die Auflösung von Gleichungen wie

$$x^2 = 2, \quad x^2 = -1$$

mit den bis jetzt eingeführten Zeichen nicht möglich ist. Man führt nun weitere Zahlen ein, die auch zu diesem Zweck dien-

lich sind: die irrationalen und complexen Zahlen. Die letzten bleiben für uns ausser Betracht.

Die irrationalen Zahlen kann man — gleichzeitig mit den gebrochenen Zahlen — wenn man will, in geometrischer Weise einführen, indem man mit zwei Strecken gleichzeitig rechnet und dabei deren Verhältniss in Betracht zieht. Euclid[1]) hat schon die Mittel in vollständig strenger Weise gegeben, um dies zu thun. Wir werden dem früheren Programm getreu einen andern Weg einschlagen, wie er, mit kleinen Verschiedenheiten, von Weierstrass, Dedekind und Cantor angegeben worden ist[2]). Wir geben dem letzteren den Vorzug, weil er sich dem bisher durchgeführten Gedankengang am besten einfügt.

Es möge eine Vorschrift gegeben sein, durch die man eine unendliche Menge von rationalen Zahlen in einer bestimmten Folge ableiten kann. Diese Zahlengruppe

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

habe die Eigenschaft, dass ihre Elemente „convergent“ seien d. h. dass man zu jedem gegebenen, wenn auch noch so kleinen, positiven rationalen ε stets einen Index m so bestimmen könne, dass für jede natürliche Zahl n

$$|a_{m+n} - a_m| < \varepsilon \tag{1}$$

sei, wenn, wie im ganzen Buche, durch die Einschliessung in Striche $| \; |$ der absolute Betrag bezeichnet wird. Die Zahl m ist hierdurch als Function von ε definirt, die freilich noch eine gewisse Willkür zulassen wird. Diese ist für die folgenden Betrachtungen nicht schädlich. Eine wie oben bestimmte Zahl m werde ein Index zu ε für jene Gruppe genannt. Wir sagen, die Elemente der Gruppe werden unendlich klein, wenn,

---

1) Elemente. Buch V. Stolz in dem Seite 2 angeführten Werke, Band I Seite 85.

2) Vergl. Cantor, Math. Ann., Band V Seite 122, Band XXI Seite 545; oder auch Acta Math., Band II S. 337. — Heine, Journal f. Math., Band LXXIV Seite 172. — Kossak, Elemente der Arithmetik. — Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig 1872. — Méray, Nouveau précis de calcul infinitésimal. Paris 1872, Seite 2.

unter ε eine wie oben bestimmte Zahl verstanden, man m so finden kann, dass

$$| a_{m+n} | < \varepsilon$$

wird für jede natürliche Zahl n.

Man kann immer zu ε einen Index finden, der grösser als eine gegebene Zahl N ist. Denn es sei q ein Index zu $\frac{\varepsilon}{2}$, $l > q$ und $> N$, sonst aber beliebig, so ist

$$| a_{l+p} - a_l | < | a_{l+p} - a_q | + | a_l - a_q | < \varepsilon.$$

Daher ist $l > N$ und ein Index zu ε. Wenn mehrere Gruppen mit convergenten Elementen gegeben sind und für die erste m_1, für die zweite m_2, für die dritte $m_3, \ldots$ ein Index zu $\frac{\varepsilon}{2}$ ist, so ist eine Zahl l, die gleichzeitig $> m_1$ und $> m_2$ und $> m_3 \ldots$ ist, für alle die gegebenen Gruppen ein Index zu ε.

Eine Gruppe, deren Elemente convergiren, bezeichnen wir als eine irrationale Zahl. Diese ist somit gegeben durch die Vorschrift oder das Gesetz, welches die Bildung der unendlich vielen rationalen Zahlen beherrscht, oder, wie man auch sagen kann, durch die Gruppe der unendlich vielen Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

---

§ 4*. Wir definiren nun 2) die Gleichheit von zwei irrationalen Zahlen α, β durch die Festsetzung:

$$\alpha = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

soll

$$= \beta = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

heissen, wenn die Elemente

$$a_1 - b_1, \quad a_2 - b_2, \quad a_3 - b_3, \ldots$$

unendlich klein werden; 3) die Addition durch die Festsetzung,

$$\alpha + \beta = (a_1, a_2, a_3, \ldots) + (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

sei gegeben durch

$$(a_1 + b_1, \quad a_2 + b_2, \quad a_3 + b_3, \ldots);$$

4) die Multiplication durch die Gleichung

$$\alpha\beta = (a_1, a_2, a_3, \ldots)(b_1, b_2, b_3 \ldots) = (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \ldots).$$

Dass die Gruppe rechts bei der Definition 2) eine irrationale Zahl ist, ergibt sich leicht. Sei für die beiden Gruppen α und β q ein Index zu $\frac{\varepsilon}{2}$, so ist für jede natürliche Zahl n,

$$|(a_{q+n} + b_{q+n}) - (a_q + b_q)| < |a_{q+n} - a_q| + |b_{q+n} - b_q| \overline{<} \varepsilon,$$

also q für die Summenreihe ein Index zu ε, so dass diese Gruppe eine irrationale Zahl ist. Um dasselbe für die rechts in der Definition 4) auftretende Gruppe zu zeigen, bemerken wir zuerst die aus (1) folgende Ungleichung

$$|a_{m+n}| = |a_{m+n} - a_m + a_m| < |a_m| + \varepsilon.$$

Ist daher von den $m + 1$ Zahlen

$$|a_1|, \quad |a_2|, \ldots, \quad |a_m|, \quad |a_m| + \varepsilon$$

g die grösste, so ist für jede natürliche Zahl p $|a_p| < g$. Oder, wie man sagt, die **Elemente einer irrationalen Zahl sind endlich.** Es ist aber:

$$|a_{m+n}b_{m+n} - a_m b_m| = |(a_{m+n} - a_m) b_{m+n} - a_m (b_{m+n} - b_m)|.$$

Ist nun $|a_p| < g$, $|b_p| < h$ für jede natürliche Zahl p und ist m für die Reihen α und β ein Index zu δ, so ist für jede natürliche Zahl n obiger Werth $< g\delta + h\delta$. Wenn man die Rechnung mit $\delta = \frac{\varepsilon}{g+h}$ von vorn herein durchführt, erhält man also in m einen Index zu ε, so dass die Gruppe rechts in der Definition 4) in der That eine irrationale Zahl liefert.

Die Addition und die Multiplication erfüllen der Definition gemäss das Commutationsgesetz. Sie erfüllen aber, wie man leicht sieht, auch das Associationsgesetz, indem, wenn

$$\gamma = (c_1, c_2, c_3, \ldots)$$

eine irrationale Zahl ist,

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, \ldots)$$

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = (a_1 b_1 c_1, a_2 b_2 c_2, a_3 b_3 c_3, \ldots)$$

ist, und das Distributionsgesetz, das

$$(\alpha + \beta)\gamma = [(a_1 + b_1) c_1, (a_2 + b_2) c_2, \ldots] =$$
$$= (a_1 c_1, a_2 c_2, \ldots) + (b_1 c_1, b_2 c_2, \ldots) +$$
$$+ \cdots = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

liefert. Daraus folgt dann, wie früher erwähnt, die Unabhängigkeit einer Summe oder eines Productes von der Anordnung der Summation bezüglich der Multiplication.

Man kann auch in einem Product oder einer Summe eine Zahl durch eine ihr gleiche ersetzen, ohne das Resultat zu ändern. Für die Summe ergibt es sich leicht, für das Product soll es bewiesen werden.

Ist

$$\beta = (b_1, b_2, b_3, \ldots), \quad \beta' = (b_1', b_2', b_3' \ldots) \quad \text{und} \quad \beta = \beta'$$

so ist $\alpha\beta$ gegeben durch die Gruppe

$$(a_1 b_1, \; a_2 b_2, \; a_3 b_3, \ldots),$$

$\alpha\beta'$ dagegen durch

$$(a_1 b_1', \; a_2 b_2', \; a_3 b_3', \ldots).$$

Sollen beide gleich sein, so muss $a_n (b_n' - b_n)$ unendlich klein werden. Sind nun die Elemente von α absolut genommen $< g$, so kann man wegen der Gleichheit von β und β' m so gross machen, dass für jede natürliche Zahl n

$$| \, b'_{m+n} - b_{m+n} \, | < \frac{\varepsilon}{g}.$$

Dann ist also:

$$| \, a_{m+n} (b'_{m+n} - b_{m+n}) \, | < \varepsilon,$$

was zum Beweis der Gleichheit von $\alpha\beta$ und $\alpha\beta'$ nöthig ist.

---

§ 5*. Eine irrationale Zahl, deren Elemente alle einander gleich $= a$ sind, kann durch ein einfacheres Zeichen z. B. $[a]$ bezeichnet werden, so dass also $[a] = (a, a, a, \ldots)$ ist.

Dann ist $[a] = [b]$, wenn die Elemente von

$$(a - b, \; a - b, \; a - b, \ldots)$$

unendlich klein werden. Dies ist aber nur möglich, wenn sie alle $= 0$ sind, denn sonst ist ja ihr absoluter Werth stets derselbe und kann nicht kleiner als eine beliebig kleine Zahl werden. Also folgt $[a] = [b]$, wenn $a = b$. Ferner ergibt sich

$$[a] + [b] = [a + b], \quad [a] \cdot [b] = [ab].$$

Man kann sonach, ohne Widerspruch befürchten zu müssen, zur Bezeichnung von $(a, a, a, \ldots)$ die [ ] um das a fortlassen und diese irrationale Zahl einfach durch a selbst bezeichnen.

Ist a eine natürliche Zahl, so ergibt sich auch dann kein Widerspruch, wenn es als Coefficient, als blosses Zeichen der Wiederholung, erscheint, indem es

$$\alpha + \alpha + \alpha + \cdots + \alpha,$$

a mal genommen, in $a\alpha$ zusammenfasst. Denn die Summe ist $(aa_1, aa_2, aa_3, \ldots)$ und $a\alpha = (a, a, a, \ldots)(a_1 a_2 \ldots)$ eben dieser Gruppe gleich. Da man, wie bewiesen, Gleiches durch Gleiches ersetzen darf, so wird man mit einem solchen Zeichen a unendlich viele der Form nach verschiedene aber nach der Definition einander gleiche Zahlen zu bezeichnen haben. Es ist z. B. $1 = (1, 1, 1, \ldots)$ oder $= (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \ldots)$ oder $= (1, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6}, \ldots)$.

Als Umkehrung der Addition erledigt sich die Subtraction leicht, indem

$$\alpha - \beta = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3, \ldots)$$

ist. Die Division dagegen erfordert noch einige Vorbereitungen. Nach der Uebereinkunft ist die Zahl $(0, 0, \ldots)$ mit Null zu bezeichnen. Aber nach der Definition der Gleichheit ist auch jede Zahl, deren Elemente unendlich klein werden und nur eine solche mit Null zu bezeichnen. Wenn nun die Zahl $(a_1, a_2, \ldots)$ nicht Null ist, so kann man, wie jetzt bewiesen werden soll, eine ganze Zahl N und eine rationale k, die nicht $= 0$ ist, so finden, dass für alle $n > N$, $|a_n| > k$ ist. Denn wäre dies nicht möglich, so gäbe es, wie man auch N und k wählen könnte, stets ein $n > N$, für welches $|a_n| < k$ wäre; es gäbe also auch, wenn m ein zu $\frac{\varepsilon}{4}$ gehöriger Index ist, ein $n > m$, etwa $n = m + p$, für welches $|a_{m+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$ wäre. Dann wäre aber für jedes q

$$|a_{m+q}| = |a_{m+q} - a_m + a_{m+p} - (a_{m+p} - a_m)| <$$

$$\leq |a_{m+q} - a_m| + |a_{m+p} - a_m| + |a_{m+p}| \overline{\overline{<}} \varepsilon,$$

also würden die Elemente der Gruppe unendlich klein und die Gruppe wäre $= 0$. Man kann daher sagen, wenn eine Gruppe nicht Null ist, so sind ihre Elemente von einem bestimmten an alle absolut grösser als eine bestimmte Zahl, insbesondre also nicht der Null gleich, und wenn von den Elementen einer Zahl unendlich viele gleich Null sind, so muss die Zahl 0 sein.

Aus der Definition der Gleichheit folgt weiter: Bilden die natürlichen Zahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ eine Reihe, deren Zahlen mit dem Index in's Unendliche wachsen, in der Weise, dass man zu jeder noch so grossen Zahl g stets einen Index N finden kann, so dass für alle $n > N$ $p_n \geqq g$ ist, so ist

$$(a_1, a_2, a_3 \ldots) = (a_{p_1}, a_{p_2}, a_{p_3}, \ldots).$$

Denn es sei m ein zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehöriger Index der Reihe links und N so bestimmt, dass für $n > N$ $p_n > m$ ist. Dann ist, wenn $n > N$ und $> m$,

$$| a_n - a_{p_n} | = | a_n - a_m - (a_{p_n} - a_m) | < \varepsilon,$$

so dass die Glieder der Gruppe $a_1 - a_{p_1}, a_2 - a_{p_2} \ldots$ unendlich klein werden.

Lässt man aus einer Gruppe eine endliche Zahl von Elementen weg oder ändert sie irgendwie ab, so ändert sie sich nicht, d. h. die neu entstandene Gruppe ist der ursprünglichen gleich. Denn lässt man alle Elemente $a_1, a_2, \ldots a_r$ fort, so setzt man

$$p_1 = r + 1, \qquad p_2 = r + 2, \ldots p_n = r + n$$

und es folgt der Satz. Ist aber a_s dasjenige der weggelassenen oder abgeänderten Elemente, welches den grössten Index hat, so ist die ursprüngliche Gruppe, wie die abgeänderte, gleich der $(a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots)$, so dass jene unter sich gleich sind. Eine Gruppe, in der alle Elemente von einem bestimmten an gleich Null sind, ist deshalb selbst gleich Null.

Es sei nun $\alpha = (a_1, a_2, a_3 \ldots)$ nicht gleich Null, dagegen einzelne Elemente z. B. $a_p, a_q, a_r \ldots$ gleich Null, deren Zahl dann endlich ist. Aendert man diese etwa in 1 um, so ist die geänderte Zahl auch $= \alpha$, aber es ist kein Element mehr der Null gleich. Man kann also stets eine von Null verschiedene Zahl, wenn nöthig, so zubereiten, dass keines ihrer Elemente $= 0$ ist, dass sie vielmehr alle, absolut genommen, eine gewisse positive Zahl überschreiten. Die Gruppe

$$\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots\right)$$

hat dann, wenn sie eine Zahl darstellt, die Eigenschaft, der Gleichung $\alpha \xi = \beta$ zu genügen. Nun kann man schreiben:

$$\frac{b_{m+n}}{a_{m+n}} - \frac{b_m}{a_m} = \frac{a_m(b_{m+n} - b_m) - b_m(a_{m+n} - a_m)}{a_{m+n} \cdot a_m}.$$

Nach dem Bewiesenen sind die Elemente von α alle absolut $> k$, dagegen $< g$ und die von $\beta < h$. Ist also m ein Index zu δ, sowohl für α als für β, so ist hiernach:

$$\left| \frac{b_{m+n}}{a_{m+n}} - \frac{b_m}{a_m} \right| < \frac{g+h}{k^2}\,\delta.$$

Da man nun

$$\delta = \frac{\varepsilon k^2}{g+h}$$

nehmen kann, so ist auch m ein Index zu ε für die Quotientengruppe, diese stellt also eine Zahl dar. Somit hat $\frac{\beta}{\alpha}$ einen Sinn, wenn α nicht $= 0$ ist. Wenn aber $\alpha = 0$ ist, ist die neue Gruppe nur dann eine Zahl, wenn auch $\beta = 0$ ist, aber dann ist diese Zahl von der Form der Zahl α abhängig. Ist z. B.

$$\beta = 0 = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots)$$

$$\alpha = 0 = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots)$$

so ist

$$\frac{\beta}{\alpha} = (1, 1, 1, \ldots) = 1,$$

dagegen wenn

$$\beta = 0 = (1, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{9}, \ldots)$$

gesetzt wird, ist

$$\frac{\beta}{\alpha} = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots) = 0.$$

Wenn ein Product $\alpha\beta = 0$ ist, so werden die Elemente von $(a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots)$ unendlich klein. Dies verlangt aber, dass entweder α oder β oder beide $= 0$ sind. Denn ist keines $= 0$, so gibt es eine Zahl N, so dass für $n > N$ $|a_n| > k$ und $|b_n| > l$, während k und $l > 0$ sind. Dann ist für $n > N$ $|a_n b_n| > kl$, so dass die neue Gruppe nicht gleich Null sein kann. Also kann ein Product nur verschwinden, wenn einer seiner Factoren $= 0$ ist. Zur Feststellung der Begriffe $>$ und $<$ müssen wir zuerst den folgenden Satz vorausschicken. Wenn eine Zahl nicht $= 0$ ist, so sind von einem gewissen Elemente an alle folgenden von demselben Zeichen, also alle positiv oder alle negativ. Gesetzt, es wäre

dies nicht der Fall, so müsste es, wie gross man auch N wählen würde, stets noch Elemente mit verschiedenen Zeichen geben. Da die Zahl nicht $= 0$ ist, so sind alle Elemente absolut $> k$. Es sei nun m ein Index zu $\frac{k}{4}$, so gäbe es einen Index $m + n > m$, für den $a_{m+n} > 0$ und einen $m + p$, so dass $a_{m+p} < 0$ wäre. Dann wäre einerseits

$$| a_{m+n} - a_{m+p} | > 2k,$$

weil die beiden entgegengesetztes Zeichen haben, andrerseits

$$| a_{m+n} - a_{m+p} | = | a_{m+n} - a_m - (a_{m+p} - a_m) | < \frac{k}{2},$$

was nicht möglich ist. Hiermit ist der obige Satz bewiesen.

§ 6*. Wenn nun bei einer Zahl, die nicht Null ist, alle Elemente von einem bestimmten an positiv sind, soll die Zahl positiv heissen, wenn sie negativ sind, dagegen negativ. Man kann also nach den Sätzen in § 5 eine positive Zahl mit lauter positiven oder eine negative mit lauter negativen Elementen versehen. Es soll $\alpha > \beta$ heissen, wenn $\alpha - \beta > 0$ ist. Dann sind von einem bestimmten an alle Elemente von α grösser als die von β. Sind von einem bestimmten an alle grösser als eine Zahl a, so ist $\alpha > a$. Ist $\alpha > 0$, so ist $| \alpha | = \alpha$. Ist aber $\alpha < 0$, so ist $| \alpha | = - \alpha$, also wenn $\alpha = (a_1, a_2 \ldots)$

$$| \alpha | = (- a_1, - a_2, - a_3, \ldots),$$

oder da man annehmen kann, in diesem Falle seien die Elemente von α alle negativ,

$$| \alpha | = (| a_1 |, | a_2 |, \ldots)$$

und dieselbe Form gilt auch offenbar, wenn $\alpha > 0$ ist. Auch ist sie dann richtig, wenn α nicht in der Form mit lauter positiven bez. negativen Elementen dargestellt ist, weil ja alle Elemente von einem gewissen an, etwa von a_{r+1} an, positiv bez. negativ sein müssen, also

$$| \alpha | = (| a_{r+1} |, | a_{r+2} |, \ldots)$$

sein muss, dies aber stets $= (| a_1 |, | a_2 |, \ldots)$ ist.

§ 7*. Es ist nun zweckmässig, die in den vorigen Paragraphen gegebenen Definitionen auf Gruppen auszudehnen, deren Elemente selbst solche Gruppen sind, die wir hier irrationale Zahlen genannt haben. Dann ergeben sich ganz genau die Folgerungen, die wir bis jetzt unter der früheren Beschränkung auf rationale Elemente abgeleitet hatten. Als Beispiel einer solchen Gruppe diene etwa die folgende, in der in jeder Zeile eine unserer bisherigen Gruppe steht:

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 1+\frac{1}{2}, & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \cdots \\ 1, & 1+\frac{1}{3}, & 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}, \cdots \\ 1, & 1+\frac{1}{4}, & 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}, \cdots \end{matrix}\right\}.$$

Jede solche Gruppe lässt sich nach der Definition 2) in § 4 einer unserer früheren Gruppen gleichsetzen.

Hierzu dienen folgende Sätze:

Es seien α und β zwei (rationale oder irrationale) Zahlen, $\alpha > \beta$, $\alpha - \beta = \gamma$ also nicht $= 0$, sondern > 0. Die Elemente von γ sind daher von einem bestimmten an alle positiv und grösser als die rationale und positive Zahl k, somit auch als $\frac{k}{2}$. Zwischen α und β liegt also sicher ein ganzes Vielfaches von $\frac{k}{2}$, also eine rationale Zahl, die $> \beta$ aber $< \alpha$ ist.

Es sei nun $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots) = \mathsf{A}$ eine Gruppe, deren Elemente convergiren. Man nehme die rationalen, positiven Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ so an, dass die Gruppe $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots) = 0$ ist. Zwischen α_p und $\alpha_p + \varepsilon_p$ gibt es nun stets noch rationale Zahlen, von welchen eine a_p sei. Dann ist

$$| a_p - \alpha_p | < \varepsilon_p,$$

folglich convergiren die Elemente $(a_1, a_2, \ldots)$ und bilden eine Zahl α, für die

$$| \mathsf{A} - \alpha | = (| \alpha_1 - a_1 |, | \alpha_2 - a_2 |, | \alpha_3 - a_3 |, \ldots) <$$
$$< (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots),$$

also $= 0$ ist, so dass $\mathsf{A} = \alpha$ folgt.

Somit ergeben in Folge der Definitionen diese neuen,

scheinbar allgemeinen Zahlen den alten gegenüber nichts Neues und diese Erweiterung des Begriffs Zahl ist hiermit abgeschlossen.

§ 8*. Wenn wir auch bisher die Zahlen ohne Bezug auf geometrische Anschauung entwickelt haben und wenn es auch möglich wäre, in der ganzen folgenden Theorie diesen Standpunkt beizubehalten, so empfiehlt es sich doch, der Anschaulichkeit wegen, für die Zahlen ein geometrisches Bild einzuführen. Am besten eignet sich dazu eine Strecke auf einer geraden Linie. Wenn man auf ihr einen Ursprung O festlegt und eine Strecke OE als Einheitsstrecke annimmt, so kann man zunächst jede positive, rationale Zahl $\frac{\alpha}{\beta}$ darstellen durch diejenige von O nach rechts aufgetragene Länge, welche α mal so gross ist, als der β^{te} Theil der Strecke OE. Ist aber die Zahl negativ $= -\frac{\alpha}{\beta}$, so trägt man die angegebene Strecke nach links auf. So wird jede rationale Zahl durch einen Punkt, eben den Endpunkt jener Strecke, dargestellt und in gewissen Beziehungen entsprechen den Rechnungsoperationen mit den Zahlen auch geometrische Operationen mit den sie darstellenden Strecken. Aber das Umgekehrte ist nicht richtig. Schon Euclid[1]) hat gezeigt, dass es Längen gibt, die aus der Strecke OE nicht durch rationale Zahlen abgeleitet werden können. Dagegen lässt sich aus einer zu OE incommensurablen Länge OL stets eine Gruppe mit convergenten Elementen ableiten. Denn man kann stets zur natürlichen Zahl p eine andre a_p so finden, dass

$$\frac{a_p}{p} \cdot OE < OL < \frac{a_p + 1}{p}\, OE$$

und folglich

$$\frac{a_p}{p} < \frac{a_q + 1}{q}$$

für alle p und q ist. Dann hat man die Gruppe

---

1) Elemente. Buch X, Satz 9. Am Einfachsten lässt sich zeigen, dass das Verhältniss der Seite des regelmässigen Zehnecks zum Radius des umschriebenen Kreises incommensurabel ist.

$$\left(\frac{a_1}{1}, \quad \frac{a_2}{2}, \quad \frac{a_3}{3}, \ldots\right),$$

für diese ist

$$\frac{a_{m+n}}{m+n} - \frac{a_m}{m} < \frac{a_m+1}{m+1} - \frac{a_m}{m} = \frac{1}{m},$$

also ist die Gruppe convergent. Die beiden Strecken liefern demnach das Gesetz, nach dem die Elemente einer Zahl zu bilden sind. Was die umgekehrte Frage angeht, ob eine irrationale Zahl und die Strecke OE zusammen eine Strecke OL liefern, so kann man zeigen, dass sie jedenfalls nur eine liefern kann. Denn gäbe es eine zweite OL', so wäre:

$$\frac{a_p}{p} \cdot OE < OL' < \frac{a_p+1}{p} OE,$$

daher

$$OL' - OL < \frac{1}{p} OE.$$

Man kann aber p so gross machen, dass der p^{te} Theil von $OE <$ als die Strecke LL' ist. Somit kann L' nicht von L verschieden sein. Dass es aber stets eine Strecke gibt, die zu einer Irrationalzahl gehört, kann man nicht beweisen[1]), vielmehr scheint die Annahme, dass es der Fall sei, oder eine ihr entsprechende, das Wesen der Stetigkeit der Geraden auszumachen[2]). Und wegen dieser Correspondenz zwischen den Punkten einer Geraden und der Gesammtheit der Zahlen nennt man deren Folge stetig. Es wird hiernach gestattet sein, von Punkten und Punktmengen in anschaulicher Weise zu sprechen, statt von Zahlen und Zahlenmengen, besonders da die Anschauung hier nie als Beweismittel benutzt werden soll.

---

§ 9. Zur Bestimmung einer irrationalen Zahl bedient man sich häufig eines Verfahrens, welches die aufeinanderfolgende Theilung des Intervalls in $2, 2^2, 2^3, \ldots 2^n, \ldots$ gleiche Theile genannt wird und welches im Wesentlichen

---

1) Du Bois-Reymond, Die allgemeine Functionentheorie. Erster Theil. Tübingen. 1882.

2) Dedekind in dem Seite 5 angeführten Werke Seite 16 ff. Cantor, Math. Ann., Band V Seite 127 oder Acta Math., Band II Seite 342.

in einer Methode besteht, die schon dem Euclid[1]) bekannt war. Wir halten es für zweckmässig, sofort dieses Verfahren kennen zu lehren, indem wir uns, zur wirklichen Bildung solcher bestimmten Zahlen und zum Beweis, eines allgemeinen Lehrsatzes bedienen.

Wir wollen zu diesem Zweck voraussetzen, dass die Zahlen, welche in einem gegebenen Problem zu Tage treten, gewissen Bedingungen genügen. Diese letzteren mögen derart in zwei Klassen A und B zerfallen, dass, wenn eine gegebene Zahl allen Bedingungen der einen Klasse genügt, sie nicht gleichzeitig auch allen denen der andern genügen kann. Wir wollen ferner voraussetzen, dass unter den Zahlen, welche zwischen zwei endliche Zahlen α und β fallen oder (um uns einer der Geometrie entnommenen Ausdrucksweise zu bedienen) unter den Zahlen eines gegebenen endlichen Intervalls (α, β) (die Endwerthe α und β eingeschlossen oder nicht) allerhöchstens nur eine einzige Zahl existiren kann, welche weder den Bedingungen der Klasse A, noch denen der Klasse B vollständig genügt, während die übrigen Zahlen sicher entweder A oder B erfüllen. Endlich möge, wenn eine dieser Zahlen den Bedingungen A genügt und nicht das untere Ende des in Betracht gezogenenen Intervalls (α, β) ist, jede Zahl, die kleiner als sie und in demselben Intervall enthalten ist (höchstens mit Ausschluss des unteren Endes), diesen Bedingungen ebenfalls genügen und wenn eine dieser Zahlen den Bedingungen B genügt und nicht das obere Ende des Intervalls ist, jede grössere und in demselben Intervall enthaltene Zahl (höchstens mit Ausschluss des oberen Endes) diesen Bedingungen ebenfalls genügen. Es wird alsdann leicht sein, mittelst des Verfahrens der aufeinanderfolgenden Theilung des Intervalls (α, β) in $2, 2^2, 2^3, \ldots 2^n \ldots$ gleiche Theile eine zwischen α und β (α und β eingeschlossen) fallende Zahl λ zu finden, welcher die Eigenschaft zukommt, dass jede kleinere Zahl als λ, die in dasselbe Intervall fällt, den Bedingungen A genügt, während jede in demselben Intervall enthaltene Zahl, die grösser als λ ist, den Bedingungen B genügt. Auf diese

1) Elemente, Buch X, Satz 1.

Art gelingt es, die Existenz einer solchen Zahl λ zu beweisen und man erhält überdies das Verfahren, um sie thatsächlich zu bestimmen.

Zu diesem Zweck ist vorerst zu bemerken, dass offenbar zwei solche Zahlen λ nicht existiren können und dass, wenn man auf irgend eine Weise dahin gelangt, eine bestimmte, von den Endwerthen α und β verschiedene, Zahl μ zu finden, welche weder allen Bedingungen A, noch allen Bedingungen B genügt, man ohne Weiteres wird sagen können, dass dieses die gesuchte Zahl λ sein muss. Denn, wäre sie es nicht und existirte in demselben Intervall (α, β) eine Zahl ν grösser als das von dem oberen Endwerth verschiedene μ, welche den Bedingungen A genügt oder eine Zahl ν kleiner als das von dem unteren Grenzwerth verschiedene μ, welche den Bedingungen B genügt, so müsste auch μ allen Bedingungen A oder allen Bedingungen B genügen.

Nehmen wir nun an $\alpha < \beta$ und theilen das Intervall (α, β) in zwei gleiche Intervalle[1])

$$\left(\alpha,\ \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}\right),\ \left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2},\ \beta\right).$$

Trifft es sich so, dass die Zahl

$$\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}$$

weder allen Bedingungen A noch allen Bedingungen B genügt, so ist sie die gesuchte Zahl λ und es ist überflüssig, das Verfahren fortzusetzen. Wenn aber diese Zahl $\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}$ allen Bedingungen B genügt, so genügt ihnen auch jede Zahl des zweiten Intervalls (β höchstens ausgeschlossen) und wir haben uns nicht mehr mit dem zweiten sondern mit dem ersten Intervall zu beschäftigen; wenn dagegen $\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}$ allen Bedingungen A genügt, so genügt ihnen auch jede Zahl des ersten Intervalls (α höchstens ausgeschlossen) und wir haben uns nicht mehr mit dem ersten, sondern mit dem zweiten zu beschäftigen. Das heisst aber, wenn α_1 eine Zahl bezeichnet,

---

1) Bolzano, Rein analytischer Beweis u. s. w. Abh. d. Böhmischen Gesellsch. d. Wiss., Band V. Prag 1817.

deren Werth gleich Null wird, wenn $\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}$ den Bedingungen B genügt und der Einheit gleich wird, sowohl wenn es den Bedingungen A genügt und als auch, wenn es weder den Bedingungen A noch den Bedingungen B vollständig genügt (um auch diesen Fall einzuschliessen, obgleich es überflüssig ist) und wenn man ferner

$$\beta - \alpha = \gamma \quad \text{und} \quad x_1 = \alpha + \frac{\gamma}{2} \alpha_1$$

setzt, so reicht das Intervall, mit dem wir uns zu beschäftigen haben, von x_1 bis $x_1 + \frac{\gamma}{2}$ und dieses Intervall besitzt die Eigenschaft, dass jede ausserhalb desselben gelegene Zahl, welche innerhalb des Intervalls (α, β) liegt (höchstens α und β ausgenommen), den Bedingungen A genügt, wenn sie kleiner als x_1 und den Bedingungen B, wenn sie grösser als $x_1 + \frac{\gamma}{2}$ ist.

Verfahren wir jetzt mit diesem Intervall

$$\left(x_1, \ x_1 + \frac{\gamma}{2}\right),$$

wie wir mit dem ersten verfahren sind und setzen

$$x_2 = x_1 + \frac{\gamma}{2^2} \alpha_2,$$

worin α_2 eine der Null oder Einheit gleiche Zahl ist, die wie vorhin bestimmt wird, so erhalten wir das Intervall

$$\left(x_2, \ x_2 + \frac{\gamma}{2^2}\right),$$

welches vollständig in den vorhergehenden Intervallen enthalten ist und welches die Eigenschaft besitzt, dass jede ausserhalb desselben gelegene Zahl, welche zwischen α und β liegt (höchstens α und β ausgeschlossen), den Bedingungen A genügt, wenn sie kleiner ist, als x_2 und den Bedingungen B, wenn sie grösser ist, als $x_2 + \frac{\gamma}{2^2}$.

Indem man so fortfährt und nach einander

$$x_3 = x_2 + \frac{\gamma}{2^3} \alpha_3, \quad x_4 = x_3 + \frac{\gamma}{2^4} \alpha_4, \dots \quad x_n = x_{n-1} + \frac{\gamma}{2^n} \alpha_n$$

setzt, worin $\alpha_3, \alpha_4 \ldots \alpha_n$ der Null oder Einheit gleiche Zahlen sind, die nacheinander auf die genannte Art bestimmt werden, so kommt man nach n solchen aufeinander folgenden Operationen zu dem Intervall

$$\left(x_n,\ x_n + \frac{\gamma}{2^n}\right),$$

welches vollständig in den vorhergehenden Intervallen enthalten ist und immer noch die Eigenschaft besitzt, dass jede ausserhalb desselben gelegene Zahl, die zwischen α und β fällt (höchstens α und β ausgeschlossen), den Bedingungen A genügt, wenn sie kleiner als x_n und den Bedingungen B, wenn sie grösser als

$$x_n + \frac{\gamma}{2^n}$$

ist. Die Gruppe $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ der unteren Grenzen bildet nun eine Zahl λ. Denn, weil alle $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ in dem Intervalle

$$\left(x_n,\ x_n + \frac{\gamma}{2^n}\right)$$

gelegen sind, ist

$$|\, x_{n+m} - x_n \,| < \frac{\gamma}{2^n}$$

und kann also, durch passende Wahl von n, $< \varepsilon$ werden. Die Zahl

$$\left(x_1 + \frac{\gamma}{2},\quad x_2 + \frac{\gamma}{4}, \ldots\right)$$

ist offenbar auch $= \lambda$. Weil von x an alle Elemente $\geqq x_n$, aber

$$< x_n + \frac{\gamma}{2^n}$$

sind, ist

$$\lambda > x_n \quad \text{und} \quad < x_n + \frac{\gamma}{2^n}.$$

Nimmt man nun eine beliebige Zahl μ, welche in das Intervall (α, β) fällt (höchstens die Endwerthe α und β ausgeschlossen), die von λ verschieden ist, so kann man immer eine Zahl n finden, für welche

$$|\, \lambda - \mu \,| > \frac{\gamma}{2^n}$$

ist. Die Zahl liegt also dann ausserhalb des Intervalls

$$\left(x_n, \; x_n + \frac{\gamma}{2^n}\right),$$

in welchem λ immer noch enthalten ist, und genügt deshalb den Bedingungen A, wenn sie kleiner als λ und den Bedingungen B, wenn sie grösser als λ ist, das heisst, λ besitzt genau die oben angegebene Eigenschaft.

Wir bemerken noch, dass, statt von zwei verschiedenen Bedingungssystemen A und B und Zahlen zu sprechen, die den einen oder den andern genügen, wir von einem einzigen Bedingungssystem und von Zahlen, die diesen Bedingungen genügen respective nicht genügen, sprechen könnten etc.

Zweites Kapitel.

Werth- oder Punktmengen, ihr oberer und unterer Grenzwerth.

§ 10. Nachdem wir die Irrationalzahlen besprochen haben, scheint es uns angezeigt, im Folgenden die Werthmengen näher zu betrachten[1]).

Es seien irgend welche reelle Zahlen y durch gewisse Gesetze oder gewisse Bedingungen bestimmt; doch seien diese Gesetze oder diese Bedingungen durchaus beliebig und die Anzahl der Werthe, die sie liefern, sei endlich oder unendlich. Wir sagen von diesen Werthen, dass sie eine Werthmenge bilden und wenn wir sie uns, wie es oft geschieht, auf einer geraden Linie dargestellt denken, so sagen wir von den entsprechenden Punkten, dass sie eine Punktmenge bilden. So bilden zum Beispiel die in den vorigen Paragraphen betrachteten Zahlengruppen besondere Werthmengen und die diesen Zahlen entsprechenden Punkte Punktmengen.

---

1) Vgl. hierzu besonders: Cantor, Math. Ann., Band V Seite 122 ff. und Band XV Seite 1.

§ 11. Da wir uns in der Regel dieser letzteren Benennung bedienen werden, wird es gut sein, schon jetzt zu erklären, dass wir von einem Intervall sagen, es sei die Umgebung eines Punktes x, der sich in einem endlichen Intervall (α, β) (die Endwerthe α und β eingeschlossen oder nicht) befindet, wenn seine Ausdehnung zwar beliebig klein, doch immer von Null verschieden ist und wenn es die Eigenschaft besitzt, dass es ganz in dem gegebenen Intervall (α, β) enthalten ist und dass es den Punkt x in seinem Innern hat, wenn dieser Punkt innerhalb des gegebenen Intervalls selbst ist, und ihn nur dann an seinem einen Ende hat, wenn er selbst das eine Ende des gegebenen Intervalls ist. So ist die Umgebung eines innerhalb des gegebenen Intervalls (α, β) gelegenen Punktes x jedes Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon')$, worin ε und ε' von Null verschieden und positiv sind, welches ganz in dem gegebenen Intervall selbst enthalten ist; ist dagegen x eines der Enden α oder β und ist zum Beispiel $\alpha < \beta$, so ist die Umgebung von x jedes Intervall $(\alpha, \alpha + \varepsilon)$, $(\beta - \varepsilon, \beta)$, worin ε positiv ist, welches ganz in dem gegebenen Intervall enthalten ist. Wir unterscheiden manchmal den Theil der Umgebung rechts von x und den Theil der Umgebung zur Linken, indem wir unter diesen Benennungen die Theile der Umgebung von x verstehen, welche rechts resp. links von x liegen (den Punkt x eingeschlossen) und wenn dann x innerhalb des gegebenen Intervalls liegt, so haben wir immer einen Theil der Umgebung rechts und einen Theil der Umgebung links; wenn dagegen x ein Ende α oder β ist, so kommt nur der eine Theil der Umgebung in Betracht. Man sieht ein, dass man von Umgebungen eines Punktes auch bei Intervallen von unendlich grosser Ausdehnung sprechen kann und statt von Umgebungen von Punkten zu sprechen, kann man auch von Umgebungen von Zahlen sprechen, doch ist es einfacher und deutlicher sich auf Punkte zu beziehen.

---

§ 12. Betrachten wir unter dieser Voraussetzung eine Menge von unendlich vielen Punkten, die sämmtlich in einem endlichen Intervall (α, β) (die Endwerthe α und β ein-

geschlossen oder nicht) enthalten seien und bezeichnen dieselbe mit G. Wir nennen Grenzpunkte dieser Menge diejenigen Punkte x, welche die Eigenschaft besitzen, dass in jede ihrer Umgebungen, sie mögen so klein sein wie sie wollen, immer unendlich viele Punkte der Menge fallen. Wenn wir das Verfahren der aufeinander folgenden Theilung des Intervalls (α, β) in $2, 2^2, 2^3 \ldots 2^n \ldots$ gleiche Theile (§ 9) anwenden und beachten, dass von den beiden Intervallen, die man damit nacheinander erhält, wenigstens eines immer unendlich viel Punkte der Menge enthalten muss und wenn wir nacheinander das Intervall, in welchem dieses der Fall ist, oder ein beliebiges von den beiden, z. B. das erste, wenn unendlich viele Punkte von G in beide fallen, weiter theilen, so erhalten wir immer solche Grenzpunkte x. Man wird also sagen können, dass, wie beschaffen auch die in Betracht gezogene Punktmenge G sei, wenn sie nur eine unendliche Menge von Punkten enthält, immer wenigstens ein Grenzpunkt existirt, der einer der Punkte der Menge sein kann oder nicht. Für eine Menge können auch unendlich viele Grenzpunkte existiren, da unter den Intervallen, welche man bei dem oben auseinandergesetzten Verfahren nicht benutzt hat, eine unendlich grosse Anzahl von Intervallen sein kann, in welche ebenfalls unendlich viele Punkte der Menge fallen. Ein Punkt von G soll isolirt heissen, wenn er nicht ein Grenzpunkt ist.

Diese Grenzpunkte der Menge G bilden nun eine neue, ebenfalls in dem gegebenen Intervall (α, β) enthaltene Punktmenge, die indessen möglicher Weise nur eine begrenzte Anzahl von Punkten oder nur einen einzigen enthält. Wir nennen sie, insofern sie aus G hervorgeht, mit Cantor die erste Ableitung der Menge G und bezeichnen sie mit G'. Diese Menge G' kann aus einer endlichen oder einer unendlichen Zahl von Punkten bestehen. Im letzten Falle ist es möglich, dass sie von der gegebenen Menge G gar nicht verschieden ist. Dann heisst G eine perfecte Menge[1]. Ist nun G' selbst

1) Cantor, Math. Ann., Band XXI Seite 575 oder Acta Math., Band II Seite 405.

wieder aus einer unendlich grossen Anzahl von Punkten zusammengesetzt, so können wir durch die Wiederholung des obigen Verfahrens aus ihr eine neue Menge erhalten, die wir mit G'' bezeichnen und die zweite Ableitung von G nennen. So kommen wir schliesslich, wenn wir dasselbe Verfahren ν mal nach einander wiederholen können, im Allgemeinen zu einer Menge, die wir mit $G^{(\nu)}$ bezeichnen und die ν^{te} Ableitung von G nennen.

Da man bei der successiven Bildung der von G abgeleiteten Mengen auf eine abgeleitetete Menge $G^{(\nu)}$ treffen kann, die nur aus einer endlichen Anzahl von Punkten zusammengesetzt ist und deshalb keine Gelegenheit bietet, weitere Mengen abzuleiten, da es aber auch möglich ist, dass man dasselbe Verfahren, so lange man will, fortsetzen kann, ohne jemals auf eine, nur aus einer endlichen Anzahl von Punkten zusammengesetzte, abgeleitete Menge zu treffen, so können wir die (endlichen oder unendlichen) Punktmengen, welche sämmtlich in ein endliches Intervall fallen, in zwei Gattungen theilen. Wir nennen Mengen der ersten Gattung solche, die nur eine endliche Anzahl von abgeleiteten Mengen oder auch keine (dieser letzte Fall tritt nur ein, wenn sie aus einer endlichen Anzahl von Punkten zusammengesetzt sind) haben und dagegen Mengen der zweiten Gattung solche, die eine unendlich grosse Anzahl abgeleiteter Mengen haben. Unter den Mengen der ersten Gattung nennen wir Mengen der ersten Gattung und nullten Art oder einfacher (ohne die Gattung zu erwähnen, die dabei überflüssig ist) Mengen der nullten Art solche, die aus einer endlichen Anzahl von Punkten zusammengesetzt sind und deshalb keine abgeleiteten Mengen haben; Mengen der ersten Art solche, die eine einzige abgeleitete Menge haben und allgemein Mengen der ν^{ten} Art solche, die nur ν abgeleitete Mengen haben. Wenn also G eine Menge der ν^{ten} Art ist, so sind die Mengen G', $G'' \ldots G^{\nu}$, bezüglich von der $(\nu - 1)$, $(\nu - 2) \ldots$ und nullten Art.

So ist z. B. die Punktmenge:

$$\left(1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5},\ldots\right)$$

von der ersten Gattung und der ersten Art, da sie nur eine abgeleitete Menge hat, welche aus den beiden Punkten 0 und $\frac{1}{2}$ besteht und die Menge

$$\left(1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{6}\cdots\right)$$

ist von der zweiten Art, weil sie eine erste abgeleitete Menge

$$\left(0,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5},\ldots\right)$$

und eine zweite abgeleitete Menge, die sich auf den Punkt 0 reducirt, hat. Die Menge G der Rationalzahlen zwischen 0 und 1 ist dagegen von der zweiten Gattung, da ihre erste abgeleitete Menge G' aus allen Rational- und Irrationalzahlen zwischen 0 und 1 besteht und die folgenden abgeleiteten Mengen immer G' gleich sind.

§ 13. Wir bemerken noch, dass die Punkte, welche die abgeleiteten Mengen 2ter, 3ter, 4ter ... Art, wenn diese Mengen existiren, zusammensetzen, sämmtlich thatsächlich der ersten abgeleiteten Menge angehören. Denn wenn ein Punkt x, welcher der abgeleiteten Menge $G^{(m)}$ ($m > 2$ genommen) angehört, nicht auch G' angehörte, so würde eine Umgebung $(x - \varepsilon,\ x + \varepsilon')$ dieses Punktes bestehen, in welche nur eine endliche Anzahl von Punkten oder auch gar kein Punkt von G fällt und deshalb würde kein Punkt innerhalb dieser Umgebung G' angehören und also auch nicht G'', G''', ... $G^{(m)}$, was gegen die Voraussetzung ist.

Daraus folgt, dass, nachdem man die erste abgeleitete Menge G' erhalten hat, man bei der Bildung der folgenden abgeleiteten Mengen, vorausgesetzt, dass sie existiren, keine neuen Punkte erhält. Man kann daher insbesondere sagen: wenn eine Punktmenge der zweiten Gattung der Art ist, dass eine von ihr abgeleitete Menge alle Punkte einer Theilstrecke (a, b) des gegebenen Intervalls enthält, auch die erste von ihr abgeleitete Menge alle diese Punkte enthalten muss. In diesem Falle nennt man nach Cantor die Punktmenge „in dem Intervalle (a, b) „über-

all dicht" oder nach Du Bois-Reymond[1]) pantachisch. Jedes aus dem Intervall (a, b) herausgehobene Intervall enthält dann mindestens einen Punkt der Menge.

---

§ 14. Die Punktmengen erster Gattung, auch wenn sie nicht von der nullten Art sind, welche in einem beliebigen Theilintervall (a, b) des Intervalls (α, β) enthalten sind, besitzen ferner die Eigenschaft, dass, wenn man aus diesem nämlichen Theilintervall mit beliebig kleinen, aber von Null verschiedenen Intervallen die Umgebungen von bestimmten, in endlicher Anzahl vorhandenen Punkten herausnimmt, in die übrig bleibenden Intervalle keine Punkte der Menge mehr fallen. Nehmen wir in der That an die in Betracht gezogene Menge G sei von der ν^{ten} Art, so fällt in das Intervall (a, b) (a und b eingeschlossen) entweder kein Punkt der ν^{ten} Ableitung $G^{(\nu)}$ oder nur eine endliche Anzahl derselben. Bilden wir nun in demselben Intervall für jeden dieser Punkte (wenn welche da sind) beliebig kleine Umgebungen und nehmen sie aus (a, b) heraus, so behalten wir eine endliche Anzahl von anderen Intervallen (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \ldots$ übrig, von denen in jedes einzelne entweder kein Punkt der Menge $G^{(\nu-1)}$ oder nur eine endliche Anzahl derselben fällt, weil sonst in dieselben Intervalle auch Punkte von $G^{(\nu)}$ fallen müssten. Nehmen wir nun auf dieselbe Weise aus den Intervallen (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \ldots$ die Punkte von $G^{(\nu-1)}$, wenn welche da sind, heraus, so haben wir in den übrig bleibenden Intervallen von endlicher Anzahl nur noch eine endliche Anzahl von Punkten von $G^{(\nu-2)}$ oder auch keinen. Führt man so fort und nimmt nach und nach aus den verschiedenen Intervallen, welche man erhält, die hinreichend kleinen Umgebungen der Punkte von $G^{(\nu)}, G^{(\nu-1)}, G^{(\nu-2)}, \ldots G', G$, welche in sie hineinfallen, und welche offenbar von endlicher Anzahl sind, heraus, so ist es klar, dass Intervalle übrig bleiben, in welchen keine Punkte der gegebenen Menge mehr enthalten sind.

Es ist indessen nicht zu übersehen, dass, wenn die Menge

---

1) In dem oben angef. Werke Seite 182; Math. Ann. Band XVI Seite 127 Note.

nicht von der nullten Art ist, die Anzahl der auf diese Art nach und nach mit ihren hinreichend kleinen Umgebungen herauszunehmenden Punkte, wenn sie auch immer endlich ist, doch mit dem Verkleinern der Umgebungen, welche man herausnimmt, unbeschränkt wächst. Es ist ferner zu beachten, dass man nach unserm Theorem auch sagen kann: Für die Mengen der ersten Gattung existiren in jedem Theilintervall des Intervalls (α, β) immer einige Intervalle, in welche keine Punkte der Menge fallen; und dieses selbe Theilintervall kann immer der Art in Intervalle getheilt werden, dass die Summe derjenigen, in welche Punkte der Menge fallen, kleiner als jede beliebige Grösse σ ist. Wenn in der That die gegebene Menge G von der ν^{ten} Art ist und zwischen a und b (a und b eingeschlossen) m Punkte von $G^{(\nu)}$ fallen und m von Null verschieden ist, so kann man die Intervalle, mit welchen diese Punkte herausgenommen werden, einzeln gleich $\frac{\sigma_\nu}{m}$, wenn σ_ν eine beliebig kleine Grösse ist, oder auch kleiner als $\frac{\sigma_\nu}{m}$ nehmen, ihre Summe wird dann σ_ν nicht übersteigen. Hat man nun diese Intervalle entfernt und fallen in die übrig gebliebenen m' Punkte von $G^{(\nu-1)}$, wobei m' von Null verschieden ist, so kann man die Intervalle, mit welchen diese Punkte herausgenommen werden, gleich oder kleiner als $\frac{\sigma_{\nu-1}}{m'}$ nehmen, so dass ihre Summe $\sigma_{\nu-1}$ und die Summe sämmtlicher herausgenommenen Intervalle $\sigma_\nu + \sigma_{\nu-1}$ nicht übersteigt. Fährt man so fort, so ist offenbar auch unter der obigen Annahme, dass in alle aufeinander folgenden Intervalle immer eine gewisse Anzahl Punkte aller Gruppen

$$G^{(\nu-2)}, \quad G^{(\nu-1)}, \ldots G',$$

bezüglich G^0 fallen (es ist dies der ungünstigste Fall), die Summe der Intervalle, die man schliesslich herausgenommen hat, nicht grösser als

$$\sigma_\nu + \sigma_{\nu-1} + \sigma_{\nu-2} + \cdots + \sigma_1 + \sigma_0.$$

Da nun ν eine endliche Zahl ist und die

$$\sigma_r, \quad \sigma_{r-1}, \quad \sigma_{r-2} \ldots \sigma_1, \quad \sigma_0$$

beliebig klein sind, so kann diese Summe immer kleiner, als eine beliebige gegebene Grösse σ, gemacht werden.

§ 14*. Diese Eigenschaft besitzen aber (§ 187*) auch gewisse Mengen zweiter Gattung, die man als discrete[1]), integrirbare[2]) oder unausgedehnte[3]) Mengen bezeichnet. Zwei Punktmengen heissen von gleicher Mächtigkeit[4]), wenn jedem Punkt der einen Menge eindeutig ein Punkt der zweiten Menge zugeordnet werden kann und umgekehrt. Die Mengen von geringster, erster, Mächtigkeit sind die abzählbaren Mengen, deren Punkte eindeutig den positiven ganzen Zahlen zugeordnet werden können. So lässt sich z. B. die Gesammtheit aller rationalen Zahlen abzählen, d. h. in eine Reihe anordnen, in der jede rationale Zahl ihre bestimmte Stelle erhält (Beweis siehe in § 109*). Es lässt sich zeigen, dass jede Menge erster Gattung abzählbar ist[5]).

Alle Mengen, die nicht von der ersten Mächtigkeit, also nicht abzählbar sind, sind von der Mächtigkeit des Continuums (0 . . . 1), d. h. ihre Individuen lassen sich eindeutig umkehrbar den sämmtlichen Zahlen zwischen 0 und 1 zuordnen[6]). Dass dies Continuum nicht abzählbar ist, wird später (§ 72, Nr. 4*) bewiesen werden.

---

1) Harnack, Math. Ann., Band XIX Seite 238 und Band XXIV Seite 218.

2) Du Bois-Reymond, Functionentheorie, S. 189.

3) Pasch, Math. Ann., Band XXX Seite 143.

4) Cantor, Journ. f. Math., Band LXXXIV Seite 242; Acta Math., Band II Seite 311.

5) Cantor, Math. Ann., Band XXI Seite 53; Acta Math., Band II Seite 375.

6) Cantor, Acta Math., Band IV Seite 381. — Bendixson, Stockholm. Vetensk. Bihang IX. — Tannery, Bull. Soc. Math. France, Band XII Seite 90. In Bezug auf die Lehre von den Punktmengen, soweit von Anwendungen auf die Functionentheorie abgesehen wird, sind noch zu erwähnen: Veltmann, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Band XXVII Seite 176 u. 313 u. Bd. XXVIII Seite 64. — Bendixson, Öfvers. Svenska Akad. Forh. 1883, S. 31. Acta. Math. Band II S. 415. — Phragmèn, Acta. Math., Band V Seite 47. — Stolz, Math. Ann., Band XXIII S. 152. — Harnack, Math. Ann., Band XXV S. 241.

Wir bemerken noch, dass diese Betrachtungen über Punktmengen auf Zahlenmengen Anwendung finden, wenn man sich statt auf Punkte auf die ihnen entsprechenden Zahlen bezieht.

---

§ 15. Wir wollen jetzt eine beliebige Menge von Werthen y betrachten, die sämmtlich endlich, d. h. zwischen zwei endlichen Zahlen α und β (α und β eingeschlossen oder nicht) enthalten sind. Mit λ sei ferner eine Zahl von der Art bezeichnet, dass keine der Zahlen der Menge grösser als λ ist und dass, für jede positive und beliebig kleine Zahl σ, zwischen $\lambda - \sigma$ und λ (λ eingeschlossen), immer eine oder mehrere Zahlen y existiren. Diese Zahl λ heisst die obere Grenze der Zahlen y, oder die obere Grenze der Menge und wenn sie eine von diesen Zahlen ist (wie es z. B. immer der Fall ist, wenn ihre Anzahl endlich ist), alsdann ist sie zugleich auch ihr Maximalwerth. Wenn sie dagegen nicht eine von diesen Zahlen ist, alsdann lassen diese Zahlen, obwohl in einem endlichen Intervall enthalten, einen Maximalwerth nicht zu und λ ist nur ihre obere Grenze.

Von welcher Beschaffenheit nun auch die gegebene Werthmenge sei, vorausgesetzt, dass sie vollständig in einem endlichen Intervall (α, β) (die Enden α und β eingeschlossen oder nicht) enthalten ist, man kann leicht beweisen, dass für sie in diesem Intervall (die Enden eingeschlossen) immer eine obere Grenze existirt (welche in gewissen Fällen gleichzeitig ihr Maximalwerth ist).

Es lassen sich in der That die Zahlen y des Intervalls (α, β) (α und β eingeschlossen) in Zahlen unterscheiden, welche der Bedingung, dass es Zahlen y gibt, die grösser sind als sie, genügen und solche, die dieser Bedingung nicht genügen. Aus den allgemeinen Entwickelungen des § 9 folgt, dass zwischen α und β (α und β eingeschlossen) immer eine bestimmte Zahl λ von der Beschaffenheit existiren muss, dass es keine Zahl y gibt, die grösser ist als irgend eine über λ gelegene Zahl, wohl aber immer solche Zahlen y (λ eingeschlossen), die grösser als eine be-

liebige, unter λ gelegene Zahl sind. Mit andern Worten, es muss immer eine bestimmte Zahl λ existiren von der Beschaffenheit, dass keine Zahl y' unserer Menge grösser als λ ist (weil es sonst Zahlen y geben würde, die grösser als eine beliebige, zwischen λ und y' gelegene Zahl sind) und von der Beschaffenheit überdies, dass, wie klein man auch die positive Zahl σ nehmen mag, doch immer eine oder mehrere Zahlen y zwischen $\lambda - \sigma$ und λ fallen. Damit ist der oben aufgestellte Satz bewiesen.

Wenn man die untere Grenze der Werthe y betrachtet, kann man auf ähnliche Art beweisen, dass, von welcher Beschaffenheit auch die gegebene Werthmenge sei, vorausgesetzt, dass sie in einem endlichen Intervall (α, β) enthalten ist, in diesem Intervall (die Enden eingeschlossen) immer eine untere Grenze dieser Werthe existirt[1]), welche in gewissen Fällen auch ihr Minimalwerth ist.

Wenn die Zahlen der Gruppe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit wachsendem Index beständig wachsen oder wenigstens nicht abnehmen und dabei absolut beständig kleiner bleiben als eine bestimmte Zahl g, so haben sie eine obere Grenze λ, derart, dass keine der Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots > \lambda$ ist, dass aber in jedem, wenn auch noch so kleinen Intervalle $(\lambda - \delta, \lambda)$ Grössen der Gruppe und zwar alle, von einer bestimmten an, gelegen sind. Somit sind die Elemente jener Gruppe convergent und die Zahl $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ ist $= \lambda$. Ebenso wenn die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ abnehmen oder wenigstens nicht zunehmen, hat ihre Reihe eine untere Grenze, die der Gruppe $(a_1, a_2, a_3 \ldots)$ gleich ist.

Wenn das Intervall, in welches die Zahlen y fallen, von unendlich grosser Ausdehnung ist, alsdann ist entweder die obere Grenze $+\infty$ oder die untere Grenze $-\infty$ oder es kann auch gleichzeitig die obere Grenze $+\infty$ und die untere Grenze $-\infty$ sein, obgleich wir nicht in eigentlichem Sinn sagen können, dass unter den gegebenen Zahlen unendlich grosse Zahlen y sind.

---

1) Satz von Weierstrass (in dessen Vorlesungen); vgl. aber auch Bolzano in dem Seite 17 angef. Werke.

§ 16. Es ist ferner zu bemerken: Wenn die Zahlen y einer Menge in unendlich grosser Anzahl vorhanden sind ohne einen Maximalwerth zu besitzen, so ist die obere Grenze derselben immer ein Grenzpunkt der Menge und deshalb der Maximalwerth der ersten abgeleiteten Werthmenge. Denn, wie klein auch die positive Zahl σ sei, zwischen $\lambda - \sigma$ und λ müssen immer Zahlen y fallen und diese sind verschieden von λ. Bezeichnet man mit y' einen dieser zwischen $\lambda - \sigma$ und λ liegenden Werthe von y und mit σ' eine positive Zahl, die kleiner ist als $\lambda - y'$, so muss auch zwischen $\lambda - \sigma'$ und λ eine andere Zahl y'' existiren und wenn nun σ'' eine positive Zahl ist, die kleiner ist, als $\lambda - y''$, so wird auch zwischen $\lambda - \sigma''$ und λ eine Zahl y''' fallen. Indem man so fortfährt, sieht man klar ein, dass zwischen λ und $\lambda - \sigma$, die positive Zahl σ sei so klein sie wolle, immer unendlich viele Zahlen y fallen und dass deshalb λ ein Grenzpunkt der in Betracht gezogenen Menge ist.

Dasselbe gilt für die untere Grenze der Werthmenge, wenn sie keinen Minimalwerth besitzt.

Drittes Kapitel.

Begriff des Grenzwerthes. Das unendlich Kleine und das unendlich Grosse.

§ 17. Der Begriff von Grenzwerthen ist einer der grundlegendsten in der ganzen Mathematik. Wir begegnen ihm in der Geometrie, der Arithmetik, in der Differential- und Integralrechnung, in der Analysis, sowie in allen Anwendungen dieser Disciplinen. Nachdem wir über die Irrationalzahlen und die Werthmengen gehandelt haben, mag also hier der Ort sein, um auch über diesen Begriff Einiges zu sagen, und ihn mit Genauigkeit und Strenge festzustellen.

Es sei also eine reelle Grösse y gegeben, die für alle Werthe einer anderen Grösse x, die in Betracht gezogen werden, höchstens einen einzigen Werth $x = a$ ausgeschlossen, immer

einen bestimmten und endlichen Werth hat (das heisst, ihr absoluter Werth kann nicht über eine gewisse gegebene Zahl hinausgehen). Diese Werthe von x, die in Betracht gezogen werden, mögen eine Reihe von continuirlichen Grössen oder eine Reihe von discontinuirlichen Grössen bilden, in beiden Fällen aber eine unendliche Werthmenge zusammensetzen, von welcher a ein Grenzpunkt ist. Wenn alsdann eine endliche und bestimmte Grösse A existirt von der Eigenschaft, dass die Differenz $A - y$ schliesslich ihrem absoluten Werth nach kleiner als die beliebig klein gewählte positive Zahl σ wird und beständig kleiner bleibt, wenn man sich mit fallenden oder steigenden Werthen von x ohne Ende der Grösse a, die wir jetzt als endlich annehmen wollen, nähert, ohne dass x jemals $= a$ wird, so sagt man, dass A die Grenze der Werthe ist, die y annimmt, wenn sich x mit fallenden oder steigenden Werthen immer mehr der Grösse a nähert; oder auch, dass A die Grenze der Werthe ist, die y annimmt, wenn man sich der Grösse a ohne Ende von der rechten oder linken Seite von a nähert, indem man damit meint, dass man sich die Werthe von x, wie gewöhnlich, auf einer geraden Linie dargestellt denken soll. Man sagt auch, dass A die Grenze der Werthe ist, die y rechts und links von a annimmt oder auch einfacher, dass A die Grenze von y ist für $x = a$ rechts oder links oder auch für $x = a + 0$ bezüglich $x = a - 0$ [1]), wenn man nach Gefallen eine von Null verschiedene aber beliebig kleine und positive Zahl σ nimmt und alsdann eine im ersten Fall positive, im zweiten negative Zahl ε finden kann, der Art, dass für alle Werthe von x, die als zwischen a und $a + \varepsilon$ (a ausgeschlossen) liegend angesehen werden können, die Differenz $A - y$ numerisch immer kleiner als σ ist.

Wenn nun bei der Annäherung ohne Ende der x an die Grösse a von rechts oder von links, y unendlich grosse Werthe annimmt (das heisst numerisch grösser wird, als irgend eine gegebene Zahl) oder wenn diese Werthe schliesslich ihrem

1) Diese Symbole $a + 0$ und $a - 0$ werden häufig gebraucht, um die Punkte rechts resp. links von a (a ausgeschlossen) und a so nahe, als man will, zu bezeichnen. Auch wir werden sie in diesem Sinn gebrauchen.

absoluten Werth nach so gross werden, wie man nur will und wenn man dann für jede positive und beliebig grosse Zahl ω eine von Null verschiedene Zahl ε finden kann (positiv, wenn die in Betracht gezogenen Werthe von x rechts von a, negativ, wenn sie zur Linken sind), welche der Art ist, dass für alle Werthe von x zwischen a und $a+\varepsilon$ (a ausgeschlossen) y sich immer seinem absoluten Werth nach grösser als ω hält, so sagt man: Wenn sich x ohne Ende von rechts oder links a nähert, so haben die Werthe von y zur Grenze $\pm\infty$; oder einfacher: y hat für $x=a$ rechts oder links $\pm\infty$ zur Grenze. Es bleibt dabei nur das Vorzeichen unbestimmt; wenn aber y zwischen a und $a+\varepsilon$ (a ausgeschlossen) immer dasselbe Vorzeichen hat, dann ist auch das Vorzeichen der Grenze bestimmt und diese Grenze ist dann je nachdem entweder $+\infty$ oder $-\infty$.

Wenn schliesslich die Variabele x ins Unendliche wachsen kann z. B. für positive Werthe und nach bestimmten Gesetzen (wie z. B. für ganze Zahlen) und wenn alsdann eine endliche und bestimmte Zahl A von der Eigenschaft existirt, dass man immer eine ihr entsprechende positive Zahl x' finden kann, die so gross ist, dass für jeden der möglichen Werthe von x, der grösser als x' ist, die entsprechende Differenz $A-y$ numerisch immer kleiner als eine nach Gefallen angenommene, von Null verschiedene, aber beliebig kleine, positive Zahl σ ist, so sagt man: A ist die Grenze der Werthe, die y annimmt, wenn x für positive Werthe ins Unendliche wächst oder es ist die Grenze der y für $x=+\infty$. Man sagt endlich: y hat Unendlich (positiv oder negativ) zur Grenze für $x=\pm\infty$, z. B. für $x=+\infty$, wenn für jede willkürlich grosse und positive Zahl ω eine positive Zahl x' existirt der Art, dass für jeden Werth von x grösser als x', den man in Betracht ziehen kann, y seinem absoluten Werth nach immer grösser ist als ω. So haben von den folgenden Functionen:

$$(x-a)\sin\frac{1}{x-a}, \quad \frac{1}{(x-a)\sin\frac{1}{x-a}}, \quad \frac{1}{x-a}, \quad \frac{\sin x}{x},$$

$$x+\sin\frac{1}{x}, \quad e^{\frac{1}{x}}, \quad \frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}},$$

die erste Null zur Grenze für $x = a$ rechts und links von a; die zweite $\pm\infty$ zur Grenze für $x = a$ rechts oder links; die dritte $+\infty$ für $x = a$ rechts und $-\infty$ für $x = a$ links; die vierte Null zur Grenze für $x = +\infty$ und die fünfte $+\infty$ für $x = +\infty$ und $-\infty$ für $x = -\infty$; die sechste hat für $x = 0$ rechts die Grenze $+\infty$ und links die Grenze Null und die siebente rechts die Grenze 0, links die Grenze 1. Diese Grenzwerthe sind ganz unabhängig von den in Betracht gezogenen Werthen von x.

---

§ 18. Es kann nun weiter vorkommen, dass, wenn sich x ohne Ende a von rechts oder links nähert oder wenn x mit seinen positiven oder negativen Werthen ins Unendliche wächst, y in seinem Verhalten sich unter keinen der obigen Fälle bringen lässt. Dann hat y keine bestimmte Grenze für $x = a$ rechts resp. links oder für $x = \pm\infty$. Wenn so z. B. y immer endlich ist, so wird es keine bestimmte Grenze für $x = a$ z. B. rechts haben, wenn eine Zahl A nicht existirt, welche die Eigenschaft hat, dass für jeden beliebig kleinen positiven Werth von σ ein entsprechendes (positives) ε existirt der Art, dass die Differenz $A - y$ für Werthe von x zwischen a und $a + \varepsilon$ numerisch immer kleiner als σ ist. Oder mit andern Worten: y hat keine bestimmte Grenze für $x = a$ rechts oder links, wenn es, was für einen Werth man auch der Grösse A zulegen mag, immer Werthe von σ giebt, für welche es nicht möglich ist, einen Werth der Grösse ε zu finden, der die Eigenschaft hat, dass für alle in Betracht kommenden Werthe von x zwischen a und $a + \varepsilon$ die Differenz $A - y$ numerisch immer kleiner als σ ist.

Aehnlich hat y auch dann keine bestimmte Grenze für $x = a$ rechts oder links, wenn bei der Annäherung ohne Ende der x an a es zwar numerisch beliebig grosse Werthe annimmt, aber dasselbe y für Werthe von ω, die über eine gegebene Grenze hinausgehen und für Werthe von x zwischen a und $a + \varepsilon$, wenn man unter ε eine noch so kleine Zahl versteht, seinem absoluten Werth nach bald grösser bald kleiner als ω ist.

Gleiches gilt für die Bedingungen, unter denen für $x = \pm \infty$ die Grenze von y unbestimmt wird.

So haben insbesondere die Grössen

$$y = \sin \frac{1}{x-a}, \quad y = 1 + \frac{1}{x-a} \sin \frac{1}{x-a}$$

für $x = a$ rechts oder links, und die Grössen

$$y = \sin x, \quad y = x \sin x$$

für $x = \pm \infty$ keine bestimmten Grenzen, wenn man für x alle möglichen Werthe zulässt. Schränkt man aber x ein auf die Zahlen der Reihe

$$a - \frac{2}{\pi}, \quad a - \frac{2}{5\pi}, \quad a - \frac{2}{9\pi}, \cdots a - \frac{2}{(4n+1)\pi} \cdots$$

bezw. die Zahlen der Reihe $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \cdots$, so ist der Grenzwerth der ersten Function -1, der der zweiten $+\infty$, der der dritten 1, und der der vierten $+\infty$. Die Zahlenreihe $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \cdots$ dagegen hätte bei den beiden letzten Functionen die Grenzwerthe -1 und $-\infty$ geliefert.

Diese Beispiele zeigen weiter, dass in gewissen Fällen auch die Werthe von x, die in Betracht gezogen werden, für den Grenzwerth nicht gleichgiltig sind.

Wenn, ohne besonderen Zusatz, gesagt wird y nähere sich einer bestimmten Grenze oder habe keinen Grenzwerth, wenn x sich von links oder rechts her dem a nähert, so soll darunter verstanden werden, dass alle Werthe von x zwischen $a - \varepsilon$ und a bezw. a und $a + \varepsilon$, mit Ausschluss von a selbst, in Betracht gezogen werden sollen. Aehnliche Bestimmungen gelten, wenn x ins Unendliche wächst.

---

§ 19. Die letzten Betrachtungen lassen sich auch auf den Fall ausdehnen, dass y durch mehrere Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ bestimmt wird. Wenn, ähnlich wie früher, $a_1, a_2, \ldots a_n$ endliche Grössen sind und wenn eine endliche und bestimmte Grösse A existirt, welche die Eigenschaft besitzt, dass man zu jeder von Null verschiedenen beliebig kleinen und positiven Zahl σ immer von Null verschiedene Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$

finden kann, der Art, dass für Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche in Betracht gezogen werden können und die zwischen a_1 und $a_1 + \varepsilon_1$, a_2 und $a_2 + \varepsilon_2, \ldots a_n$ und $a_n + \varepsilon_n$ bezüglich liegen (das System $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots x_n = a_n$ ausgeschlossen), die Differenz $A - y$ numerisch immer kleiner als σ ist, so wird A die Grenze der Werthe genannt, die y annimmt, wenn $x_1, x_2, \ldots x_n$ sich ohne Ende mit wachsenden bezüglich abnehmenden Werthen, je nachdem die entsprechenden $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ positiv oder negativ sind, den $a_1, a_2, \ldots a_n$ nähern.

Aehnliche Betrachtungen, wie oben bei der Behandlung einer einzigen Variabeln, könnte man auch jetzt anstellen, wenn die Grenzwerthe unendlich gross oder unbestimmt sind oder wenn alle oder einzelne der Werthe $a_1, a_2, \ldots a_n$ der Variabeln unendlich gross sind[1]).

---

§ 20. Wir wollen nun eingehender den Fall besprechen, in welchem y von einer einzigen Variabeln x abhängt. Aus der Definition des Grenzwerthes, die wir gegeben haben, geht hervor, dass die Werthe von y auf den beiden Seiten (nach rechts und nach links) der endlichen Zahl a verschiedene Grenzen haben können. Es würde deshalb nicht genau sein, wenn wir einfach sagen wollten, dass y für $x = a$ A zur Grenze habe, es sei denn, dass die Werthe von y auf beiden Seiten von a dieselbe Grenze hätten oder dass die Einschränkung, unter welche die Veränderlichkeit von x gestellt ist, es unbestimmt liesse, von welcher Seite sich x dem a nähern soll. Wenn wir also die obige Ausdrucksweise gebrauchen, so soll das heissen, dass wir uns in einem dieser Fälle befinden oder dass es für unser Studium werthlos ist, sich mit dem Sinn zu befassen, in welchem sich x dem a nähert.

Sodann verdient das Folgende hervorgehoben zu werden. Wenn man auch den Werth y_a von y für $x = a$ kennt oder wirklich berechnen kann, so darf man doch nie diesen speciellen Werth von y für $x = a$ mit der Grenze der Werthe,

1) du Bois-Reymond, Journ. f. Math. Bd. 70 Seite 10. — Stolz, Math. Ann. Bd. 26 Seite 83.

die y auf der einen oder der andern Seite von a annimmt, verwechseln. Aus der Definition der Grenzwerthe geht in der That klar hervor, dass die Begriffe, die mit diesen Grössen verbunden sind, sehr verschieden sind, da die Grenze von y nur von den Werthen abhängt, die y in den Punkten $a+0$ oder $a-0$ ausserhalb des Grenzpunkts a annimmt und durchaus nicht von dem speciellen Werth, den y in diesem Punkt hat. Während in gewissen Fällen diese beiden Grössen existiren und sich gleich sein können, kann in andern Fällen der Grenzwerth von y rechts oder links von a existiren, während der Werth y_a nicht existirt oder keinen bestimmten Sinn hat, oder es kann auch dieser Werth y_a von y existieren und der Grenzwerth nicht, oder es können beide existiren und verschieden sein.

Beispiel 1. Wenn die Werthe von y diejenigen von $\frac{\sin(x-a)}{x-a}$ sind, so hat der Werth y_a von y für $x=a$ keinen bestimmten Sinn, während der Grenzwerth für $x=a$ rechts oder links von a die Einheit ist. Wenn dagegen die Werthe von y diejenigen des ersten Differentialquotienten der Function sind, welche für alle von a verschiedene x gleich $(x-a)^2 \sin\frac{1}{x-a}$ und für $x=a$ gleich Null ist, so ist für von a verschiedene x

$$y = 2(x-a)\sin\frac{1}{x-a} - \cos\frac{1}{x-a},$$

für $x=a$ dagegen

$$y_a = \lim_{h=0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{h} = 0.$$

Der Werth y_a von y für $x=a$ ist daher bestimmt und gleich Null, während der Grenzwerth der Werthe, die y annimmt, wenn man sich ohne Ende links- oder rechtsseitig der Grösse a nähert, unbestimmt ist.

Beispiel 2. Wenn die Werthe von y durch die Reihe

$$\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots$$

bestimmt werden, dann ist der $x=\pi$ entsprechende Werth y_π

gleich Null, während der Grenzwerth der Werthe von y rechtsseitig von π, wie wir in der Folge sehen werden, $-\frac{1}{2}\pi$ und derjenige linksseitig von π $\frac{1}{2}\pi$ ist.

Dasselbe gilt von den Grenzwerthen für $x = \infty$.

Wir werden, wie wir noch bemerken wollen, wenigstens im Allgemeinen nur dann den Ausdruck „Grenzwerth von y für $x = a$" gebrauchen, wenn der Werth y_a unbestimmt, oder wenn er bekannt aber verschieden von dem Grenzwerth ist oder man ihn nicht gleichzeitig mit den andern Werthen in Betracht ziehen will oder ihn nicht durch dasselbe Verfahren erhalten kann, durch welches die übrigen Werthe von y rechts oder links von a bestimmt werden. Im Allgemeinen, wenn man von Grenze spricht, ist damit der Gedanke verbunden, dass der Grenzwerth selbst nicht erreicht werden kann.

---

§ 21. Wir erinnern daran, dass betreffs unserer Grenzwerthe die bekannten Theoreme über die Grenzwerthe von Summen, Producten etc. gelten, falls die Glieder oder Factoren, welche diese Summen oder Producte zusammensetzen, von endlicher Anzahl sind und bestimmte und endliche Grenzwerthe haben. Wir machen ausdrücklich darauf aufmerksam, dass diese Theoreme über die Grenzwerthe von Summen oder Producten mehrerer Grössen sich streng genommen (es sei denn man mache gewisse Einschränkungen) nicht auf den Fall anwenden lassen, in welchem die Anzahl der Glieder der Summe oder der Factoren des Products unendlich gross ist (das heisst, grösser als eine beliebige angebbare Grösse angenommen werden kann) oder ohne Ende wächst, wenn x sich a nähert oder wenn x ins Unendliche wächst. Dass sie vielmehr in vielen Fällen ungiltig sind, zeigt das obige Beispiel

$$\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots.$$

Während hier der Grenzwerth der Summe für $x = \pi$ rechts von π $-\frac{1}{2}\pi$ und links $\frac{1}{2}\pi$ ist, ist die Summe der Grenzwerthe der verschiedenen Glieder gleich Null.

---

§ 22. Die eben erwähnten Theoreme erleichtern in vielen Fällen die Auffindung der Grenzwerthe, in vielen andern Fällen aber bleibt dieses Geschäft noch sehr schwierig. Oft jedoch ist es nicht nöthig, die Rechnung in Wirklichkeit auszuführen und genügt es, nur die Existenz eines endlichen und bestimmten Grenzwerthes A für die in Betracht gezogene Grösse y zu constatiren. Solche Existenzbeweise fussen auf dem einen oder andern der beiden Sätze, die wir jetzt besprechen wollen.

Der erste der beiden Sätze dient für den Fall, dass der Werth von x, für welchen der Grenzwerth von y gesucht wird, endlich ist und lautet so: Damit die Werthe von y rechts oder links von einer endlichen Zahl a (zum Beispiel rechts) einen bestimmten und endlichen Grenzwerth haben, dazu ist es nöthig und ausreichend, dass für jede beliebig kleine und positive Zahl σ eine positive Zahl ε existire der Art, dass die Differenz $y_{a+\varepsilon} - y_{a+\delta}$ zwischen dem Werthe $y_{a+\varepsilon}$ von y für $x = a + \varepsilon$ und dem Werthe $y_{a+\delta}$, der dem Werthe $a + \delta$ von x entspreche, numerisch kleiner als σ sei, für jedes δ das > 0 und $< \varepsilon$ ist.

Die behauptete Bedingung ist nöthig. Denn, wenn ein bestimmter und endlicher Grenzwerth A der Werthe von y rechts von a existirt, so muss für jeden Werth von σ eine Zahl ε existiren, für welche $| A - y_{a+\varepsilon} | < \frac{\sigma}{2}$, $| A - y_{a+\delta} | < \frac{\sigma}{2}$ und daher auch $| y_{a+\varepsilon} - y_{a+\delta} | < \sigma$ ist für alle Werthe von δ, Null ausgeschlossen, die kleiner sind als ε.

Die Bedingung ist aber auch ausreichend. Wenn sie erfüllt ist und wenn ε_1 ein dem Werth σ_1 der σ entsprechender Werth von ε ist und man unter α_1 einen beliebigen, einem Werth von x zwischen a und $a + \varepsilon$ (a ausgeschlossen) entsprechenden Werth von y versteht, so kann man zwei Zahlen $\alpha_1 - 2\sigma_1$ und $\alpha_1 + 2\sigma_1$ bilden, welche alle Werthe einschliessen, die y annimmt, wenn x von a bis $a + \varepsilon_1$ (a ausgeschlossen) variirt. Statt ihrer kann man auch die Zahlen $\alpha_1 - 4\sigma_1$ und $\alpha_1 + 4\sigma_1$ nehmen. Nimmt man alsdann eine zweite Zahl σ_2 kleiner als $\frac{\sigma_1}{2}$ und findet das entsprechende $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, so lassen

sich zwei neue Zahlen $\alpha_2 - 2\sigma_2$ und $\alpha_2 + 2\sigma_2$ bilden, welche die Werthe einschliessen, welche y annimmt, wenn x von a bis $a + \varepsilon_2$ variirt. Sie liegen offenbar zwischen $\alpha_1 - 3\sigma_1$ und $\alpha_1 + 3\sigma_1$ und an ihrer Stelle können wir auch die Zahlen $\alpha_2 - 4\sigma_2$ und $\alpha_2 + 4\sigma_2$ nehmen, von welchen wenigstens eine von den vorigen $\alpha_1 - 4\sigma_1$ und $\alpha_1 + 4\sigma_1$ verschieden ist, während sie doch beide zusammen zwischen diesen letzteren enthalten sind. Fährt man so fort, so kommt man schliesslich zur Bildung zweier Zahlenreihen

$$A_1' = (\alpha_1 - 4\sigma_1, \quad \alpha_2 - 4\sigma_2, \quad \alpha_3 - 4\sigma_3 \ldots),$$

$$A_2' = (\alpha_1 + 4\sigma_1, \quad \alpha_2 + 4\sigma_2, \quad \alpha_3 + 4\sigma_3 \ldots),$$

die beide eine und dieselbe Zahl A bestimmen, welche, wie man ohne Weiteres einsieht, die Grenze der Werthe von y rechtsseitig von a ist. Daraus folgt also, dass die in dem oben gegebenen Satz enthaltene Bedingung für die Existenz der Grenze auch ausreichend ist. Mit Hülfe desselben Verfahrens, das hier eingeschlagen worden ist, um die Existenz zu beweisen, kann man auch diesen Grenzwerth selbst in Wirklichkeit berechnen.

---

§ 23. In durchaus ähnlicher Weise wird der zweite Satz, von dem wir oben gesprochen, bewiesen. Er wird in dem Fall angewendet, in welchem der Grenzwerth der y für unendlich grosse Werthe der Variablen x gesucht wird und lautet: Damit die Werthe von y für unendlich grosse, positive oder negative, zum Beispiel positive, Werthe von x einen endlichen und bestimmten Grenzwerth haben, dazu ist es nöthig und ausreichend, dass für jede positive und beliebig kleine Zahl σ eine positive Zahl x' existire, die so gross ist, dass für jeden beliebigen positiven Werth von x, der grösser als x' ist, $y_{x'} - y_x$ immer seinem absoluten Werth nach kleiner als σ sei.

Man kann in der Formulirung dieser beiden Sätze eine kleine Aenderung eintreten lassen, indem man in dem ersten $y_{a+\varepsilon} - y_{a+\delta}$ durch die Differenz $y_{a+\delta'} - y_{a+\delta}$ zwischen den beiden Werthen $y_{a+\delta}$ und $y_{a+\delta'}$ der y ersetzt, die den beiden

beliebigen, zwischen a und $a+\varepsilon$ (a ausgeschlossen) enthaltenen Werthe $a+\delta$ und $a+\delta'$ der x entsprechen, und in dem zweiten Satz $y_{x'}-y_x$ durch die Differenz $y_{x_1}-y_x$ zwischen zwei Werthen von y ersetzt, welche zwei beliebigen Werthen x und x_1 von x entsprechen, die nicht kleiner sind als x'.

---

§ 24. Wir nehmen nunmehr an, dass die Werthe von y, wie sie sich zur Rechten oder Linken von a oder für ein unbegrenzt wachsendes x ergeben, zwar immer endlich ausfallen, aber keinen bestimmten Grenzwerth haben. Alsdann müssen gewisse Werthe von σ vorhanden sein, zu welchen die entsprechenden Zahlen ε oder x' den beiden vorstehenden Sätzen gemäss nicht gefunden werden können. Wenn wir daher zum Beispiel den ersten Fall voraussetzen, mit σ eine solche positive und hinreichend kleine Zahl bezeichnen und mit $(a, a+\varepsilon)$ ein beliebiges Intervall rechts oder links von a (a ausgeschlossen), so muss in diesem Intervall ein Punkt $a+\delta$ vorhanden sein, für welchen der numerische Werth von

$$y_{a+\varepsilon}-y_{a+\delta}>\sigma$$

ist. Ferner muss auch in dem Intervall $(a, a+\delta)$ (a ausgeschlossen) ein Punkt $a+\delta'$ vorhanden sein, für welchen numerisch $y_{a+\delta}-y_{a+\delta'}\geqq\sigma$ und auch im Intervall $(a, a+\delta')$ gibt es einen Punkt $a+\delta''$, für welchen ebenfalls numerisch $y_{a+\delta'}-y_{a+\delta''}\geqq\sigma$ ist und so weiter ins Unendliche. Da nun y in dem ganzen ersten Intervall $(a, a+\varepsilon)$ und ebenso in den andern, folgenden endlich bleibt, so könnnen die sich folgenden Differenzen

$$y_{a+\varepsilon}-y_{a+\delta}, \quad y_{a+\delta}-y_{a+\delta'}, \quad y_{a+\delta'}-y_{a+\delta''}\cdots$$

unmöglich immer dasselbe Vorzeichen haben. Weil sich auch in dem zweiten Fall, in welchem x ins Unendliche wächst, ähnliche Betrachtungen anstellen lassen, so lässt sich nunmehr offenbar der Schluss ziehen: Wenn, während x entweder, gleichviel ob von der Rechten oder von der Linken, unbegrenzt sich dem Werth a nähert oder aber unbegrenzt wächst, die zugehörigen Werthe von y ausnahmslos endlich bleiben, jedoch keinen be-

stimmten Grenzwerth haben, so müssen diese Werthe beständig hin- und herschwanken und immer müssen wenigstens einige dieser Schwankungen zwischen Grenzen stattfinden, die um mehr als eine bestimmte von Null verschiedene Grösse von einander entfernt sind. Als Beispiel dazu dient für den ersten Fall die Function $\sin \frac{1}{x-a}$ und für den zweiten $\sin x$.

Nach den Bemerkungen des § 18 werden Schwankungen in den Werthen von y auch dann eintreten, wenn, während x entweder, gleichviel ob von der Rechten oder von der Linken, unbegrenzt sich dem Werth a nähert oder unbegrenzt wächst, die zugehörigen y schliesslich Werthe annehmen, die über jede beliebige gegebene Grösse hinausgehen, ohne dass man sagen könnte, sie hätten Unendlich zum Grenzwerth. Die Grenzen, zwischen welchen alsdann die Schwankungen stattfinden, sind schliesslich um mehr als irgend eine beliebige gegebene Grösse von einander entfernt oder, wie man sagt, die Oscillationen haben schliesslich eine Amplitude, die grösser ist als irgend eine gegebene Zahl.

Uebrigens ist zu bemerken, dass die Möglichkeit von Schwankungen in den Werthen von y auch dann vorhanden ist, wenn die Grenze dieser Werthe für $x = a$ von der Rechten oder Linken oder für $x = \infty$ eine endliche und bestimmte Grösse A ist. Denn aus der Definition des Grenzbegriffs folgt nicht nothwendiger Weise, dass von einem bestimmten Werth von δ oder von x ab die Differenz $y_{a+\delta} - A$ oder die andere $y_x - A$, wenn δ ins Unendliche abnimmt oder x immer mehr wächst, immer dasselbe Vorzeichen behält oder aber ihrem absoluten Werth nach beständig abnimmt. Nur finden in diesem Fall die Schwankungen natürlich schliesslich innerhalb von Grenzen statt, die näher aneinander liegen, als jede gegebene Grösse oder, wie man sagt, die Oscillationen haben schliesslich eine Amplitude, die kleiner als jede beliebige gegebene Zahl ist. Deshalb ist jedoch nicht nöthig, dass diese ins Unendliche abnehmende Amplitude auch constant abnimmt.

Ebenso können auch Schwankungen eintreten, wenn y dem Grenzwerth ∞ zustrebt[1]).

---

§ 25. Die vorstehenden Betrachtungen liefern sofort den Beweis des Satzes: Wenn bei der Annäherung von x von rechts oder links an eine endliche Grösse a oder bei dem Wachsen von x in positivem oder negativem Sinn ins Unendliche, zum Beispiel in positivem Sinn, eine andere Grösse y entweder nie wächst oder nie abnimmt, zudem in beiden Fällen ihrem absoluten Werth nach immer kleiner als eine bestimmte endliche Zahl bleibt, so muss y für $x = a$ rechts oder links oder für $x = \infty$ einen bestimmten und endlichen Grenzwerth haben. Denn, da die Werthe von y beständig endlich sind und bei der Annäherung von x ohne Ende an a von rechts oder links oder bei dem Wachsen von x ins Unendliche keinen Schwankungen unterworfen sind, so müssen sie nach den Bemerkungen des vorigen Paragraphen einem endlichen und bestimmten Grenzwerth zustreben.

Derselbe Satz folgt auch unmittelbar aus den in § 15 angestellten allgemeinen Betrachtungen über die oberen und unteren Grenzen von Werthmengen. Denn man überzeugt sich leicht, dass die untere bezüglich obere Grenze der Werthmengen, welche aus den Werthen von y in dem Fall, in welchem diese Werthe nicht wachsen und in demjenigen, in welchem sie nicht abnehmen, gebildet werden, durchaus auch die Grenze der Werthe von y ist.

Aus unserem Satz geht auch hervor, dass, wenn bei der Annäherung von x an eine Grösse a von rechts oder links oder beim Wachsen von x ins Unendliche, eine Grösse y zuletzt nicht mehr wächst oder nicht mehr abnimmt, diese immer einen endlichen oder unendlich grossen Grenzwerth hat.

---

1) Vgl. du Bois-Reymond, Antrittsprogramm und Seite 266 ff. des Seite 35 a. Werkes. — Pasch, Math. Ann. Bd. 30 Seite 132.

§ 26. Wir dürfen unsern Gegenstand nicht verlassen, ohne noch einige Definitionen und allgemeine Bemerkungen hinzuzufügen.

Wenn, wie bisher, x von rechts oder links a zustrebt, oder ins Unendliche wächst oder auch kürzer: für $x=a$ rechts oder links oder $x=\pm\infty$ wird eine Grösse y unendlich klein, wenn der Grenzwerth von y für $x=a$ rechts oder links oder für $x=\pm\infty$ gleich Null ist. Dagegen wird für $x=a$ rechts oder links oder für $x=\pm\infty$ eine Grösse y unendlich gross, wenn bei der unbegrenzten Annäherung von x an a von rechts oder links oder bei dem Wachsen von x ins Unendliche, y zuletzt beliebig grosse Werthe annimmt und zum Grenzwerth $\pm\infty$ hat. Ausnahmsweise sagt man auch, dass für $x=a$ rechts oder links oder für $x=\pm\infty$ y unendlich gross wird, wenn es zwar bei dieser Veränderung des x numerisch Werthe annimmt, die grösser als irgend eine gegebene Grösse sind, jedoch keinen eigentlichen Grenzwerth besitzt (§ 18). Beim Gebrauch dieser Ausdrucksweisen machen wir ausdrücklich darauf aufmerksam (vgl. § 20), dass es etwas ganz Anderes ist, wenn man in absoluter Weise sagt: eine Grösse y ist Null oder unendlich gross für $x=a$ oder für $x=\pm\infty$, in welchem Fall dies a oder $\pm\infty$ nicht als Grenzwerth, sondern als ein specieller Werth von x betrachtet wird, als wenn man sagt: y wird unendlich klein oder unendlich gross für $x=a$ rechts oder links (oder einfach für $x=a$, wenn der Sinn gleichgültig ist) oder für $x=\pm\infty$, in welchem Fall das a und $\pm\infty$ als Grenzwerth der immer wachsenden resp. abnehmenden x betrachtet wird. Denn in diesem letzteren Fall handelt es sich nicht um einen speciellen Werth von y für einen besondern Werth von x, sondern um den Grenzwerth oder auch die obere oder untere Grenze einer Reihe von Werthen von y. Man darf überhaupt nicht vergessen, dass der Begriff des Unendlichkleinen von demjenigen des Grenzwerths durchaus nicht getrennt werden kann. Wenn man sagt, dass für $x=a$ eine Grösse y unendlich klein ist oder wird, so ist dabei durchaus nicht von einem bestimmten Werth von y die Rede, sondern von einer Grösse, deren Werth sich verkleinert, bis er schliesslich kleiner wird und dann be-

ständig kleiner bleibt, als jede beliebige angebbare Grösse, der Art, dass seine Grenze für $x = 0$ Null ist. Während so zum Beispiel die algebraische Summe auch einer unendlich grossen Anzahl von Grössen, die sämmtlich gleich Null sind, absolut stets gleich Null ist, braucht die algebraische Summe einer unendlich grossen Anzahl von unendlich kleinen Grössen durchaus nicht Null oder unendlich klein zu sein; sie kann im Gegentheil als Grenzwerth auch die Unendlichkeit haben oder unbestimmt sein. Denn, wie schon bemerkt, der Grenzwerth der Summe einer unendlich grossen Anzahl von Grössen braucht nicht der Summe ihrer Grenzwerthe gleich zu sein.

---

§ 27. Haben wir nun zwei Grössen y und y_1, welche für $x = a$ rechts oder links oder für $x = \pm\infty$ gleichzeitig unendlich klein oder unendlich gross werden und nehmen wir an, dass, wenn x von a verschieden aber hinreichend nahe an a oder wenn x hinreichend gross ist, wenigstens die zweite von ihnen niemals den Werth Null oder den Werth Unendlichgross annimmt. Alsdann hat der Quotient $\frac{y}{y_1}$ eine bestimmte Bedeutung und er kann für $x = a$ rechts oder links oder für $x = \pm\infty$ zum Grenzwerth entweder 1) Null oder 2) eine endliche, bestimmte Grösse oder 3) $\pm\infty$ haben oder er hat 4) überhaupt keinen bestimmten Grenzwerth. Im ersteren Fall nennen wir y (für $x = a$ rechts oder links oder für $x = \pm\infty$) unendlich klein oder unendlich gross von höherer bezüglich niedrigerer Ordnung als y_1, im zweiten sagen wir, dass y und y_1, während sie unendlich klein oder unendlich gross werden, von derselben Ordnung sind und im dritten, dass y, während es unendlich klein oder unendlich gross wird, von niedrigerer oder höherer Ordnung als y_1 ist. Im vierten Fall endlich sagen wir, dass y und y_1 (für $x = a$ rechts oder links oder für $x = \pm\infty$), während sie unendlich klein oder unendlich gross werden, von derselben Ordnung sind, wenn der Quotient $\frac{y}{y_1}$, ohne einen bestimmten Grenzwerth zu haben, immer seinem absoluten Werth nach grösser als eine bestimmte von Null verschiedene und positive Zahl

und kleiner als eine bestimmte ebenfalls positive und endliche Zahl bleibt. Wenn ferner der Quotient $\frac{y}{y_1}$ sich zwar Null nähern kann, so viel er will, auch durch Null durchgehen kann, dagegen seinem absoluten Werth nach immer kleiner bleibt als eine gewisse positive Zahl, so können wir nur sagen, dass y, während es für die oft genannten Werthe von x unendlich klein oder unendlich gross wird, von nicht niedrigerer bezüglich nicht höherer Ordnung als y_1 ist. Wenn der Quotient $\frac{y}{y_1}$ sich zwar seinem absoluten Werth nach der Null nicht um mehr als eine gewisse Grösse nähern kann, dagegen Werthe annehmen kann, die numerisch grösser als jede gegebene Zahl sind, so können wir nur sagen, dass y für die bekannten Werthe von x unendlich klein oder unendlich gross wird von nicht höherer bezüglich nicht niedrigerer Ordnung als y_1. Kann schliesslich der Quotient $\frac{y}{y_1}$ sich der Null beliebig nähern oder durch Null durchgehen und gleichzeitig Werthe annehmen, die numerisch grösser sind als eine beliebige gegebene Zahl, so können wir die Ordnungen des Unendlichkleinen und Unendlichgrossen von y und y_1 nicht, wie in den übrigen Fällen, miteinander vergleichen.

---

§ 28. Wenn ferner die Grössen

$$y_1 = (x - a)^m \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{1}{x^m},$$

worin m positiv ist, als unendlich klein von der m^{ten} Ordnung für $x = a$ oder für $x = \pm \infty$ und die Grössen:

$$y_1 = \frac{1}{(x-a)^m}, \quad y_1 = x^m,$$

worin m ebenfalls positiv ist, als unendlich gross von der m^{ten} Ordnung für $x = a$ oder für $x = \pm \infty$ betrachtet werden, können wir sagen: Für $x = a$ rechts oder links oder für $x = \pm \infty$ ist y unendlich klein oder unendlich gross von der m^{ten} Ordnung, wenn die Grössen

$$\frac{y}{(x-a)^m}, \quad x^m y$$

bezüglich die anderen

$$(x-a)^m y, \quad \frac{y}{x^m}$$

bei der unbegrenzten Annäherung der x an a von rechts oder von links oder bei dem Wachsen von x ins Unendliche in positivem oder in negativem Sinn entweder bestimmten und endlichen, von Null verschiedenen Grenzwerthen zustreben oder zwischen endlichen Zahlen hin- und herschwanken, indem sie sich jedoch stets von Null um mehr als eine gewisse bestimmte Zahl entfernt halten.

Nach Einführung dieser Benennungen sieht man ein, dass es auch Grössen y geben kann, die unendlich klein oder unendlich gross von bestimmten positiven rationalen (ganzen oder gebrochenen) oder irrationalen Ordnungen werden können. Ueberdies bemerkt man, dass die Grössen $1(x-a)$, $1^2(x-a)$, $1^3(x-a)$ [1]) und ebenso die Potenzen und Producte dieser Grössen wenigstens so weit sie reell sind, für $x=a$ unendlich gross werden, aber die Ordnung ihres Unendlichgrosswerdens ist nicht bestimmt und muss für kleiner als irgend eine gegebene Grösse gehalten werden, wenn sie auch von Null verschieden ist. Denn für positive $m, m_1, m_2 \ldots m_n$ und ein endliches n haben die Producte von der Form:

$$(x-a)^m [1(x-a)]^{m_1} [1^2(x-a)]^{m_2} \ldots [1^n(x-a)]^{m_n}$$

(wie in § 73 bewiesen werden wird) für $x=a$ immer Null zum Grenzwerth. Ebenso werden die Grössen $1x$, $1^2 x$, $1^3 x$, ... wie ihre Producte und Potenzen, soweit sie reell sind, unendlich gross, wenn x in positivem oder negativem Sinn ins Unendliche wächst, aber von einer Ordnung, die für kleiner als eine beliebige gegebene Grösse gehalten werden muss, wenn sie auch von Null verschieden ist. Wir können also sagen, dass es ausser den Unendlichkleinen und Unendlichgrossen von bestimmten rationalen und irrationalen Ordnungen auch andere Unendlichkleine und Unendlichgrosse giebt, welche in Bezug auf ihre Ordnung mit jenen nicht verglichen werden können und von welchen nur von grösser oder kleiner die Rede sein kann. So ist es zum Beispiel der Fall mit den

---

1) Wobei unter $1^2(x-a)$ etc. zu verstehen ist $1[1(x-a)]$ etc.

Unendlichkleinen (für $x = a$) der Grössen von der Form

$$(x - a)\,\mathrm{l}\,(x - a)\,\mathrm{l}^2\,(x - a)\,\mathrm{l}^3\,(x - a) \ldots \mathrm{l}^n\,(x - a),$$

worin n endlich ist, und den Unendlichgrossen der Grössen

$$\frac{1}{(x - a)\,\mathrm{l}\,(x - a)\,\mathrm{l}^2\,(x - a) \ldots \mathrm{l}^n\,(x - a)}.$$

Die letzteren sind in der That von geringerer Ordnung als die ersten, doch sind sie nicht um eine bestimmte Ordnung von einander verschieden, denn man findet nur, dass die letztere Ordnung von der ersten um eine Grösse differirt, die kleiner als irgend eine gegebene Grösse ist.

Gleichwie hiernach die Logarithmen uns mit Beispielen von Grössen bekannt machen, die unendlich klein oder unendlich gross von Ordnungen werden, die nicht bestimmt sind und welche gewissermassen als unendlich klein angesehen werden können, so liefern uns die Exponentialgrössen $e^{\frac{1}{x-a}}$, c^x Beispiele von Grössen, welche unendlich klein oder unendlich gross von Ordnungen werden, die jede gegebene Grösse überragen oder wie man sagt, von unendlich grossen Ordnungen[1]).

Schliesslich noch die Bemerkung, dass die Unendlichgrossen einer Grösse, wenn sie von einer bestimmten Ordnung sind, als die Unendlichkleinen von negativer Ordnung betrachtet werden können und umgekehrt.

Viertes Kapitel.

Functionsbegriff. — Continuität und Discontinuität.

§ 29. Nachdem wir im Vorstehenden die Irrationalzahlen, die Punktmengen und die Grenzwerthe behandelt haben, gehen wir nun zu den Functionen über und beginnen damit, den

---

1) Vgl. hierzu Thomae, Abriss einer Theorie der complexen Functionen u. s. w. Halle 1870. Seite 40; Elementare Theorie der analytischen Functionen. Halle 1880. Seite 112. — du Bois-Reymond, Ann. di Mat. (2). Bd. 4 Seite 338; Journ. f. Math. Bd. 74 Seite 294; Math. Ann. Bd. 8 Seite 363 u. 574, Bd. 10 Seite 576.

Begriff der Function einer einzigen reellen Variabeln festzustellen.

In früheren Zeiten diente der Ausdruck Function ausschliesslich zur Bezeichnung der Potenzen einer und derselben Grösse und erst durch Leibnitz, die Bernoulli's und namentlich durch Euler wurde der Begriff Function auf alle analytischen Ausdrücke ausgedehnt, welche in irgend einer Weise die entsprechenden Variabeln enthalten. In diesem Jahrhundert hat dann Dirichlet[1]) dem Wort Function eine Bedeutung beigelegt, die unabhängig von jedweder Voraussetzung der Möglichkeit einer analytischen Darstellung ist und als Function einer reellen Variabeln x in einem gegebenen Intervall jede Grösse y bezeichnet, welche für jeden speciellen Werth von x innerhalb des Intervalls (die Grenzen eingeschlossen) einen einzigen und bestimmten Werth hat, welcher bekannt ist oder gefunden werden kann, einerlei ob die Ermittlung dieses Werthes von y durch analytische Operationen mit der Variabeln x oder auf einem beliebigen anderen Weg erfolgt.

Wir behalten diesen Functionsbegriff bei, und zwar wollen wir uns speciell auf reelle und endliche Functionen beschränken. Danach heisst beispielsweise die Grösse y, welche die Summe der beständig convergirenden Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}$$

ist, in einem jeden beliebigen Intervall eine Function von x, weil für jeden in diesem Intervall liegenden Werth von x y einen endlichen und bestimmten Werth hat. Es kommt ebenso in einem gewissen Intervall die Bezeichnung einer Function von x einer Grösse y zu, welche für die rationalen Werthe von x in diesem Intervall gleich Null und für die irrationalen der Einheit gleich wird. Oder man nennt auch eine Function von x in einem gegebenen Intervall eine Grösse, welche für die rationalen Werthe von x in diesem Intervall gleich x und für die irrationalen gleich x^2 ist u. s. w. Dagegen

1) Dove's Rep. d. Physik. Bd. 1 Seite 152; Journ. f. Math. Bd. 4 Seite 157.

kann eine Grösse y, von welcher man nur weiss, dass sie in einem Intervall, das den Punkt $x = 0$ enthält, gleich $\sin\frac{1}{x}$ ist, nicht als Function von x in diesem ganzen Intervall betrachtet werden, weil ihr Werth für $x = 0$ nicht bestimmt ist. Sie würde erst dann zu einer Function von x in diesem ganzen Intervall werden, wenn man ihr einen beliebigen speciellen Werth für $x = 0$ beilegte, wenn man beispielsweise bestimmte, dass sie für $x = 0$ den Werth Null annehmen solle.

Angesichts einer so umfassenden Definition des Functionsbegriffs muss man sich darüber klar sein, dass, so lange keine weiteren Einschränkungen gemacht werden, in der Definition selbst nichts liegt, aus welchem hervorginge, dass Beziehungen zwischen den Functionswerthen an beliebigen verschiedenen Punkten (das heisst für verschiedene Werthe von x) vorhanden sind, mögen diese letzteren auch beliebig nahe an einander angenommen werden. Denn die Werthe, welche die Functionen an solchen Punkten haben, können ganz und gar beliebig und unabhängig von einander sein, trotzdem gewisse bestimmte Gesetze vorhanden sein müssen, durch welche die einzelnen Werthe der Function in jedem Punkt bestimmt werden. Denn, da die Anzahl der Punkte eines beliebigen Intervalls unendlich gross ist, so würde man offenbar ohne solche Gesetze die Function niemals für vollständig bestimmt erklären können. Ohne also vorher Einschränkungen zu machen, würde man insbesondere nicht von Continuität, Differentiirbarkeit u. s. w. sprechen können.

An eine solche Begriffsbestimmung knüpft sich naturgemäss auch die Frage, ob bei Aufrechterhaltung der ganzen in der Definition enthaltenen Allgemeinheit es stets möglich sein wird, in einem gewissen Intervall eine Function y von x für alle Werthe der Variabelen in diesem Intervall durch eine oder mehrere, endliche oder unendliche, Reihen von Rechnungsoperationen, die man mit der Variabelen vornimmt, analytisch auszudrücken oder nicht. Diese Frage lässt sich bei dem gegenwärtigen Stand der Wissenschaft noch nicht in vollständig befriedigender Weise beantworten. Man

kennt freilich heute für sehr weite Klassen von Functionen, auch für solche, die sehr grosse Eigenthümlichkeiten bieten, analytische Ausdrücke; nichtsdestoweniger bleibt der Zweifel bestehen, ob nicht, wenn man keine Einschränkung macht, auch solche Functionen vorhanden sein können, für welche wenigstens mit den jetzt vorhandenen Zeichen der Analysis, jeder analytische Ausdruck durchaus unmöglich ist.

Wir beginnen die Untersuchungen über die so definirten Functionen einer reellen Variabelen x damit, dass wir den Unterschied aufsuchen, der zwischen ihnen in Bezug auf ihre Continuität oder Discontinuität für verschiedene Werthe der Variabelen in dem in Betracht gezogenen Intervall besteht.

---

§ 30. Zu diesem Zweck bezeichnen wir die Function, welche wir in einem endlichen Intervall (α, β) in Betracht ziehen, mit $f(x)$ und erinnern ausdrücklich daran, dass sie nach der oben gegebenen Definition in jedem Punkt dieses Intervalls (die Endpunkte eingeschlossen) einen einzigen und bestimmten Werth hat. Sofern nicht ausdrücklich das Gegentheil erklärt wird, setzen wir immer voraus, dass sie reell und endlich sei (das heisst, dass ihre sämmtlichen Werthe zwischen zwei endlichen Zahlen enthalten seien).

Wir nennen dieselbe für $x = a$ oder in dem Punkt a, in welchem sie den Werth $f(a)$ hat, continuirlich, wenn für jede von Null verschiedene aber beliebig kleine und positive Zahl σ eine von Null verschiedene und positive Zahl ε existirt der Art, dass für alle Werthe von δ, die numerisch kleiner als ε sind, die Differenz $f(a+\delta) - f(a)$ numerisch kleiner als σ ist. Mit andern Worten: $f(x)$ ist im Punkt $x = a$, wo sie den Werth $f(a)$ hat, continuirlich, wenn die Grenze ihrer Werthe rechts und links von a dieselbe und gleich $f(a)$ ist oder auch, wenn man will, wenn die Grössen $f(a+h)$ und $f(a-h)$, worin h positiv ist, für $h = 0$ zum Grenzwerth $f(a)$ haben; oder auch endlich, wenn die Grössen

$$f(a+h) - f(a), \quad f(a-h) - f(a)$$

zugleich mit h unendlich klein werden.

$f(x)$ ist ferner für $x = a$ discontinuirlich, wenn für jeden positiven Werth von σ kein entsprechender positiver Werth von ε existirt, der Art, dass für alle Werthe von δ, die numerisch kleiner als ε sind, numerisch $f(a+\delta) - f(a)$ immer kleiner als σ ist; mit andern Worten $f(x)$ ist für $x = a$ discontinuirlich, wenn die Werthe $f(a+h)$ der $f(x)$ rechts von a und die Werthe $f(a-h)$ der $f(x)$ links von a, die einen wie die andern, keine bestimmten Grenzen haben oder, wenn sie solche haben, diese auf den zwei Seiten von a verschieden sind oder, wenn sie gleich sind, von dem Werth $f(a)$, den die Function im Punkt a hat, differiren.

Wenn a ein Ende α oder β des Intervalles ist, so kann man selbstverständlich sowohl im Fall der Continuität als in dem der Discontinuität nur von den Werthen der $f(a)$ auf der einen Seite dieses Endes sprechen und daher nur die Werthe $f(a+h)$ oder $f(a-h)$ und den Werth $f(a)$ in Betracht ziehen.

---

§ 31. In Bezug auf die Discontinuität der $f(x)$ im Punkt a machen wir folgende Unterschiede:

1) Wenn der Punkt a kein Endpunkt des Intervalls ist und die Discontinuität in diesem Punkt der Art ist, dass die Werthe $f(a+h)$ und $f(a-h)$ der $f(x)$ rechts und links von a denselben bestimmten Grenzwerth A haben, der aber von dem Werth $f(a)$ der $f(x)$ im Punkt a verschieden ist, alsdann würde man die Continuität der Function in diesem Punkt dadurch wieder herstellen können, dass man statt $f(a)$ A zum Werth der Function in diesem Punkt nähme. Wir sagen daher mit Riemann[1]), dass in a eine hebbare Unstetigkeit stattfindet, die durch Abänderung des Werthes der Function in diesem Punkte aufgehoben werden kann[2]).

1) Dissertation Seite 14 oder Werke Seite 21.

2) Ein einfaches Beispiel wird durch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2 x \cos^{2n} x$$

gegeben (Pringsheim, Math. Ann. Bd. 26 Seite 195), die für $x = 0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi \ldots$ verschwindet, für alle andern x aber $= 1$ ist. Siehe auch Pringsheim, Math. Ann. Bd. 26 Seite 167 ff.

2) Wenn der Punkt a, in welchem $f(x)$ discontinuirlich ist, kein Endpunkt des Intervalls ist und die Werthe der $f(x)$ auf der einen Seite von a $f(a)$ zum Grenzwerth haben, während diejenigen auf der andern Seite entweder gar keinen bestimmten Grenzwerth oder einen von $f(a)$ verschiedenen haben, so sagt man: $f(x)$ ist auf der einen Seite (rechts oder links) von a continuirlich und discontinuirlich auf der andern oder einfacher: $f(x)$ ist nur auf der einen Seite von a continuirlich oder discontinuirlich[1]).

3) Wenn auf einer Seite eines Punktes a Discontinuität in $f(x)$ stattfindet und diese Discontinuität der Art ist, dass die Werthe der $f(x)$ auf dieser Seite von a einen bestimmten Grenzwerth haben, so heisst sie eine gewöhnliche Unstetigkeit oder Unstetigkeit der ersten Art; wenn dagegen diese Werthe der $f(x)$ keine bestimmte Grenze haben, so heisst sie Unstetigkeit der zweiten Art. Die Discontinuitäten z. B., welche man durch Aenderung des Werthes der Function in dem entsprechenden Punkt beseitigen kann, sind immer gewöhnliche Discontinuitäten auf beiden Seiten dieses Punktes. Wenn ferner die Function $f(x)$ in einem Punkt a, der nicht ein Endpunkt des Intervalls ist, unstetig ist, so kann sie auf der einen Seite von a stetig sein und auf der andern eine gewöhnliche oder eine Unstetigkeit der zweiten Art haben, oder wenn sie auf beiden Seiten von a discontinuirlich ist, so kann sie auf beiden Seiten eine gewöhnliche oder eine Discontinuität der zweiten Art haben oder auch auf der einen Seite eine gewöhnliche, auf der andern eine Discontinuität der zweiten Art. Durch Aenderung des Werthes der Function in diesem Punkt kann man die Unstetigkeit stets wenigstens auf der

1) Auf Grund des jetzt gewonnenen Begriffs einer continuirlichen Function in einem Punkt a oder auf einer Seite dieses Punktes kann man nun auch sagen, dass, unter y eine Grösse verstanden, welche für alle in einem Intervall $(a, a \pm \varepsilon)$ rechts oder links von a (a eingeschl.) enthaltenen Werthe von x gegeben ist, der Fall im § 20, in welchem der Werth y_a von y für $x = a$ mit der Grenze der Werthe, die y rechts oder links von a annimmt, zusammenfällt, genau derselbe ist, wie derjenige, in welchem y als Function von x betrachtet, eine continuirliche Function von x wenigstens auf der rechten oder linken Seite von a ist.

einen Seite beseitigen, wenn die Discontinuität von der ersten Art, niemals aber, wenn sie von der zweiten Art ist.

Ist der Unstetigkeitspunkt der $f(x)$ ein Endpunkt des Intervalls und die Discontinuität gehört zu denen, die wir eben gewöhnliche genannt haben, so ist sie auch zu denen zu rechnen, die durch Aenderung des Werthes der Function in diesem Punkt beseitigt werden können.

---

§ 32. Bemerkenswerth ist ferner, dass, wenn auf einer Seite eines Punktes a eine Discontinuität der zweiten Art stattfindet, die Werthe der $f(x)$ bei der unbegrenzten Annäherung der x an a auf dieser Seite beständige Schwankungen (in unendlich grosser Zahl) von einer Amplitude machen, die grösser als eine bestimmte gegebene Zahl ist (§ 24), weil alsdann diese Werthe der $f(x)$ keinen bestimmten Grenzwerth haben. Ein Beispiel dazu liefert die Function, die für von a verschiedene Werthe von x gleich $\sin\frac{1}{x-a}$ und für $x=a$ gleich Null ist, da diese Function für $x=a$ rechts und links eine Discontinuität der zweiten Art hat und, während sich x von der einen oder andern Seite von a ins Unendliche a nähert, beständig zwischen -1 und $+1$ hin- und herschwankt.

Freilich kann auch eine Function, die rechts oder links vom Punkt a stetig ist oder die auf einer der beiden Seiten dieses Punktes nur eine gewöhnliche Unstetigkeit besitzt, in der Nähe des Punktes a auf der in Betracht gezogenen Seite eine unendliche Anzahl von Schwankungen machen, jedoch verkleinert sich in diesem Fall die Amplitude dieser Oscillationen unter jede Grenze, während sich x ins Unendliche a nähert (§ 24). So ist es zum Beispiel im Punkt $x=0$ bei der Function der Fall, welche für von Null verschiedene x gleich $x\sin\frac{1}{x}$ und für $x=0$ gleich Null ist oder einen beliebigen andern endlichen Werth hat.

---

§ 33. Wir bemerken ferner, dass eine Function zwar auf der einen Seite eines Punktes a, zum Beispiel auf der rechten, stetig sein oder nur eine gewöhnliche Unstetigkeit besitzen kann, dagegen links von Punkten, welche sich auf der rechten Seite jeder beliebig kleinen Umgebung von a (das heisst von Punkten, die rechts von a und a beliebig nahe liegen) befinden, discontinuirlich und auch discontinuirlich von der zweiten Art sein kann. Umgekehrt kann Unstetigkeit auch von der zweiten Art im Punkt a zur Rechten vorhanden sein, während Continuität links von Punkten, die a beliebig nahe und rechts von a sind, stattfindet.

In der That, das Vorhandensein einer Stetigkeit oder auch einer gewöhnlichen Unstetigkeit rechts vom Punkt a besagt, dass zu jeder positiven Zahl σ eine positive Zahl ε existirt, welche der Art ist, dass in dem Intervall $(a, a+\varepsilon)$, welches a zu seiner unteren Grenze hat, die Ungleichung gilt

$$(1) \qquad |f(a+\varepsilon)-f(a+\delta)|<\sigma.$$

Das Vorhandensein von Stetigkeit oder auch einer gewöhnlichen Discontinuität links von einem Punkt $a+\varepsilon'$, der sich rechts von a und a beliebig nahe befindet, besagt dagegen, dass zu jeder positiven Zahl σ_1 ein Intervall

$$(a+\varepsilon'-\varepsilon_1, \quad a+\varepsilon')$$

existirt, welches den festen Punkt $a+\varepsilon'$ zu seiner oberen Grenze hat und für welches, wenn x ein Punkt desselben ist, die Ungleichung gilt

$$(2) \qquad |f(a+\varepsilon'-\varepsilon_1)-f(x)|<\sigma_1.$$

Dieses beweist ohne Weiteres unsere obige Behauptung, weil die beiden Ungleichungen (1) und (2) sich nicht nothwendiger Weise gegenseitig bedingen. Denn, mag mit dem Kleinerwerden von σ immer ein Intervall $(a, a+\varepsilon)$ fortfahren zu existiren, dessen unteres Ende sich in a befindet und in welchem der Bedingung (1) genügt wird, so folgt daraus nicht nothwendiger Weise, dass mit dem Verkleinern von σ_1 beständig ein Intervall $(a+\varepsilon'-\varepsilon_1, a+\varepsilon')$ vorhanden sein muss, dessen oberes Ende sich in dem festen Punkt $a+\varepsilon'$ befindet und in welchem der Bedingung (2) genügt wird und umgekehrt.

Man begegnet in der That Eigenthümlichkeiten dieser Art bei den Functionen, die wir später untersuchen werden, die in den irrationalen Punkten (das heisst in den Punkten, welche den irrationalen Werthen von x entsprechen) eines gegebenen Intervalls continuirlich und in den rationalen Punkten desselben Intervalls discontinuirlich sind. Man findet sie auch bei der Function, die für von a verschiedene x gleich $\sin\frac{1}{x-a}$ und für $x=a$ gleich Null ist; denn diese Function hat eine Discontinuität zweiter Art im Punkt $x=a$ rechts und links, während sie in allen Punkten, die a beliebig nahe zur Rechten oder Linken liegen, stetig ist.

§ 34. Wir wollen nunmehr voraussetzen, dass die Function $f(x)$ auf der einen Seite eines Punktes a, zum Beispiel auf der rechten, eine Unstetigkeit (der ersten oder zweiten Art) besitze und wollen beachten, dass alle positiven von Null verschiedenen σ unterschieden werden können in solche, welche der Bedingung, dass man für sie immer ein Intervall rechts von a $(a, a+\varepsilon)$ finden könne, in welchem dem absoluten Werth nach $f(x)-f(a)<\sigma$ sei, genügen und in solche, welche dieser Bedingung nicht genügen. Es geht dann aus dem § 9 ohne Weiteres hervor, dass eine untere Grenze σ' der Zahlen σ, für welche Intervalle der genannten Art $(a, a+\varepsilon)$ existiren, vorhanden sein muss. Diese Zahl σ' muss von Null verschieden sein, weil sonst in der $f(x)$ die vorausgesetzte Discontinuität nicht stattfinden würde und muss die Eigenschaft besitzen, dass für jede Zahl $\sigma>\sigma'$ ein Intervall $(a, a+\varepsilon)$ rechts von a vorhanden ist, in welchem $|f(x)-f(a)|$ stets kleiner als σ ist, während dagegen für jede positive Zahl $\sigma<\sigma'$ in irgend einem Intervall $(a, a+\varepsilon)$ Werthe von x existiren, für die $|f(x)-f(a)|>\sigma$ ist. Diese Zahl σ', die nur vom Werthe a abhängt, nennen wir den Sprung der Function zur Rechten des Punktes a.

Ebenso findet ein Sprung σ' zur Linken von a statt, wenn $f(x)$ links von a discontinuirlich ist. Wenn ferner $f(x)$ auf beiden Seiten von a discontinuirlich ist, so nennt man

den Sprung der Function im Punkt a die grössere der beiden Zahlen, welche den Sprung rechts und links darstellen[1]).

Mit Hülfe dieser Benennungen können wir nun offenbar sagen: Wenn eine Function der Art ist, dass sie auf einer Seite eines Punktes a, zum Beispiel auf der rechten, continuirlich ist oder nur eine gewöhnliche Discontinuität hat und zur Linken von Punkten, welche rechts von a liegen und a beliebig nahe liegen, discontinuirlich ist, so müssen die Sprünge, die diese Function zur Linken der genannten Punkte macht, mit ihrer Annäherung ohne Ende an a über jedes Maass sich verkleinern. Aber nicht umgekehrt. Denn es gibt, wie in dem vorigen Paragraphen ausgeführt wurde, auch Functionen, wie die öfter genannte $\sin\frac{1}{x-a}$, welche in diesen Nachbarpunkten von a continuirlich sind und doch im Punkt a eine Unstetigkeit zweiter Art haben.

---

§ 35. Nach dem Vorgang Dirichlet's[2]) soll für die Zukunft, wenn $f(x)$ rechts oder links von einem Punkt a stetig ist oder nur eine Unstetigkeit der ersten Art hat, mit $f(a+0)$ oder $f(a-0)$ die Grenze bezeichnet werden, welcher die Werthe $f(a+h)$ oder $f(a-h)$ der $f(x)$ auf der entsprechenden Seite von a (rechts oder links) für positive und ins Unendliche abnehmende h zustreben. Wenn also im Punkt a Continuität auf beiden Seiten oder eine jener Unstetigkeiten stattfindet, welche man durch Aenderung des Functionswerthes in diesem Punkt beseitigen kann, so sind diese Grössen $f(a+h)$ und $f(a-h)$ einander und im ersten Fall auch der $f(a)$ gleich. Die Bezeichnung hört auf einen bestimmten Sinn zu haben, wenn die Discontinuität der $f(x)$ auf der Seite von a, auf welche die Bezeichnung sich bezieht, eine Unstetigkeit der zweiten Art ist.

Falls ferner die Discontinuität der $f(x)$ für $x = a$ wenigstens auf einer der beiden Seiten, zum Beispiel auf der rechten, eine gewöhnliche ist, so ist der entsprechende Sprung der

1) Eine andere Definition siehe bei Pasch, Math. Ann. 30 S. 139. Vgl. auch Du Bois-Reymond, Functionentheorie S. 230.

2) An d. S. 48 angeführten Orte.

Function offenbar der absolute Werth von $f(a+0)-f(a)$ und ebenso ist der Sprung der $f(x)$, falls eine gewöhnliche Unstetigkeit links von a statt hat, der absolute Werth von $f(a-0)-f(a)$.[1])

---

§ 36. In Bezug auf die obere und untere Grenze der Werthe einer reellen und stets endlichen Function in einem gegebenen Intervall wird es zweckmässig sein, hier den folgenden Satz von Weierstrass[2]) wiederzugeben:

Es sei $f(x)$ unsere in dem Intervall (α, β), die Grenzwerthe eingeschlossen, willkürlich gegebene Function. Nach dem Satz im § 15 kann man sagen, dass in diesem Intervall eine obere Grenze λ und eine untere μ der Werthe dieser Function vorhanden sein muss; jetzt wollen wir zeigen, dass in diesem Intervall immer wenigstens ein bestimmter Punkt x' (der auch ein Endpunkt dieses Intervalls sein kann) vorhanden ist von solcher Beschaffenheit, dass für die den Punkten einer jeden noch so beliebig kleinen Umgebung von x' (§ 11) entsprechenden Werthe der $f(x)$ die obere Grenze immer λ ist.

Der Beweis dieses Satzes wird mittelst des schon früher benutzten Verfahrens der Theilung des Intervalls in $2, 2^2, 2^3 \ldots 2^n \ldots$ gleiche Theile geführt. Setzen wir, wie sonst auch, $\beta > \alpha$ voraus und theilen das Intervall von α bis β in zwei gleiche Intervalle $\left(\alpha, \frac{\beta+\alpha}{2}\right)$, $\left(\frac{\beta+\alpha}{2}, \beta\right)$ und denken uns die oberen Grenzen λ_1 und λ_2 der Werthe der $f(x)$ bestimmt, welche den, in den ersten bezüglich den zweiten dieser Intervalle fallenden Werthen von x entsprechen. Es ist klar, dass keine dieser Zahlen λ_1 und λ_2 grösser sein kann als λ, denn sonst wären in dem Intervall (α, β) Werthe der $f(x)$ vorhanden, die grösser als λ sind. Sie können aber auch nicht beide kleiner als λ sein, weil sonst, wenn zum Beispiel $\lambda_1 \leqq \lambda_2 < \lambda$ wäre, keine Werthe der $f(x)$ in dem Intervall (α, β) zwischen λ_2 und λ fielen. In dem einen wie in dem

---

1) Vgl. Du Bois-Reymond Math. Ann. Bd. 7 S. 241.

2) Aus dessen Vorlesungen.

andern Fall wäre folglich λ nicht der obere den Werthen der $f(x)$ in diesem Intervall entsprechende Grenzwerth. Es muss deshalb wenigstens eine der beiden Zahlen λ_1 und λ_2 gleich λ sein. Ist nun $\lambda_1 = \lambda$, λ_2 mag einen Werth haben, welchen es will (das heisst $< \lambda$), so ziehen wir das λ_1 entsprechende Intervall (hier das erste) in Betracht; während, wenn λ_1 nicht λ gleich ist, was zur Folge hat, dass $\lambda_2 = \lambda$ sein muss, wir uns mit dem zweiten Intervall beschäftigen. Setzen wir also $\beta - \alpha = \gamma$, bezeichnen mit α_1 eine der Null oder Einheit gleiche Zahl, je nachdem λ_1 gleich λ ist oder nicht und nehmen

$$x_1 = \alpha + \frac{\gamma}{2}\alpha_1,$$

so ist

$$\left(x_1, x_1 + \frac{\gamma}{2}\right)$$

das Intervall von der Ausdehnung gleich $\frac{\gamma}{2}$, mit dem wir uns beschäftigen und in welchem die obere Grenze der Werthe von $f(x)$ immer noch λ ist.

Verfährt man jetzt ebenso mit diesem Intervall, bezeichnet mit α_2 eine der Null oder Einheit gleiche neue Zahl, je nachdem die obere Grenze aller dem ersten der neuen Intervalle entsprechenden Werthe der $f(x)$ gleich λ ist oder nicht und setzt

$$x_2 = x_1 + \frac{\gamma}{2^2}\alpha_2,$$

so erhält man das Intervall

$$\left(x_2, x_2 + \frac{\gamma}{2^2}\right),$$

in welchem die obere Grenze der Werthe der $f(x)$ noch λ ist. Fährt man so fort und setzt nach einander

$$x_3 = x_2 + \frac{\gamma}{2^3}\alpha_3 \ldots, \quad x_n = x_{n-1} + \frac{\gamma}{2^n}\alpha_n,$$

worin $\alpha_3 \ldots \alpha_n$, wie sonst, die nach einander auf die oben angegebene Art bestimmten Werthe 0 oder 1 haben, so kommt man nach n solcher aufeinander folgenden Operationen zuletzt zu dem Intervall

$$\left(x_n, x_n + \frac{\gamma}{2^n}\right),$$

welches die Ausdehnung $\frac{\gamma}{2^n}$ hat und in welchem die obere Grenze der Werthe der $f(x)$ immer noch λ ist.

Betrachtet man nun die Zahlenreihe $(\alpha, x_1, x_2, \ldots)$, die man so erhält, so sieht man, dass sie, wie diejenige des § 9, eine Zahl x' bestimmt, welche auch ein Ende α oder β des gegebenen Intervalls sein kann und welche in den Intervallen

$$\left(x_n,\ x_n + \frac{\gamma}{2^n}\right),$$

die man nacheinander (die Grenzen eingeschlossen) erhält, enthalten ist. Es ist nun leicht einzusehen, dass diese Zahl x' gerade diejenige ist, deren Existenz wir beweisen wollen.

Beachtet man in der That, dass sie in den Intervallen

$$\left(x_n,\ x_n + \frac{\gamma}{2^n}\right)$$

(die Grenzen eingeschlossen) liegt, so sieht man ohne Weiteres, dass wenigstens eines der beiden Intervalle

$$\left(x_n,\ x'\right),\quad \left(x',\ x_n + \frac{\gamma}{2^n}\right)$$

von einer von Null verschiedenen Ausdehnung sein muss und dass wenigstens in einem von ihnen die obere Grenze der Werthe der $f(x)$ noch λ sein muss. Weil nun offenbar

$$x' - x_n \leq \frac{\gamma}{2^n}$$

und

$$x_n + \frac{\gamma}{2^n} - x' \leq \frac{\gamma}{2^n}$$

und man n so gross nehmen kann, dass die Zahl $\frac{\gamma}{2^n}$ kleiner als irgend eine beliebige positive Grösse ε ist, so folgt, dass die obere Grenze der Werthe der $f(x)$ immer noch λ sein muss für die Werthe von x, welche wenigstens in eines der beiden Intervalle $(x' - \varepsilon,\ x')$, $(x',\ x' + \varepsilon)$ fallen und deshalb auch für die Werthe von x zwischen $x' - \varepsilon$ und $x' + \varepsilon$, welche in das gegebene Intervall von α bis β (α und β eingeschlossen) fallen oder, was dasselbe ist, für die Punkte jeder Umgebung von x'. Damit ist der Satz bewiesen, denn aus dem zur Auf-

findung des Punktes x' eingeschlagenen Verfahren geht auch hervor, dass mehr als ein solcher Punkt vorhanden sein kann.

Ein ähnlicher Satz besteht für die untere Grenze der Werthe der $f(x)$ in dem Intervall (α, β).

---

§ 37. Da wir von der oberen und unteren Grenze einer Function in einem gegebenen Intervall sprechen, so sei auch gleich noch zugefügt, dass der Unterschied zwischen der oberen Grenze und der unteren Grenze der Werthe einer Function $f(x)$ in einem gegebenen Intervall die Schwankung der Function in diesem Intervall[1]) genannt wird. Wir bemerken ferner: wenn x_1 und x_2 zwei Werthe von x in diesem Intervall sind und D die Schwankung der $f(x)$ in demselben Intervall bedeutet, so ist absolut genommen

$$D > f(x_1) - f(x_2)$$

und wenn sich das Intervall von a bis $a + \varepsilon$ oder von $a - \varepsilon$ bis $a + \varepsilon$ erstreckt und in ihm beständig

$$| f(x) - f(a) | < \sigma$$

ist, so ist offenbar

$$D < 2\sigma;$$

und wenn die Function von a bis $a + \varepsilon$ oder von $a - \varepsilon$ bis $a + \varepsilon$ thatsächlich ein Maximum und ein Minimum besitzt, so lässt sich auch behaupten, dass $D < 2\sigma$ ist. Wenn σ' der Sprung der Function im Punkte a ist (§ 34) und im Intervall von $a - \varepsilon_1$ bis $a + \varepsilon'$ (ev. von a bis $a \pm \varepsilon$) die Schwankung $= D$ ist, so ist auch $| f(x) - f(a) |$ für alle Punkte dieses Intervalles $< D$, daher kann der Sprung σ' nicht $> D$ sondern muss $< D$ sein. Ist andererseits ζ eine beliebig kleine positive Zahl, so kann man stets eine Umgebung von a finden, für deren sämmtliche Punkte

$$| f(x) - f(a) | < \sigma' + \zeta$$

ist. Dann ist in dieser Umgebung die Schwankung

$$< 2\sigma' + 2\zeta.$$

Ist die Function in a stetig, also $\sigma' = 0$, so kann man eine so kleine Umgebung von a finden, dass in ihr die Schwankung kleiner als eine vorgegebene positive Zahl ist.

1) Riemann, Ueber die Darstellbarkeit u. s. w. S. 19; Werke S. 226.

§ 38. Sind schliesslich $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots f_n(x)$ eine endliche Anzahl von Functionen von x in einem gegebenen Intervall und sind sie sämmtlich in einem und demselben Punkt a dieses Intervalls continuirlich, so sieht man leicht, dass dasselbe von ihrer algebraischen Summe und ihrem Product gilt ebenso wie von dem Quotient zweier beliebigen von ihnen, wenn nur eine Umgebung des Punktes a vorhanden ist, in welcher die den Nenner bildende Function sich stets um eine endliche Grösse von Null verschieden hält u. s. w.

Wir bemerken noch ein für alle Mal, dass diese für reelle Functionen einer reellen Variabelen geführten Untersuchungen sich auch auf die complexen Functionen einer reellen Variabelen übertragen lassen, wenn man bei ihnen die beiden Functionen, welche den reellen Bestandtheil und den reellen Factor der imaginären Einheit bilden, getrennt in Betracht zieht. Gelegentlich reicht es auch aus, wenn man nur die Function untersucht, welche sich der gegebenen als ihr reeller Modul zuordnet.

Fünftes Kapitel.

Functionen, die in einem gegebenen Intervall stetig sind.

§ 39. Man sagt von Functionen, dass sie in einem gegebenen Intervall stetig sind, wenn sie in allen Punkten dieses Intervalls (die Enden eingeschlossen) stetig sind. Functionen, welche nur in einer endlichen Anzahl von Punkten eines Intervalls unstetig sind und welche also dadurch, dass man diese Punkte mit beliebig kleinen Intervallen herausnimmt, in den übrig bleibenden Intervallen continuirlich werden, heissen im Allgemeinen oder abtheilungsweise stetig[1]) für das oben genannte Intervall.

So ist zum Beispiel die Function $x \sin \frac{1}{x}$, wenn man Null als den Werth derselben in dem Punkt $x = 0$ annimmt,

---

1) C. Neumann, Die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunctionen fortschreitenden Entwickelungen. S. 26.

in jedem Intervall continuirlich, während die Funktion $\sin\frac{1}{x}$, welchen Werth man ihr auch im Punkt $x = 0$ beilegen mag, in den Intervallen, welche den Punkt $x = 0$ enthalten, nur im Allgemeinen stetig ist.

---

§ 40. Wir beschäftigen uns zunächst speciell mit den Functionen, welche in einem endlichen Intervall (α, β), welches in Betracht gezogen wird, stetig sind. $f(x)$ sei eine solche Function. Alsdann muss für jeden besonderen Werth a von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen) eine besondere von Null verschiedene und positive Grösse ε existiren von der Beschaffenheit, dass für alle Werthe von δ, die numerisch kleiner als ε sind und für welche der Punkt $a + \delta$ in das in Betracht gezogene Intervall (α, β) (α und β eingeschlossen)[1]) fällt,

$$|f(a + \delta) - f(a)| < \sigma$$

ist — unter σ eine von Null verschiedene, aber beliebig kleine und positive nach Gefallen ausgewählte Zahl verstanden. Es kann aber der Fall eintreten, dass die Zahl ε bei einem und demselben Werth von σ für gewisse Punkte a ihren Zweck erfüllt, für andere Punkte desselben Intervalls dieses aber nicht mehr thut, sondern für diese verringert werden muss.

---

1) Um Irrthümer zu vermeiden, werden wir die Werthe von δ, welche numerisch kleiner als ε sind, immer auf solche beschränken, für welche der Punkt $a + \delta$ in das gegebene Intervall (α, β) (α und β eingeschlossen) fällt oder auf solche zwischen $a - \varepsilon$ und $a + \varepsilon$ liegende Punkte, welche in dieses Intervall (α, β) fallen. Denn, wenn der Punkt a hinreichend nahe an den Enden α und β liegt oder mit diesen Endpunkten zusammenfällt, so werden einige der Punkte $\alpha + \delta$, δ immer numerisch kleiner als ε vorausgesetzt, in der That aus dem Intervall (α, β) heraustreten. Wenn in der That a dem einen Ende zum Beispiel α hinreichend nahe oder in diesem Ende selbst liegt, so kann es doch immerhin möglich sein, dass man gezwungen ist, eine bestimmte und positive Zahl $\varepsilon > a - \alpha$ in Betracht zu ziehen, die von der Art ist, dass für die zwischen α und $a + \varepsilon$ (α eingeschlossen) liegenden Punkte $a + \delta$ numerisch $f(a + \delta) - f(a) < \sigma$ ist. Alsdann treten in der That einige der Punkte $a + \delta$, wobei δ numerisch kleiner als ε ist, aus dem Intervall (α, β) heraus.

Es könnten sich auch Zweifel regen, ob nicht so, wie es bei der Annäherung ohne Ende an die Discontinuitätspunkte der nur abtheilungsweise stetigen Functionen vorkommt, auch bei den Functionen, welche in jenem Intervall continuirlich sind, bei der Annäherung von x an gewisse besondere Punkte, ε über jede Grenze sich verringern könne, ohne doch jemals den Werth Null zu erreichen (welcher auf diese Art nur die untere Grenze aller Werthe ε wäre). Mit andern Worten, es könnte zweifelhaft sein, ob in gewissen Fällen auch wirklich eine von Null verschiedene Zahl ε existirt, welche für alle Werthe von x von α bis β (α und β eingeschlossen) ihren Zweck erfüllt. Gerade dieses Zweifels wegen hatte man vorgeschlagen[1]), die Stetigkeit einer Function, die in einem gewissen Intervall (α, β) continuirlich ist, in gleichmässige und ungleichmässige Stetigkeit zu unterscheiden, je nachdem für jede positive und beliebig kleine Zahl σ eine von Null verschiedene und positive Zahl ε vorhanden wäre oder nicht, welche von der Art ist, dass für alle Werthe von δ, die numerisch kleiner als ε sind und für welche der Punkt $x + \delta$ in das gegebene Intervall (α, β) (α und β eingeschlossen) fällt und für alle Werthe von x in demselben Intervall (die Enden ebenfalls eingeschlossen)

$$| f(x + \delta) - f(x) | < \sigma$$

ist. Cantor hat nun aber den Beweis geführt, dass, wenn $f(x)$ in dem Intervall von α bis β continuirlich ist, für jede Zahl σ immer eine solche Zahl ε vorhanden ist, die für alle Punkte dieses Intervalls ihren Zweck erfüllt. Die oben erwähnte Unterscheidung ist daher heute durchaus zwecklos.

---

§ 41. Dieser wichtige Satz Cantor's kann auf folgende Weise bewiesen werden[2]).

Wir wollen die Werthe von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen) betrachten und mit $\varepsilon(\sigma, x)$ eine Zahl ε

1) Heine, Jour. f. Math. Bd. 71 S. 361.

2) Lüroth, Math. Ann. Bd. 6 Seite 319 und Darboux, Ann. Ec. Nom. 2 sér. Bd. 4 S. 73 geben andere Beweise.

bezeichnen, die für den besondern in Betracht gezogenen Werth von x die Eigenschaft besitzt, dass für alle Werthe von δ, die numerisch kleiner sind als ε und für welche der Punkt $x + \delta$ zwischen α und β (α und β eingeschlossen) fällt, dem absoluten Werth nach

$$f(x + \delta) - f(x) < \sigma$$

ist. Der vorausgesetzten Continuität der $f(x)$ wegen ist diese Zahl ε zwar vorhanden und von Null verschieden, aber nicht genau bestimmt, weil jede andere Zahl zwischen 0 und ε den gleichen Zweck erfüllt. Um diese Unbestimmtheit zu beseitigen, soll unter ε die obere Grenze der Werthe von ε verstanden werden, welche in Bezug auf den Punkt x mit den Eigenschaften, die alle ε haben müssen, vereinbar sind (eine solche Grenze ist offenbar vorhanden. § 15). $\varepsilon(\sigma, x)$ bezeichne nun diesen so bestimmten Werth von ε für den Punkt x. Diese Grösse $\varepsilon(\sigma, x)$ kann dann in dem Intervall (α, β) als eine Function von x betrachtet werden.

Daraus folgt (§§ 15 und 36), dass eine untere Grenze λ' für die Werthe von $\varepsilon(\sigma, x)$ in demselben Intervall (α, β) existiren und dass wenigstens ein Punkt x' zwischen α und β (α und β eingeschlossen) vorhanden sein muss, dem die Eigenschaft zukommt, dass für die Punkte jeder noch so beliebig kleinen Umgebung von x' die untere Grenze der entsprechenden Werthe von $\varepsilon(\sigma, x)$ immer noch λ' ist. Da überdies die Function $f(x)$ stetig ist, so giebt es für den Punkt x' eine positive und von Null verschiedene Zahl ε', der die Eigenschaft zukommt, dass für alle Werthe von δ', die numerisch kleiner als ε' sind und für welche der Punkt $x' + \delta'$ in das gegebene Intervall fällt,

$$| f(x' + \delta') - f(x') | < \frac{\sigma}{2}$$

ist. Daher ist in dem Intervall

$$(x' - \varepsilon', \quad x' + \varepsilon')$$

(oder in dem Theil desselben, welcher in das gegebene Intervall fällt) die Schwankung der Function numerisch immer kleiner als σ. Daraus folgt, dass für alle Punkte x, die man in dem Intervall

$$\left(x' - \frac{\varepsilon'}{2},\ x' + \frac{\varepsilon'}{2}\right)$$

in Betracht ziehen kann, ein Werth von ε, der $\frac{\varepsilon'}{2}$ gleich ist, der Bedingung genügt, dass

$$| f(x + \delta) - f(x) | < \sigma$$

für alle die δ sei, die numerisch kleiner als dieses ε sind und für welche der Punkt $x + \delta$ in dem Intervall (α, β) bleibt. Für alle diese Punkte x kann daher die oben definirte Grösse $\varepsilon(\sigma, x)$ nicht kleiner sein als $\frac{\varepsilon'}{2}$, und λ', welches die untere Grenze der Werthe $\varepsilon(\sigma, x)$ für dieselben Werthe von x ist, kann ebenfalls nicht kleiner als $\frac{\varepsilon'}{2}$ sein. Dieses zeigt uns, dass für alle in dem Intervall (α, β) (die Enden eingeschlossen) enthaltenen Werthe von x und für alle Werthe von δ, die numerisch kleiner als $\frac{\varepsilon'}{2}$ sind und für welche der Punkt $x + \delta$ in das Intervall (α, β) selbst fällt,

$$| f(x + \delta) - f(x) | < \sigma$$

ist. Damit ist der Satz bewiesen.

---

§ 42. Aus dem vorstehenden Satz geht ohne Weiteres der folgende hervor: Wenn eine Function $f(x)$ in einem ganzen Intervall (α, β) stetig ist und man unter σ eine positive und beliebig kleine Zahl versteht, so kann man immer das ganze Intervall (α, β) in eine endliche Anzahl von Theilintervallen zerlegen, die hinreichend klein sind, aber sämmtlich eine von Null verschiedene Ausdehnung haben, der Art, dass die Schwankungen der Function in jedem Theilintervall sämmtlich kleiner als σ sind. Denn wenn ε die Zahl ist, deren Existenz wir eben nachgewiesen haben, und welche zu einer Zahl σ' gehört, die kleiner als $\frac{\sigma}{2}$ ist, so werden die Schwankungen der Function in jedem Intervall, das kleiner als ε, oder ε gleich ist, niemals grösser als $2\sigma'$ (§ 37). Sie sind daher sämmtlich kleiner als σ.

§ 43. Die in einem gegebenen Intervall continuirlichen Functionen besitzen auch noch andere Eigenschaften, die zum Theil selbstverständlich zu sein scheinen, aber dennoch eine besondere Darlegung erfordern, wenn man diese Functionen streng wissenschaftlich behandeln will.

Diese Eigenschaften sind in den folgenden Lehrsätzen enthalten, von denen der erste, dritte und vierte allgemeiner auch auf Functionen, die nur in einem Punkt continuirlich sind, sich beziehen.

Lehrsatz I. Wenn eine Function $f(x)$ in einem bestimmten Punkt x' continuirlich ist und wenn sie in einer Menge von Punkten bekannt ist, von welchen x' nur der Grenzpunkt ist (§ 12), so ist sie auch in dem Punkt x' bestimmt.

Wenn in der That $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \dots$ Punkte der gegebenen Menge in solcher Ordnung sind, dass sie mit wachsendem n sich immer mehr x' nähern, so sind die Werthe

$$f(\alpha_1), \ f(\alpha_2), \dots f(\alpha_n), \dots f(\alpha_{m+n}), \dots$$

bekannt und haben eine bestimmte Grenze (§ 22). Denn der Continuität der $f(x)$ wegen werden die Differenzen

$$| f(\alpha_{m+n}) - f(\alpha_n) | ,$$

die positive Zahl m mag sein, welche sie will, mit dem unendlichen Wachsen des n schliesslich kleiner als jede beliebige gegebene Grösse und bleiben es alsdann stets. Wenn nun A diese Grenze ist, so ist im Punkt x' die $f(x') = A$. Denn könnte zum Beispiel $f(x') = B$ sein, wobei B von A verschieden ist und man bezeichnet mit n' eine Zahl der Art, dass für $n \geqq n'$

$$| f(\alpha_n) - A | < \frac{B - A}{2}$$

ist, so hätte man

$$| f(\alpha_n) - f(x') | > \frac{B - A}{2}$$

für jeden Werth von n, der grösser als n' ist. Es wäre daher die $f(x)$ im Punkt x' nicht continuirlich, weil kein Intervall $(x' \pm \varepsilon, x')$ oder $(x' - \varepsilon, x' + \varepsilon)$ existiren würde, in welchem immer dem absoluten Werth nach

$$f(x) - f(x') < \frac{B - A}{2}$$

wäre. Damit ist der Satz bewiesen.

Es folgt aus ihm unmittelbar als Zusatz:

Wenn eine Function $f(x)$ in einem gewissen Intervall (α, β) continuirlich und in den Punkten einer unendlich grossen Menge G bekannt ist, so ist sie auch in den Punkten aller von G abgeleiteten Mengen bekannt (§§ 12 und 13).

---

§ 44. Aus diesem Zusatz erhält man ohne Weiteres:

Lehrsatz II. Wenn eine Function $f(x)$ in einem gewissen Intervall (α, β) stetig und nur in den Punkten einer der zweiten Gattung angehörigen überall dichten (§ 13) Menge G bekannt ist, deren erste abgeleitete Menge G' also alle Punkte des Intervalls enthält, so ist sie auch in den übrigen Punkten bestimmt.

So kann man im Besonderen sagen: Wenn die Function $f(x)$ einen und denselben Werth A in allen Punkten einer überall dichten Menge G hat, so ist sie in dem ganzen Intervall gleich A; und wenn eine zwischen α und β stetige Function in allen rationalen Punkten dieses Intervalls bekannt ist, so ist sie auch in den irrationalen Punkten bestimmt; oder auch: Wenn zwei in dem Intervall (α, β) stetige Functionen in allen Punkten einer in dem Intervall überall dichten Menge gleich sind, so sind sie auch in allen andern Punkten gleich.

---

§ 45. Lehrsatz III. Wenn eine Function $f(x)$ in einem Punkt x' stetig ist und in Punkten, die von x' um weniger als jede beliebig kleine gegebene Grösse entfernt sind, den Werth A annimmt oder Werthe, die numerisch von A um weniger als jede beliebige gegebene Grösse abweichen, so ist immer

$f(x') = A$; denn wenn zum Beispiel $f(x') = B$ wäre und B wäre von A verschieden, so würde die $f(x)$ im Punkt x' nicht continuirlich sein.

---

§ 46. Lehrsatz IV. Wenn $f(x)$ in einem Punkt x' continuirlich ist und während sich x auf der einen Seite von x' ohne Ende an x' annähert, schliesslich niemals grösser als A ist, dagegen, während x sich auf der andern Seite x' nähert, schliesslich niemals kleiner als A ist, so hat sie im Punkt x' den Werth A.

Es ist in der That einleuchtend, dass, wenn $f(x)$ nicht gleich A wäre, die Function $f(x) - A$ bei der unendlichen Annäherung der x an x' schliesslich auf der einen Seite von x' immer positiv oder gleich Null, dagegen auf der andern immer negativ oder gleich Null und in x' selbst von Null verschieden wäre. Diese Function $f(x) - A$ wäre also wenigstens auf einer Seite von x' nicht stetig, was gegen die Voraussetzung ist.

---

§ 47. Lehrsatz V. Eine Function $f(x)$, welche in einem gegebenen Intervall (α, β) stetig und nicht constant ist, besitzt thatsächlich stets in diesem Intervall einen Maximalwerth und einen Minimalwerth[1]). Das heisst: In dem gegebenen Intervall (die Enden eingeschlossen) existirt immer wenigstens ein bestimmter Punkt x', in welchem die Function einen Werth hat, der keinem der Werthe, welche dieselbe in allen übrigen Punkten desselben Intervalls hat, nachsteht, vielmehr grösser ist, als einige dieser Werthe oder alle diese Werthe. Es existirt auch in demselben Intervall wenigstens ein bestimmter Punkt x'', in welchem der Werth der Function keinen der Werthe, welche die Function in allen übrigen Punkten hat, übertrifft, vielmehr kleiner ist als einige dieser Werthe oder alle diese Werthe[2]).

---

1) Weierstrass in seinen Vorlesungen.

2) Wir bemerken, dass für die Functionen, welche in dem gegebenen Intervall (α, β) nicht überall continuirlich sind, nur der Satz in § 36 gegeben werden kann, da das Maximum und Minimum für sie offenbar nicht existiren können.

Wir wollen in der That mit λ die obere Grenze der Werthe unsrer Function $f(x)$ in dem gegebenen Intervall von α bis β (die Enden eingeschlossen) bezeichnen. Diese obere Grenze existirt und es existirt auch (§ 36) wenigstens ein Punkt x', der so beschaffen ist, dass für die Punkte seiner ganzen noch so beliebig kleinen Umgebung die obere Grenze der Werthe der $f(x)$ immer noch λ ist. Nach Lehrsatz III ist offenbar $f(x') = \lambda$ und mithin λ ein Maximum.

Auf dieselbe Art wird die Existenz des Minimums gezeigt und der Lehrsatz wäre damit vollständig bewiesen.

---

§ 48. Lehrsatz VI. Wenn $f(x)$ eine in dem Intervall (α, β) stetige Function ist und in diesem Intervall auch Werthe annimmt, die numerisch kleiner als irgend eine gegebene Grösse sind, so nimmt sie für einen bestimmten Werth von x in demselben Intervall thatsächlich auch den Werth Null an.

Nach dem vorhergehenden Satz besitzt in der That die Function $f(x)^2$, welche zwischen α und β (§ 38) ebenfalls continuirlich ist, ein Minimum, welches zu gleicher Zeit die untere Grenze der Werthe ist, die sie zwischen α und β (α und β eingeschlossen) annimmt. Nach den in dem Satz gemachten Voraussetzungen ist diese untere Grenze Null. Daher existirt zwischen α und β (α und β eingeschlossen) ein bestimmter Werth von x, für welchen $f(x) = 0$ ist.

---

§ 49. Lehrsatz VII. Wenn die Function $f(x)$ zwischen α und β continuirlich ist und in diesem Intervall auch Werthe annimmt, die numerisch einer bestimmten Grösse A so nahe sind, wie man nur will, so besitzt diese Function für einen bestimmten Werth von x in diesem Intervall in Wirklichkeit auch den Werth A.

Denn die Function $f(x) - A$ nimmt in dem gegebenen Intervall auch Werthe an, die numerisch kleiner als irgend eine gegebene Grösse sind und nimmt daher nach dem vorigen

Satz für einen gewissen Werth x' von x in diesem Intervall (die Enden eingeschlossen) auch den Werth Null an. Man hat daher $f(x') = A$.

---

§ 50. Lehrsatz VIII. Wenn die Function $f(x)$ zwischen α und β continuirlich ist und für einen in diesem Intervall (α und β eingeschlossen) enthaltenen Werth a von x positiv ist, während sie für einen Werth b von x in demselben Intervall (α und β eingeschlossen) negativ ist, so nimmt diese Function für einen bestimmten Werth von x zwischen a und b den Werth Null an[1]).

Denn setzen wir zum Beispiel $a < b$ voraus und bilden die Menge der positiven Werthe der $f(x)$ zwischen a und b (a eingeschlossen) und bezeichnen mit A die untere Grenze dieser Werthe. Da nun $f(x)$ zwischen a und b continuirlich ist, so existirt nach dem vorigen Satz zwischen a und b ein Punkt x', für welchen $f(x') = A$ ist. Um deshalb den aufgestellten Satz zu beweisen, genügt es, zu zeigen, dass A gleich Null sein muss.

Nehmen wir nun an, A sei von Null verschieden, so kann man nach dem Satz des § 42 eine von Null verschiedene, positive Zahl ε finden, mittelst welcher man das Intervall (a, b) in mehrere aufeinander folgende Intervalle

$$(a, a + \varepsilon), \quad (a + \varepsilon, a + 2\varepsilon), \quad (a + 2\varepsilon, a + 3\varepsilon), \ldots$$

theilen kann, in welchen allen die Schwankungen der $f(x)$ ihrem absoluten Werth nach kleiner als A sind. Da ε von Null verschieden ist, so ist die Anzahl dieser Intervalle endlich und das letzte Intervall $(m\varepsilon, b)$ kann auch von einer Ausdehnung sein, die kleiner als ε ist. Betrachten wir nun das erste dieser Intervalle $(a, a + \varepsilon)$ und bemerken, dass $f(a) \geqq A$ ist, so sieht man sofort, dass in ihm $f(x)$ immer positiv und daher nicht kleiner als A ist und dass also auch $f(a + \varepsilon)$ positiv und nicht kleiner als A ist. Betrachtet man dann das zweite Intervall $(a + \varepsilon, a + 2\varepsilon)$, so schliesst man sofort, dass auch in ihm $f(x)$ immer positiv und daher nicht

---

1) Bolzano in d. S. 17 a. W.

kleiner als A und $f(a+2\varepsilon) \geq A$ ist. Fährt man so fort, so kommt man zuletzt zu dem Schluss, dass, wenn A von Null verschieden wäre, die $f(x)$ in dem ganzen Intervall positiv und niemals kleiner als A wäre und besonders wäre auch $f(b)$ positiv und nicht kleiner als A, was gegen die Voraussetzung ist. Es bleibt also nur die Annahme übrig, dass A gleich Null sei und $f(x') = 0$. Da nun offenbar der Punkt x' sich weder in a noch in b befinden kann, so ist damit der Satz bewiesen.

---

§ 51. Lehrsatz IX. Wenn die Function $f(x)$ zwischen α und β continuirlich ist und in zwei Punkten a und b dieses Intervalls (α und β eingeschlossen) verschiedene Werthe A und B annimmt, so nimmt diese Function für einen oder mehrere bestimmte Werthe von x zwischen a und b einen beliebigen zwischen A und B liegenden Werth C an.

Denn betrachtet man die Function $f(x) - C$, so sieht man ohne Weiteres, dass ihre Werthe für $x = a$ und $x = b$ entgegengesetzte Vorzeichen haben und aus dem vorigen Lehrsatz folgt daher, dass zwischen a und b wenigstens ein bestimmter Werth x_1 von x existiren muss, für welchen

$$f(x_1) - C = 0$$

das heisst

$$f(x_1) = C$$

ist.

---

§ 52. Aus diesem Lehrsatz und dem des § 47 folgt dann ohne Weiteres:

Lehrsatz X. Wenn die Function $f(x)$ zwischen α und β continuirlich ist, so nimmt sie in diesem Intervall wenigstens einmal jeden zwischen dem Maximum und Minimum der Werthe, die sie in diesem Intervall hat, liegenden Werth an.

---

§ 53. Lehrsatz XI. Wenn die Function $f(x)$ in dem Intervall (α, β) stetig und in irgend einer Umgebung eines der beiden Endpunkte zum Beispiel von α con-

stant und gleich A ist, ohne jedoch in dem ganzen Intervall (α, β) constant zu sein und man etwa $\alpha < \beta$ hat, so existirt in dem Innern dieses Intervalls ein bestimmter Punkt x' von der Art, dass, während zwischen α und x' (x' eingeschlossen) stets $f(x) = A$ ist, in einem beliebigen Intervall $(x', x' + \varepsilon)$ rechts von x' und mit dem untern Ende in x' stets Punkte x existiren, für welche $f(x)$ nicht gleich A ist.

Denn wir können die Punkte x des Intervalls (α, β) (β eingeschlossen) in Punkte unterscheiden, welche der Bedingung, dass zwischen α und x (x eingeschlossen) $f(x)$ immer constant und gleich A sei, genügen und in solche Punkte, welche dieser Bedingung nicht genügen. Es existirt daher zwischen α und β (§ 9) ein bestimmter Punkt x', welcher die Zerlegung in die beiden angegebenen Punktclassen bewirkt. Es ist nun leicht einzusehen, dass dieser Punkt x' derjenige sein muss, von dem in dem Lehrsatz die Rede ist.

Denn für jeden Punkt x zwischen α und x' und daher auch in x' (§ 45) muss $f(x) = A$ sein; sonst würde x' die angegebene Zerlegung nicht bewirken. Dasselbe würde offenbar der Fall sein, wenn ein Intervall $(x', x' + \varepsilon)$ rechts von x' und mit dem unteren Ende in x' existirte, in welchem immer $f(x) = A$ wäre. Weil nun der Punkt x' weder mit α noch mit β zusammenfallen kann, so ist der Satz bewiesen.

§ 54. Aus diesem Lehrsatz geht offenbar hervor: Wenn zwischen α und β (α und β eingeschlossen) ein bestimmter Punkt x' existirt der Art, dass in einem beliebig kleinen Intervall, welches diesen Punkt in seinem Innern oder auch nur in einem Ende hat, die Function $f(x)$ immer einen und denselben Werth A hat, so existirt ein bestimmter Theil des Intervalls (α, β), welchem Theil der Punkt x' angehört und für dessen Punkte immer $f(x) = A$ ist, während ausserhalb dieses Theils auch für Punkte, welche seinen Enden am nächsten liegen, $f(x)$ nicht stets gleich A ist. Wir nennen zur Abkürzung einen solchen Theil einen Invariabilitätszug der Function und die Punkte des Theils Invariabili-

tätspunkte, sowie insbesondere die Endpunkte desselben Grenzpunkte der Invariabilität. Wir bemerken, dass eine Function, die zwischen α und β continuirlich und in diesem ganzen Intervall nicht constant ist, in demselben Intervall Invariabilitätszüge haben kann und dass die Anzahl dieser Züge auch unendlich gross sein kann[1]). Da der Werth der Function in irgend einem Punkt eines Invariabilitätszuges derselbe wie in den Endpunkten des Zuges ist, so können wir gelegentlich von den Invariabilitätszügen absehen und uns auf die Betrachtung der Grenzpunkte der Invariabilität beschränken.

Wenn nun in einem Intervall (α, β) die continuirliche Function $f(x)$ nicht constant ist und α und β keine ihrer Invariabilitätspunkte sind, so kann man dieses Intervall immer in zwei andere Intervalle (α, α_1), (α_1, β) zerlegen, so dass in keinem von beiden $f(x)$ constant ist. Ein Gleiches ist auch dann möglich, wenn einer der Punkte α und β oder beide Invariabilitätspunkte der Function sind. Denn, wenn alsdann α' und β' die den Invariabilitätszügen, denen die Punkte α und β angehören, entsprechenden Grenzpunkte der Invariabilität sind, so sind diese Punkte offenbar bestimmt und es genügt, einen zwischen diesen Punkten α' und β' liegenden Punkt als den Punkt α_1 zu nehmen. Weil nun jedes der beiden Theilintervalle seinerseits in zwei weitere Intervalle zerlegt werden kann, in welchen die $f(x)$ nicht constant ist, so kann man offenbar sagen: Wenn $f(x)$ in dem Intervall (α, β) nicht immer denselben Werth hat, so kann man dieses Intervall in eine beliebig grosse Anzahl Theilintervalle zer-

1) Wenn die Anzahl der Invariabilitätszüge einer Function unendlich gross ist, so kann man selbstverständlich keine Curve construiren, welche diese Function darstellt und nur in uneigentlichem Sinn wird man gelegentlich von einer Curve mit einer unendlich grossen Anzahl von Scheiteln sprechen können. Uebrigens kann man auf eine solche Unmöglichkeit geometrischer Darstellung auch dann stossen, wenn die im ganzen Intervall stets continuirliche Function entweder keine Invariabilitätszüge oder nur eine endliche Anzahl derselben hat, wie beispielsweise dann, wenn man sich die Function nur durch eine Curve dargestellt denken könnte, die aus einem Theil eines Polygons von unendlich vielen Seiten besteht, welche weder normal noch parallel zur X-Axe sind.

legen, so dass in jedem von ihnen $f(x)$ nicht immer denselben Werth hat.

---

§ 55. An den Functionen, die in einem ganzen Intervall (α, β) continuirlich sind und nicht immer denselben Werth haben, können wir noch andere Beobachtungen machen, welche uns alsdann zu einer sehr wichtigen Classification dieser Functionen führen werden.

Wie wir uns erinnern und im § 47 gesehen haben, besitzt eine jede solche Function $f(x)$ in dem gegebenen Intervall (α, β) (die Enden eingeschlossen) immer ein Maximum M und ein Minimum m aller Werthe, welche sie in diesem Intervall annehmen kann. Dieses Maximum und Minimum ist jedoch nur der grösste und kleinste aller Werthe, welche die Function zwischen α und β (α und β eingeschlossen) annehmen kann; es giebt jedoch zwischen α und β noch andere Maxima und Minima, wenn man die folgenden Definitionen einführt.

Unter der Voraussetzung, dass x' kein Invariabilitätspunkt der Function in dem Intervall (α, β) (α und β eingeschlossen) ist, sagt man: Im Punkt x' ist die Function ein Maximum oder Minimum, wenn der Werth $f(x')$, den sie in diesem Punkt annimmt, das Maximum bezüglich Minimum aller Werthe ist, welche dieselbe in jeder hinreichend kleinen Umgebung dieses Punktes annimmt.

Wenn ferner (x_1, x_2) ein Invariabilitätszug der Function ist, so sagt man: Die Function ist in jedem Punkt x' dieses Zuges und auch in dem ganzen Zug ein Maximum oder Minimum, wenn der Werth, den sie in diesem Zug hat, das Maximum bezüglich Minimum der Werthe ist, welche sie in jeder hinreichend kleinen Umgebung des einen der Invariabilitätsgrenzpunkte x_1 oder x_2 annimmt, wenn ein einziger dieser Punkte in das Innere des Intervalls (α, β) fällt, oder der beiden Grenzpunkte x_1 und x_2 dieses Zuges, wenn beide in das Innere dieses Intervalls fallen. Ausser diesen Fällen giebt es keine Maxima oder Minima in einem Punkt oder einem Invariabilitätszug der Function.

Um Zweideutigkeiten zu vermeiden, nennen wir die Zahlen M und m, von denen oben die Rede war, die absoluten

Maxima und Minima der Function in dem Intervall (α, β). Nachdem diese Benennungen eingeführt sind, ist zu bemerken, dass auch diese absoluten Maxima und Minima immer Maxima bezüglich Minima der Function entsprechen, mögen nun die diesen Werthen (§ 47) entsprechenden Punkte Invariabilitätspunkte der Function sein oder nicht. Ferner kann der Fall eintreten, dass zwischen α und β (α und β eingeschlossen) nur ein einziger Punkt oder ein einziger Invariabilitätszug der $f(x)$ vorhanden ist, in welchem diese Function einen Maximalwerth hat; dieser Werth ist alsdann M. Oder es kann sein, dass nur ein einziger Punkt oder ein einziger Zug vorhanden ist, in welchem sie einen Minimalwerth hat, dieser ist alsdann m. Es kann auch sein, dass zwischen α und β mehrere Punkte oder mehrere Züge existiren, in welchen die Function ein Maximum oder Minimum ist und in diesem Fall liegen alle Maximal- und Minimalwerthe der Function zwischen M und m oder sind diesen Zahlen bezüglich gleich. Von den (von M verschiedenen) Maxima können auch einige einem oder mehreren (jedoch von m verschiedenen) Minima gleich sein.

---

§ 56. In jedem Theil des Intervalls (α, β), welcher nicht ganz einem Invariabilitätszug angehört, existiren immer (§ 47) bestimmte Punkte oder Züge, in welchen die Function das Maximum M und das Minimum m der Werthe, welche sie in diesem Theil annehmen kann, erreicht. Weil nun $M > m$, so folgt: Wenn zwischen einem Maximum und einem Minimum der Function (Punkte oder Züge) keine anderen Maxima oder Minima liegen, so können sie nicht gleich sein und wenn die Function in zwei Punkten oder Zügen, welche nicht demselben Invariabilitätszug angehören, zwei Maxima hat, so muss zwischen ihnen wenigstens ein bestimmter Punkt oder Zug vorhanden sein, in welchem die Function ein Minimum hat, das kleiner als diese Maxima ist.

Daraus folgt: Wenn die Function in bestimmten Punkten oder Zügen Maxima und Minima hat, so kann man beim Durchwandern des Intervalls von α bis β nicht von einem Punkt oder Zug, wo die Function ein Maximum ist, zu einem anderen

Punkt oder Zug, wo sie auch ein Maximum ist, übergehen, ohne wenigstens einem Punkt oder Zug zu begegnen, in welchem sie einen Minimalwerth hat, der kleiner ist, als der Maximalwerth, von welchem man ausgegangen ist. Ferner ist die Function in dem ganzen Intervall zwischen einem Maximum und dem darauf folgenden Minimum so beschaffen, dass, wenn man aus dem Intervall durch zwei beliebige in ihm angenommene Punkte ein Theil-Intervall heraushebt, sie in den so erhaltenen Theil-Intervallen immer ihr Maximum im Anfang und ihr Minimum am Ende hat. Oder mit anderen Worten: die Function nimmt in dem Gesammt-Intervall vom Maximum zum Minimum beständig ab oder bleibt nur in einigen Zügen oder auch einer unendlich grossen Anzahl von Zügen constant, oder nach einem Ausdruck C. Neumann's[1]) sie ist monoton abnehmend. Von einem Minimum dagegen nach dem darauf folgenden Maximum nimmt die Function beständig zu oder bleibt in einigen Zügen constant, sie wächst monoton. Wenn eine Function im Innern eines Intervalls weder Maximum noch Minimum hat, sondern diese extremen Werthe nur an den Grenzen des Intervalles auftreten, sagt man die Function sei in den Intervallen monoton. Sie ist dies dann auch in jedem Theilintervall des gegebenen Intervalls. Um nun diesen Uebergang von einem Maximum zu dem darauf folgenden Minimum oder umgekehrt zu bezeichnen, sagen wir: die Function macht eine Schwankung und nennen den Unterschied zwischen dem Maximum und dem entsprechenden Minimum die Amplitude der Schwankung. Doch behalten wir uns vor den Ausdruck: Schwankung einer continuirlichen Function in einem gegebenen Intervall auch, wie oben (§ 37) geschehen, zur Bezeichnung des Unterschiedes zwischen dem Maximum und Minimum der Werthe, welche sie in diesem Intervall annimmt, zu benutzen.

---

§ 57. Wenn nun ferner ein Punkt $x = a$ zwischen α und β (α und β eingeschlossen) kein Invariabilitätspunkt ist, und die $f(x)$ in ihm ein Maximum oder Minimum hat, so

1) Citat auf S. 61.

muss eine Umgebung $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon')$ dieses Punktes vorhanden sein der Art, dass für alle Punkte $a + \delta$ und $a - \delta$, welche in derselben Umgebung auf die rechte bezüglich linke Seite von a fallen, die Differenzen

$$f(a + \delta) - f(a),\quad f(a - \delta) - f(a)$$

immer negativ oder gleich Null oder bezüglich immer positiv oder gleich Null sind, ohne dass jedoch die einen oder die anderen immer gleich Null wären. Wenn der Punkt $x = a$ einem Invariabilitätszug angehört und in ihm ein Maximum oder ein Minimum stattfindet, so müssen die obigen Differenzen denselben Bedingungen in einer Umgebung $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon')$ dieses Punktes genügen, welche in ihrem Innern einen der Invariabilitätsgrenzpunkte enthält oder beide, je nachdem nur einer dieser Punkte oder beide in das Innere des gegebenen Intervalls $(\alpha,\ \beta)$ fallen. Wenn schliesslich für $x = a$ weder ein Maximum noch ein Minimum vorhanden ist, dann ist es nicht möglich, diesen Bedingungen zu genügen, und welche Umgebungen $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon')$ man auch nehmen mag, die entsprechenden Differenzen

$$f(a + \delta) - f(a),\quad f(a - \delta) - f(a)$$

werden nicht immer, wo sie von Null verschieden sind, sämmtlich dasselbe Vorzeichen haben.

Betrachten wir nun einen Punkt $x = a$, welcher keinem Invariabilitätszug angehört, oder doch höchstens ein Invariabilitätsgrenzpunkt ist, und beschränken wir unsere Untersuchung z. B. auf die rechte Seite dieses Punktes. Dann lässt sich vielleicht ein positives ε finden, so dass in dem Intervalle $(a,\ a + \varepsilon)$ die Function $f(x)$ monoton ist. Oder aber dies ist nicht möglich, sondern, wie klein man auch ε wählen mag, die Function hat stets noch im Innern des Intervalls Maxima und Minima. In diesem Fall muss, wie klein auch ε sei, zwischen a und $a + \varepsilon$ (a ausgeschlossen) immer ein bestimmter Punkt oder Zug existiren, dem ein absolutes Maximum oder Minimum der $f(x)$ entspricht. Ist nun ε_1 ein Werth, der kleiner als ε und von der Art ist, dass zwischen a und $a + \varepsilon_1$ der eben genannte Punkt oder Zug auch nicht zum Theil enthalten ist, so kommt man für das Intervall $(a,\ a + \varepsilon_1)$ zu

denselben Schlüssen. Indem man so fortfährt, sieht man klar ein, dass die Anzahl der Maxima und Minima (Punkte oder Züge), die in einem beliebigen Intervall $(a, a + \varepsilon)$ vorhanden sind, ε mag so klein sein, wie man will, immer unendlich gross ist. Aehnliche Schlüsse gelten für die Umgebung links von a.

§ 58. Diese Untersuchungen zeigen uns, dass es continuirliche Functionen giebt, die in der Umgebung besonderer Punkte (wie zum Beispiel des Punktes $x = 0$ bei der Function $x \sin \frac{1}{x}$) eine unendlich grosse Anzahl Maxima und Minima (Punkte oder Züge) haben oder eine unendlich grosse Anzahl von Schwankungen machen. Insbesondere ist auch noch zu bemerken, dass, wenn eine Function $f(x)$ in einem gegebenen Intervall stetig ist, in einem Endpunkt dieses Intervalles, falls er kein Invariabilitätspunkt ist, entweder ein Maximum oder ein Minimum stattfindet oder in jeder Umgebung desselben eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima (Punkte oder Züge) auftritt. Falls die Function Invariabilitätszüge hat, lässt sich dieselbe Bemerkung über die Endpunkte dieser Züge machen.

§ 59. Auf Grund dieser Untersuchungen können die Functionen, welche in einem gegebenen endlichen Intervall continuirlich sind, in Functionen, welche in diesem Intervall eine endliche Anzahl von Maxima und Minima (Punkte oder Züge) oder eine endliche Anzahl von Schwankungen und in Functionen, welche in diesem Intervall eine unendliche grosse Anzahl von Maxima und Minima oder Schwankungen haben, unterschieden werden. Bei den ersten, die von C. Neumann[1]) abtheilungsweise monoton genannt werden, treten die Maxima und Minima immer in bestimmten Punkten oder Zügen des gegebenen Intervalls auf[2]), während es bei den zweiten vor-

1) Citat auf S. 61.

2) Diese Maxima und Minima können nacheinander auf die in dem § 9 auseinandergesetzte Art bestimmt werden. Man unterscheidet zu-

kommen kann, dass sie sich (in unendlich grosser Anzahl) in den Umgebungen einer nur endlichen Anzahl von besonderen Punkten häufen, so dass in den Intervallen, die übrig bleiben, wenn man diese Punkte mit einer endlichen Anzahl beliebig kleiner Intervalle herausnimmt, die Function nur eine endliche Anzahl Maxima und Minima (Punkte oder Züge) hat. Es kann bei diesen zweiten aber auch vorkommen, dass die Maxima und Minima sich in den Umgebungen einer unendlich grossen Anzahl von Punkten dieses Intervalls gruppiren, so dass man wenigstens in gewissen Theilen dieses Gesammt-Intervalls kein Intervall ausfindig machen kann, in welches nur eine endliche Anzahl von Maxima und Minima fiele.

---

§ 60. Uebrigens erkennt man leicht, dass, wenn eine continuirliche Function in einem gegebenen Intervall eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hat, die Zahl der Schwankungen (§ 56), deren Amplitude grösser als eine gegebene beliebig kleine Zahl σ ist, immer endlich ist und nur dann unbegrenzt wächst, wenn man σ unbegrenzt abnehmen lässt.

Denn sobald man für σ einen bestimmten beliebig kleinen Werth gewählt hat, kann man sich (§ 42) das gegebene Intervall (α, β) in eine endliche Anzahl von Theil-Intervallen zerlegt denken:

$$(\alpha, \alpha+\varepsilon), \quad (\alpha+\varepsilon, \alpha+2\varepsilon), \quad (\alpha+2\varepsilon, \alpha+3\varepsilon) \ldots (\alpha+n\varepsilon, \beta),$$

(wobei die Ausdehnung des letzten entweder gleich ε oder kleiner als ε ist), so dass in jedem derselben die Schwankung der Function (in dem Sinn des § 37 verstanden) kleiner als σ ist. In jedem dieser Intervalle kann daher die Function nur Schwankungen von einer Amplitude, die kleiner als σ ist,

---

erst die Punkte x zwischen α und β in solche, welche der Bedingung genügen, dass sich zwischen α und x die Function immer in demselben Sinn (zunehmend oder abnehmend) ändere oder unverändert bleibe und in solche, welche dieser Bedingung nicht genügen, bestimmt so den Punkt x', der die Zerlegung zwischen den beiden bezeichneten Punktclassen vollführt und wiederholt dasselbe Verfahren für das Intervall (x', β) u. s. w.

machen. Daraus folgt, dass die Function keine Schwankungen von grösserer Amplitude als σ machen kann, ohne sie zum Theil in einem der oben angegebenen Intervalle zum Theil in den folgenden oder vorhergehenden zu vollführen. Im ungünstigsten Fall macht also die Function eine erste Schwankung von grösserer Amplitude als σ zwischen α und $\alpha + 2\varepsilon$, eine zweite zwischen $\alpha + \varepsilon$ und $\alpha + 3\varepsilon$, eine dritte zwischen $\alpha + 2\varepsilon$ und $\alpha + 4\varepsilon, \ldots$ und schliesslich eine n^{te} zwischen $\alpha + (n-1)\varepsilon$ und β. Man hat also höchstens n Schwankungen, die grösser sind als σ und dieses beweist gerade unsere Behauptung, da n immer endlich ist, wie klein man auch σ nehmen mag und nur dann unbegrenzt zunimmt, wenn σ unbegrenzt abnimmt.

---

§ 61. Schliesslich geben wir als Beispiele zu den Functionen, welche in einem gegebenen Intervall continuirlich sind und eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima in der Umgebung einer endlichen Anzahl von Punkten desselben Intervalls haben, die einfachen Functionen

$$x \sin\frac{1}{x}, \quad \sin n x \pi \sin\frac{1}{\sin n x \pi}.$$

Während die erste die erwähnten Eigenthümlichkeiten in der Umgebung des Punktes $x = 0$ aufweist, zeigt die letztere dieses Verhalten in der Umgebung der Punkte

$$x = \frac{m}{n},$$

wenn m eine ganze Zahl ist.

In der Folge werden wir in analytischer Gestalt auch Beispiele von Functionen kennen lernen, welche in einem ganzen Intervall continuirlich sind und eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima in der Umgebung einer unendlich grossen Anzahl von Punkten eines beliebigen Theils dieses Intervalls haben.

Sechstes Kapitel.

Functionen, die unendlich oft unstetig sind.

§ 62. Wie schon früher erwähnt wurde, bezeichnet man die Functionen, welche nur in einer endlichen Anzahl von Punkten des Intervalls (α, β), in welchem sie in Betracht gezogen werden, discontinuirlich sind, als im Allgemeinen oder abtheilungsweise stetig und ihr Studium reducirt sich im Wesentlichen auf dasjenige der in einem ganzen Intervall continuirlichen Functionen. Wir gehen jetzt dazu über diejenigen Functionen zu behandeln, die in einer unendlich grossen Anzahl von Punkten des gegebenen Intervalls (α, β) discontinuirlich sind und als Functionen bezeichnet werden können, die unendlich oft discontinuirlich sind[1]).

Diese Functionen können entweder in jedem beliebigen Punkt eines oder mehrerer Theile des gegebenen Intervalls (α, β) discontinuirlich sein, oder sie können auch in jedem beliebigen Theil dieses Intervalles stets Continuitätspunkte aufweisen und werden danach in zwei grosse Klassen getheilt, indem man

punktweise oder punktirt unstetige Functionen diejenigen Functionen nennt, welche, obwohl sie in dem gegebenen Intervall (α, β) unendlich oft discontinuirlich sind, doch in jedem beliebigen Theil dieses Intervalls Continuitätspunkte haben, deren Stetigkeitspunkte also im ganzen Intervall (α, β) überall dicht sind[2]) und

total unstetige Functionen diejenigen, welche wenigstens in gewissen Theilen des gegebenen Intervalls (α, β) in allen Punkten discontinuirlich sind.

So gehören zu der Klasse der punktweise discontinuirlichen Functionen zwischen 0 und 1

1) die Function, welche in allen Punkten

---

1) Hankel bezeichnet ein solches Verhalten der Function als lineare Discontinuität. (Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. S. 23.)

2) Harnack, Math. Ann. Bd. 19 S. 242 und 24 S. 218 hat eine andere Definition.

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

wenn n die Werthe sämmtlicher ganzen Zahlen von 0 bis ∞ annimmt, den Werth Null und in den anderen Punkten den Werth 1 hat.

2) Die Function, die in dem Intervall von

$$x = 1 \quad \text{bis} \quad x = \frac{1}{2}$$

(die Enden eingeschlossen) den Werth 1, von

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{bis} \quad x = \frac{1}{2^2}$$

$\left(\frac{1}{2^2}\text{ eingeschlossen}\right)$ den Werth $\frac{1}{2}$, von

$$x = \frac{1}{2^2} \quad \text{bis} \quad x = \frac{1}{2^3}$$

$\left(\frac{1}{2^3}\text{ eingeschlossen}\right)$ den Werth $\frac{1}{2^2}$ und allgemein von

$$x = \frac{1}{2^n} \quad \text{bis} \quad x = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$\left(\frac{1}{2^{n+1}}\text{ eingeschlossen}\right)$ den Werth $\frac{1}{2^n}$ hat.

3) Die Function, die in einer unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung (§§ 12 und 14) zwischen 0 und 1 gleich Null und in den andern Punkten der Einheit gleich ist.

Zu der Klasse der total discontinuirlichen Functionen gehören dagegen zwischen 0 und 1:

1) Die Function, die für die rationalen Werthe von x zwischen 0 und 1 gleich Null und für die irrationalen Werthe der Einheit gleich ist.

2) Die Function, welche zwischen 0 und 1 überall den Werth 1 hat, ausgenommen in den Intervallen von der Ausdehnung ζ^n, deren Mittelpunkte in den Punkten

$$x = \frac{1}{2^n}$$

liegen ($n = 1, 2, 3 \ldots$), in welchen sie durch die ganze Länge derselben (die Enden eingeschlossen) für die rationalen Werthe von x gleich Null und für die irrationalen Werthe der Einheit gleich ist. Dabei ist vorausgesetzt, dass

$$\zeta < \frac{1}{4}$$

ist, so dass zwischen die aufeinander folgenden Enden

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\zeta^n, \quad \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2}\zeta^{n-1}$$

zweier beliebiger sich folgender Intervalle ζ^n und ζ^{n-1} immer ein Intervall

$$\frac{1}{2^n}\left\{1 - (2\zeta)^{n-1}(1+\zeta)\right\}$$

fällt, in welchem die Function stets der Einheit gleich ist.

§ 63. Wenn man nun die Schwankung (§ 37) betrachtet, welche die unendlich oft discontinuirlichen Functionen in den verschiedenen Theilen des gegebenen Intervalls (α, β) haben, so sieht man sofort ein, dass für die punktweise discontinuirlichen Functionen in jedem beliebigen Theil dieses Intervalls immer ein anderes Intervall existiren muss, in welchem die Schwankung der Function kleiner als eine beliebig kleine Zahl σ ist, weil in jedem solchen Theil Stetigkeitspunkte liegen müssen. Und wenn umgekehrt eine unendlich oft discontinuirliche Function dieses Verhalten für jedes beliebige σ zeigt, so überzeugt man sich leicht, dass sie punktweise discontinuirlich ist.

Nimmt man nämlich ein beliebiges Intervall (a, b) aus dem gegebenen Intervall (α, β) heraus, so lässt sich in diesem Theil ein Intervall (a_1, b_1) ausfindig machen, in welchem die Schwankung der Function kleiner ist als ein willkürlich kleines σ_1. Aus diesem letzteren kann man dann ein anderes Intervall (a_1', b_1') herausnehmen, dessen Enden von a_1 bezüglich b_1 um eine bestimmte Grösse abstehen, wie zum Beispiel der Abstand von a_1 und b_1 den vierten Theil des Intervalls (a_1, b_1) betragen kann. In dem Intervall (a_1', b_1') ist die Schwankung der Function kleiner als σ_1 und in ihm können wir ein weiteres Intervall (a_2, b_2) finden, in welchem die Schwankung kleiner als $\frac{1}{2}\sigma_1$ ist. Alsdann nehmen wir aus diesem Intervall (a_2, b_2) ein weiteres (a_2', b_2') heraus, gerade

wie vorher, dessen Enden a_2', b_2' von a_2 bezüglich b_2 um eine dem vierten Theil des Intervalls (a_2, b_2) gleiche Grösse entfernt sind. Ebenso können wir dann in dem Intervall (a_2', b_2') ein anderes Intervall (a_3, b_3) finden, in welchem die Schwankung kleiner als $\frac{1}{2^2}\sigma_1$ ist. Fährt man nun so fort, so erhält man eine Reihe von Intervallen

$$(a_1', b_1'), \quad (a_2', b_2'), \quad (a_3', b_3'), \ldots (a_n', b_n'), \ldots,$$

in welchen die Schwankung der Function nacheinander kleiner ist als

$$\sigma_1, \quad \frac{1}{2}\sigma_1, \quad \frac{1}{2^2}\sigma_1, \ldots, \quad \frac{1}{2^{n-1}}\sigma_1, \ldots,$$

und von welchen jedes beliebige ganz in den vorhergehenden Intervallen enthalten ist und auch ganz im Innern anderer Intervalle

$$(a_1 b_1), \quad (a_2, b_2), \ldots (a_n, b_n), \ldots,$$

liegt, in denen die Schwankung ebenfalls bezüglich kleiner ist als

$$\sigma_1, \quad \frac{1}{2}\sigma_1, \quad \frac{1}{2^2}\sigma_1, \ldots, \quad \frac{1}{2^{n-1}}\sigma_1 \ldots.$$

Da nun alle diese Intervalle offenbar bei unbegrenzt wachsendem n an Ausdehnung unbegrenzt abnehmen, so ist klar, dass die unteren Enden

$$a_1', a_2', a_3', \ldots a_n', \ldots$$

und die oberen Enden

$$b_1', b_2', b_3', \ldots b_n', \ldots$$

der ersten Intervalle eine und dieselbe Zahl α' bestimmen. Man überzeugt sich leicht, dass in diesem Punkt α' unsere Function $f(x)$ immer continuirlich ist.

Denn zu jeder positiven und willkürlich kleinen Zahl σ kann man immer eine Zahl n finden, vermöge deren

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sigma_1 < \sigma$$

ist und deshalb giebt es ein Intervall (a_n', b_n'), das ganz im Innern eines anderen Intervalls (a_n, b_n) liegt, in dem die Schwankung der Function kleiner als σ ist. Der Punkt α' liegt im Intervall (a_n', b_n') oder an dessen Grenzen; er liegt deshalb innerhalb des Intervalls (a_n, b_n); es ist also eine

derartige Umgebung

$$(\alpha' - \varepsilon_1, \quad \alpha' + \varepsilon')$$

dieses Punktes vorhanden, dass für alle Punkte x derselben die Differenz

$$| f(x) - f(\alpha') | < \sigma$$

ist. Deshalb ist $f(x)$ in dem Punkt α' continuirlich. Es giebt also in jedem Intervall (a, b) Stetigkeitspunkte, diese sind daher im ganzen Intervall (α, β) überall dicht, wie die Definition einer punktweise discontinuirlichen Function dies verlangt[1].

§ 64. Danach (und nach § 37) sind also die punktweise discontinuirlichen Functionen dadurch charakterisirt, dass in jedem beliebigen Theil des Intervalls, in welchem sie in Betracht gezogen werden, immer ein anderes Intervall vorhanden ist, in dem die Sprünge kleiner als eine beliebig kleine Zahl σ sind, während dagegen die total discontinuirlichen Functionen diejenigen sind, die wenigstens für gewisse Theile des gegebenen Intervalls in jedem noch so kleinen, in diesen Theilen liegenden Intervall Sprünge machen, welche grösser als eine gewisse hinreichend kleine aber bestimmte Zahl σ sind.

§ 65. Hieraus folgt, dass für total discontinuirliche Functionen die Anzahl der Punkte des gegebenen Intervalls, in welchem die Sprünge grösser als eine hinreichend kleine Zahl σ sind, immer unendlich gross ist, während es bei den punktweise discontinuirlichen Functionen und nur bei diesen auch vorkommen kann (wie zum Beispiel bei der zweiten

1) Die aufeinander folgenden Intervalle (a_n', b_n') kann man auch, statt sie, wie im Text, aus anderen Intervallen (a_n, b_n) auf die Art abzuleiten, dass man die Punkte a_n', b_n' von den Punkten a_n bezüglich b_n um den vierten Theil des Intervalls (a_n, b_n) entfernt sein lässt, auf andere Weise erhalten, so dass das Intervall (a_n', b_n'), das beständig aus dem anderen (a_n, b_n) abzuleiten ist, nicht so rasch abnimmt. Man kann alsdann, statt nur zu einem Grenzpunkt α' zu kommen, in welchem $f(x)$ continuirlich ist, auch manchmal zu einem, sagen wir, Grenzzug gelangen, in dessen sämmtlichen Punkten $f(x)$ ebenfalls stets continuirlich ist.

Function des § 62), dass diese Zahl, σ mag eine Zahl sein, welche es will, immer endlich ist und nur in dem Maasse unbegrenzt wächst, als σ unbegrenzt abnimmt.

§ 66. Daraus folgt dann weiter, dass diejenigen unendlich oft discontinuirlichen Functionen, welche in dem gegebenen Intervall abtheilungsweise monoton sind (§ 59), (womit jede Function gemeint ist, bei welcher man das gegebene Intervall in eine endliche Anzahl aufeinander folgender Theilintervalle zerlegen kann, in welchen die Function entweder niemals abnimmt oder niemals zunimmt) stets zu der Classe der punktweise discontinuirlichen Functionen gehören. Denn bei diesen Functionen müssen in jedem der Intervalle, in welchen eine Schwankung stattfindet und daher auch im ganzen Intervall (α, β) die Sprünge, die grösser als eine beliebig kleine Zahl σ sind, nur in einer endlichen Anzahl von Punkten vorkommen, weil die Function sonst, da sie immer in demselben Sinn stattfinden, unendlich gross werden müsste. Deshalb können diese Functionen nur punktweise discontinuirliche Functionen sein[1].

Siebentes Kapitel.

Derivirte einer Function.

§ 67. $f(x)$ sei eine Function, welche in einem Punkt x des Intervalls (α, β), in welchem sie in Betracht gezogen wird, endlich und continuirlich ist. Wenn x ein Punkt im Innern dieses Intervalls (α, β) ist, so nennt man die Derivirte dieser Function in diesem Punkt x den Grenzwerth des Verhältnisses

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta},$$

wenn δ der Null sowohl für positive als für negative Werthe

1) Weitere Sätze über unendlich oft unstetige Functionen finden sich bei: Ascoli, Atti d. R. Acc. d. Lincei Ser. 2. Bd. 2 S. 871 und Volterra, Giorn. di Mat. Bd. 19 (1881) S. 76.

zustrebt und unter der Voraussetzung, dass dieser Grenzwerth bestimmt, endlich und unabhängig von dem Vorzeichen von δ ist. Wenn dieser Grenzwerth unendlich gross ist (gleichviel ob von bestimmtem Vorzeichen oder nicht), so zieht man ihn manchmal auch in Betracht, sagt aber dann ausdrücklich, dass die Derivirte der $f(x)$ in dem entsprechenden Punkt x unendlich gross ist. Tritt keiner dieser Fälle ein, so pflegt man zu sagen: die Derivirte der Function $f(x)$ im Punkt x existirt nicht oder sie ist unbestimmt.

---

§ 68. Falls jedoch dieser Grenzwerth von

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$$

für $\delta = 0$ nur auf einer Seite (rechts oder links vom Punkt x) bestimmt (endlich oder unendlich) ist oder bestimmte aber auf der einen und der andern Seite verschiedene Werthe hat, pflegt man ihn manchmal auf der Seite, auf welcher er bestimmt ist, in Betracht zu ziehen; man unterscheidet alsdann aber sorgfältig den Grenzwerth rechts von demjenigen links und nennt den Grenzwerth von

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta},$$

wenn δ durch die positiven Werthe hindurch der Null zustrebt oder für $\delta = +0$, die Derivirte der Function $f(x)$ rechts von x und den Grenzwerth dieser Grösse für $\delta = -0$ die Derivirte der Function links von x. Macht man diese Unterscheidung, so ist in dem besondern Fall, wenn der Punkt x ein Endpunkt des Intervalls (α, β) ist (da man alsdann den genannten Grenzwerth nur auf der einen Seite dieses Endpunktes in Betracht ziehen kann) die Derivirte, die man in diesem Punkt erhält, nur eine Derivirte rechts oder eine Derivirte links von dem in Betracht gezogenen Endpunkt.

Wenn wir übrigens im Folgenden von Derivirten in einem Punkt sprechen, so verstehen wir darunter immer Derivirte in dem gewöhnlichen im vorhergehenden Paragraph angegebenen Sinn, es sei denn, es handle sich um den Endpunkt des Intervalls oder wir hätten ausdrücklich erwähnt, wir wollten

Derivirte rechts oder Derivirte links in Betracht ziehen. In allen andern Fällen also, die nicht im § 67 erwähnt wurden, wird die Derivirte einer Function in einem Punkt als thatsächlich nicht vorhanden betrachtet werden.

---

§ 69. Bei in einem ganzen Intervall continuirlichen Functionen wurde bis vor nicht allzu langer Zeit angenommen, dass eine endliche Derivirte für alle Punkte dieses Intervalls wenigstens im Allgemeinen[1]) vorhanden sei, ohne dass irgend eine Einwendung gegen diese Annahme gemacht worden wäre, indem man sie auf Grund weniger geometrischer über die Tangenten an die Curven angestellten Betrachtungen für erwiesen hielt. Ampère war der Erste, der — im Jahre 1806 — den Versuch machte, die Existenz dieser Derivirten analytisch nachzuweisen[2]); der Beweis jedoch, den er zu geben versuchte, beschränkte sich nicht nur auf die Functionen, welche in dem endlichen Intervall, in dem sie betrachtet werden, nur eine endliche Anzahl von Schwankungen besitzen, sondern er kann auch nicht einmal für diesen besondern Fall ein Beweis der Existenz der Derivirten genannt werden; denn er zeigt im besten Fall nur, dass die Derivirte einer solchen Function in einem ganzen Intervall, wenn diese Function nicht constant ist, nicht stets gleich Null oder stets unendlich gross sein kann, wobei der Fall der Unbestimmtheit unberücksichtigt bleibt. Ja, wenn man diesen Beweis aufmerksam prüft, so findet man, dass streng genommen nicht einmal diese Schlüsse gezogen werden können.

Die Betrachtungen Ampère's gestatten in der That nur den Schluss: Wenn die Derivirte einer Function, welche in einem ganzen Intervall continuirlich ist und niemals zunimmt oder niemals abnimmt, immer gleich Null oder immer unend-

1) Wir bemerken ausdrücklich, dass, wenn wir von einer Function sagen, sie erfülle in einem gegebenen Intervall gewisse Bedingungen oder habe gewisse gegebene Eigenschaften nur im Allgemeinen, wir damit meinen, dass die Function in allen Punkten diesen gegebenen Bedingungen genügt oder diese gegebenen Eigenschaften hat mit Ausnahme einer endlichen Anzahl einzelner Punkte dieses Intervalls.

2) Journ. Ecol. polyt. Bd. 6 (1806) S. 148.

lich gross wäre, so würde die Function eine Constante oder unendlich gross sein oder es würde für jeden im ersten Fall beliebig kleinen, im zweiten beliebig grossen Werth von σ keine positive und von Null verschiedene Zahl ε existiren der Art, dass für alle Werthe von δ, die numerisch kleiner als ε sind und für alle Werthe von x in diesem Intervall stets dem absoluten Werth nach die Ungleichungen beständen

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} < \sigma \quad \text{bezüglich} \quad \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} > \sigma .$$

Doch ist damit noch lange nicht ein Widerspruch nachgewiesen und daraus lassen sich durchaus nicht die Schlüsse ziehen, von denen wir oben gesprochen haben.

Nach dem Versuch Ampère's, die Existenz dieser Derivirten darzuthun, machten zwar andere Fragen noch weit mehr die Nothwendigkeit eines solchen Beweises oder wenigstens der Bestimmung der Continuitätsbedingungen der Function, unter welchen dieselbe Derivirte existirt, fühlbar; aber trotzdem ist kein anderer Beweis geliefert worden, der nicht im Wesentlichen alle oder einige der Bedenken böte, die den Ausführungen Ampère's entgegenstehen, und in manchen Büchern fährt man noch heute fort, sich zu diesem Zweck auf die gewohnten geometrischen Betrachtungen über die Tangenten an die die $f(x)$ darstellende Curve zu stützen. Da aber auch continuirliche Functionen (Anmerkung zu § 54) vorkommen, bei welchen eine geometrische Darstellung sich nicht einmal denken lässt, so sieht man wohl ein, wie sehr es diesen Betrachtungen an Beweiskraft fehlt und man kann daher sagen, dass mit solchen Betrachtungen die Existenz auch nur im Allgemeinen einer Derivirten für die Functionen, welche in einem ganzen Intervall continuirlich sind, nichts weniger als ausser Zweifel gestellt ist.

Ueberdies kennt man gegenwärtig auch gewisse Functionen, welche, obgleich sie in einem ganzen gegebenen Intervall stetig sind und keine Schwankungen besitzen, trotzdem eine Derivirte haben, die in einer unendlichen Anzahl von Punkten eines beliebigen Theils dieses Intervalls unendlich gross oder unbestimmt ist. Man kennt auch andere, die, obgleich in jedem beliebigen Intervall endlich und stetig, doch

niemals eine endliche und bestimmte Derivirte besitzen. Man kann daher als zweifellos annehmen, dass die Bedingung der Continuität in einem ganzen Intervall zwar eine für die Existenz der Derivirten in jedem Punkt dieses Intervalls nothwendige Bedingung, dass sie aber (wie bisher gewöhnlich angenommen wurde) keine für die Existenz der Derivirten in dem ganzen Intervall auch nur im Allgemeinen ausreichende Bedingung ist. Und wo diese Derivirte vorhanden ist, da genügt auch nicht einmal im Allgemeinen die Continuität, wie sie gewöhnlich definirt wird, sondern es muss ausser dieser Continuität andern Bedingungen, welche noch nicht bekannt sind, genügt werden oder es muss so zu sagen eine besondere Continuität vorhanden sein, welche enger begrenzt ist als diejenige, die wir definirt haben.

§ 70. Wir geben jetzt einige Sätze über abgeleitete Functionen, die zwar nicht die Existenz der Derivirten der continuirlichen Functionen beweisen (was nicht möglich ist), auch nicht die für diese Existenz nothwendigen und ausreichenden Bedingungen geben, die aber doch von grosser Wichtigkeit sind, weil sie dazu dienen, gewisse Eigenschaften der allgemeinen Functionstheorie genau festzustellen.

Lehrsatz I. Die Derivirte einer Function, welche in einem ganzen Intervall immer denselben endlichen Werth hat, ist in dem ganzen Intervall gleich Null.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Definition der Derivirten.

§ 71. Lehrsatz II. Wenn eine Function $f(x)$ in einem ganzen Intervall (α, β) (α und β eingeschlossen) endlich und stetig ist und für alle Punkte x zwischen α und β (höchstens α und β ausgeschlossen) eine Derivirte besitzt, welche endlich und bestimmt oder, wenn unendlich gross, doch von bestimmtem Vorzeichen ist, so kann diese Derivirte in einem beliebigen Theil dieses Intervalls

1) nicht immer einen unendlich grossen Werth haben,

2) nicht immer den Werth Null haben, es sei denn, dass $f(x)$ in dem ganzen in Betracht gezogenen Theil des Intervalls constant ist,

3) nicht ausschliesslich die Werthe Null und unendlich gross haben.

Zum Beweis betrachten wir einen beliebigen Theil (a, b) des gegebenen Intervalls (die Enden eingeschlossen oder nicht) und bilden die Function

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}\Big[f(b) - f(a)\Big],$$

welche für $x = a$ und $x = b$ verschwindet.

Diese Function $\psi(x)$ ist offenbar wie die $f(x)$ in dem ganzen Intervall (a, b) endlich und stetig und ihre Derivirte, die wir mit $\psi'(x)$ bezeichnen, ist immer endlich und bestimmt oder unendlich gross und von bestimmtem Vorzeichen ebenso wie die Derivirte der $f(x)$.

Da nun diese Function $\psi(x)$ für $x = a$ und $x = b$ verschwindet und immer stetig ist, so muss, wenn dieselbe nicht in dem ganzen Intervall (a, b) Null ist, nothwendigerweise (§ 47) wenigstens ein bestimmter Punkt x' in dem Innern dieses Intervalls vorhanden sein, in welchem sie thatsächlich ihren Maximal- oder Minimalwerth annimmt. Es existirt daher, gleichviel ob $\psi(x)$ zwischen a und b immer gleich Null ist oder nicht, immer wenigstens ein bestimmter Punkt x' im Innern des Intervalls (a, b), zu dem eine von Null verschiedene positive Zahl ε gefunden werden kann so, dass für alle Werthe von δ, die positiv und kleiner als ε sind, die Differenzen

$$\psi(x' + \delta) - \psi(x'), \quad \psi(x' - \delta) - \psi(x'),$$

wenn sie nicht Null sind, immer dasselbe bestimmte Vorzeichen für alle Werthe von δ haben. Die Verhältnisse

$$\frac{\psi(x' + \delta) - \psi(x')}{\delta}, \quad \frac{\psi(x' - \delta) - \psi(x')}{-\delta},$$

haben daher, wenn sie nicht gleich Null sind, jedes für sich für alle Werthe von δ dasselbe Vorzeichen und das Vorzeichen

des einen ist demjenigen des andern entgegengesetzt. Ihre Grenzwerthe für $\delta = 0$, wenn sie existiren, müssen daher gleich Null oder von verschiedenem Vorzeichen sein.

Diese Grenzwerthe aber existiren und müssen einen und denselben endlichen und bestimmten oder unendlich grossen Werth $\psi'(x')$ (von bestimmtem Vorzeichen) haben, weil nach den gemachten Voraussetzungen $f(x)$ und daher auch $\psi(x)$ in jedem Punkt im Innern zwischen a und b und daher auch im Punkt x' eine Derivirte besitzt, welche endlich und bestimmt oder wenn unendlich von bestimmtem Vorzeichen ist. Die Derivirte von $\psi(x)$ und folglich auch die von $f(x)$ kann daher offenbar für $x = x'$ nicht unendlich gross sein und kann deshalb auch nicht in allen Punkten des Intervalls (a, b) unendlich gross sein. Damit wäre der erste Theil des Lehrsatzes bewiesen.

Da nun die Derivirte der $\psi(x)$ im Punkt x' nicht unendlich gross sein kann und nach den gemachten Voraussetzungen von bestimmter Grösse sein muss, so ist klar, dass das obige Resultat nur dann bestehen kann, wenn

$$\lim \frac{\psi(x' \pm \delta) - \psi(x')}{\pm \delta} = 0$$

ist. Es ist dann

$$f'(x') = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1}$$

Wenn daher $f(x)$ zwischen a und b (höchstens a und b ausgeschlossen) eine Derivirte hat, die stets endlich und bestimmt oder wenn unendlich von bestimmtem Vorzeichen ist, so existirt immer innerhalb des Intervalls (a, b) ein bestimmter Punkt x', in welchem $f'(x)$ einen endlichen Werth hat und für welchen die obige Formel gilt.

Setzt man ferner voraus, dass die $f(x)$ zwischen a und b nicht immer denselben Werth hat, so sieht man sofort, wenn $f(a)$ und $f(b)$ von einander verschieden sind, dass dann der Werth $f'(x')$ der $f'(x)$ im Punkt x' von Null verschieden ist und wenn

$$f(a) = f(b)$$

sein sollte, so können wir immer zwischen a und b zwei andere Punkte a' und b' finden, für welche $f(a')$ nicht gleich

$f(b')$ ist und alsdann ist $f'(x')$ in dem, dem neuen Intervall (a', b') entsprechenden, Punkt x' ebenfalls von Null verschieden. Wenn daher $f(x)$ zwischen a und b nicht constant ist, so existirt immer ein bestimmter Punkt x', in welchem $f'(x)$ endlich und von Null verschieden ist. Damit sind offenbar die beiden letzten Theile des Lehrsatzes bewiesen, der somit vollständig bewiesen ist[1]).

Wir wollen noch bemerken, dass dieser Lehrsatz in seinen beiden ersten Theilen eigentlich den Inhalt dessen bildet, was Ampère für die Functionen, welche nur eine endliche Anzahl von Schwankungen in dem in Betracht gezogenen Intervall haben, hatte beweisen wollen, indem seiner Aufmerksamkeit die Möglichkeit, dass die Derivirte auch unbestimmt sein kann, entgangen war. Offenbar aber beweist dieser Lehrsatz nicht die Existenz der Derivirten, auch nicht einmal für Functionen, die nur eine endliche Anzahl von Schwankungen haben, da er ja vielmehr diese Existenz ausdrücklich voraussetzt.

---

§ 72. Der bewiesene Satz bietet Veranlassung zu einigen Bemerkungen, deren Aussprache wir dadurch vereinfachen wollen, dass wir übereinkommen zu sagen, die Derivirte einer Function in einem Punkte sei bestimmt oder eine Function habe eine bestimmte Derivirte, wenn der Grenzwerth von

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$$

endlich oder unendlich gross aber von bestimmtem Zeichen ist; gleichviel, ob δ positiv oder negativ sich der Null nähert.

1) Jedes Intervall (a, b), in welchem $f(x)$ endlich und continuirlich und nicht constant ist, kann immer in eine beliebig grosse Anzahl von Theilintervallen zerlegt werden (§ 54), so dass die $f(x)$ in jedem derselben die nämliche Eigenschaft besitzt. Wenn daher $f(x)$ in diesem Intervall (a, b) (höchstens a und b ausgeschlossen) eine Derivirte $f'(x)$ hat, welche immer endlich und bestimmt oder wenn unend-

1) O. Bonnet in Serret Calc. diff. et int. Bd. 1 S. 17.

lich von bestimmtem Vorzeichen ist, so muss in jedem dieser Theilintervalle, in welche sich das ganze Intervall zerlegen lässt, wenigstens ein Punkt x' existiren, in welchem $f'(x)$ endlich und von Null verschieden ist. Man kann daher behaupten: Wenn eine Function $f(x)$ in einem gegebenen Intervall endlich und continuirlich und nicht constant ist und in allen Punkten des Intervalls höchstens seine Endpunkte ausgenommen eine bestimmte Derivirte besitzt, so existiren in jedem Theil dieses Intervalls immer unendlich viele Punkte, in welchen diese Derivirte endlich und von Null verschieden ist. Damit soll aber durchaus nicht die Möglichkeit ausgeschlossen werden, dass in andern Punkten (auch in unendlich grosser Anzahl) desselben Theilintervalls diese Derivirte auch gleich Null und in andern unendlich gross sein kann.

2) Theilt man das ganze Intervall wieder in mehrere Theilintervalle und wendet den vorigen Satz an, so erhält man: Wenn $f(x)$ endlich und continuirlich ist und ausserdem in dem ganzen Intervall wie im vorigen Fall eine bestimmte Derivirte besitzt, so sind die Punkte, in welchen diese Derivirte nicht unendlich gross ist, in jedem beliebigen Theil dieses Intervalls überall dicht (§ 13), und dasselbe ist offenbar auch für die Punkte der Fall, in welchen die Derivirte von Null verschieden ist, sobald die Function in dem gegebenen Intervall keine Invariabilitätszüge hat.

3) Oder allgemein, indem wir zusammenfassen: Wenn eine Function $f(x)$ in einem gegebenen Intervall endlich und stetig ist, so kann ihre Derivirte in jedem Theil dieses Intervalls, in welchem die Function nicht constant ist, nicht immer Null oder immer unendlich gross und von bestimmtem Vorzeichen sein, sondern muss in einer unendlich grossen Anzahl von Punkten dieses Theils (wenn nicht in allen) entweder endlich und von Null verschieden oder unendlich und nicht von bestimmtem Vorzeichen oder gänzlich unbestimmt sein.

Beachtet man, dass die Differenz

$$f(x+\delta)-f(x),$$

wenn $f(x)$ in dem ganzen Intervall eine endliche und continuirliche Function ist, bei beständig abnehmendem δ das Vorzeichen nicht wechseln kann ohne durch Null durchzugehen, so ist nach der Definition der unendlich grossen Grenzwerthe (§ 17) ersichtlich, dass die Punkte x' (wenn sie existiren), in welchen die Derivirte dieser Function unendlich gross und von unbestimmtem Vorzeichen ist, solche Punkte nicht sein können, in deren Nähe

$$f(x'+\delta)-f(x')$$

unendlich oft vom Positiven zum Negativen übergeht oder umgekehrt, während man nur auf einer Seite (rechts oder links von dem Punkt x') bleibt, weil sonst die Derivirte der $f(x)$ im Punkt x' gleich Null oder durchaus unbestimmt wäre. Daraus folgt, dass die Punkte x', in denen die Function $f(x)$ unendlich gross und von unbestimmtem Vorzeichen ist, nur die im Innern des Intervalls gelegenen Punkte sein können, in welchen die Derivirte rechts unendlich gross und von bestimmtem Vorzeichen und die Derivirte links ebenfalls unendlich gross und von entgegengesetztem Vorzeichen ist. In ihnen hat die Function ein Maximum oder ein Minimum. Wenn also eine Function $f(x)$ in dem ganzen in Betracht gezogenen Theil des gegebenen Intervalls stetig und monoton ist, so kann ihre Derivirte zwar in gewissen Punkten (auch von unendlich grosser Anzahl) dieses Theils unbestimmt sein, aber sie kann nie unendlich gross und von unbestimmtem Vorzeichen sein.

Es sind mithin für die Derivirten einer endlichen und continuirlichen Function rechts oder links von einem Punkt a nur die folgenden drei Fälle möglich:

a) Sie sind endlich und bestimmt,

b) unendlich und von bestimmtem Vorzeichen,

c) ganz und gar unbestimmt.

4) Den zweiten Theil des Lehrsatzes des vorigen Paragraphen kann man jetzt auch allgemeiner so fassen: Wenn eine Function $f(x)$ in einem gegebenen Intervall endlich und continuirlich ist und ihre Derivirte in allen

Punkten höchstens mit Ausnahme derjenigen einer abzählbaren Menge G, für welche ihr Verhalten unbekannt ist, stets gleich Null ist, so hat sie in diesem Intervall stets denselben Werth.

Nehmen wir nämlich zuerst an, die auszuscheidende Punktmenge sei von der ersten Gattung und der nullten Art, das heisst diese Punkte seien in endlicher Anzahl vorhanden und scheiden wir sie mit beliebig kleinen Intervallen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ aus. In jedem der übrig bleibenden Intervalle i_s hat die Function $f(x)$ immer die Derivirte Null; in ihnen also ist

$$f(x) = c_s,$$

unter c_s eine Constante verstanden. Weil nun die Function $f(x)$ auch in den ausgeschiedenen Punkten continuirlich sein muss und die Intervalle $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$, die diese Punkte ausscheiden, beliebig klein vorausgesetzt werden können, so müssen die Constanten c_s offenbar (§ 45) einander gleich sein und $f(x)$ muss daher im ganzen Intervall gleich c sein, wenn c eine Constante bedeutet.

Zu demselben Ergebniss kommt man auch, wenn die auszuscheidende Punktmenge G von der ersten Art (§ 12) ist. Scheidet man nämlich mit willkürlich kleinen Intervallen

$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$$

die Punkte der abgeleiteten Menge G' aus, welche, wie bekannt, bestimmt und in endlicher Anzahl vorhanden sind, so können in jedes der übrig bleibenden Intervalle i_s nur eine endliche Anzahl Punkte der Menge G fallen und in jedem dieser Intervalle i_s hat man daher $f(x) = c_s$ einer Constanten. Und da in den Punkten von G', die wir ausgeschieden haben, $f(x)$ continuirlich ist und die Intervalle, mit Hülfe deren diese Punkte herausgenommen wurden, beliebig klein vorausgesetzt werden können, so kann man, wie vorher, schliessen, dass die Constanten c_s einander gleich sind und dass daher im ganzen Intervall $f(x) = c$ ist.

Setzt man nun voraus, dass die fragliche Eigenschaft für eine Menge von der $(\nu - 1)^{\text{ten}}$ Art oder auch von einer niedrigeren Art nachgewiesen worden sei, so existirt sie offenbar auch, wenn die Menge von der ν^{ten} Art ist. Denn scheidet

man mit beliebig kleinen Intervallen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ die Punkte der Menge $G^{(\nu)}$ der ν^{ten} Ableitung von G (welche, wie bekannt, bestimmt und in endlicher Anzahl vorhanden sind) aus, so fallen in die übrig bleibenden Intervalle i_s nur solche Punkte von G, welche höchstens als zur Gruppenmenge von der $(\nu - 1)^{\text{ten}}$ Art gehörig betrachtet werden können. Es ist deshalb in jedem dieser Intervalle i_s:

$$f(x) = c_s$$

einer Constanten, wie oben. Und wegen der Continuität der $f(x)$ in den Punkten von $G^{(\nu)}$, die wir ausgeschieden haben, kommen wir wie vorher zu dem Schluss, dass in dem ganzen Intervall $f(x) = c$ einer Constanten sein muss. So ist offenbar der Lehrsatz in allen Fällen bewiesen.

Es ist klar, dass, während man vorher über die Existenz oder den Werth der Derivirten der $f(x)$ in den Punkten der Gruppe G noch im Zweifel sein konnte, solche Zweifel durch unsern Beweis beseitigt werden. Wenn $f(x)$ den in dem Satz enthaltenen Bedingungen genügt, so ist ihre Derivirte auch in den Punkten der Menge G gleich Null.

4*) Zu demselben Ergebniss kommt man im allgemeinen Falle in folgender Weise[1]):

Gesetzt es wäre $f(x) - f(\alpha)$ für einen Werth x_1 von x positiv $= p$. Die Function

$$\varphi(x, c) = f(x) - f(\alpha) - c(x - \alpha),$$

in der c eine positive Constante ist, hat für $x = \alpha$ den Werth Null; für $x = x_1$ ist ihr Werth

$$= p - c(x_1 - \alpha),$$

welcher grösser als ein zwischen 0 und p gewählter Werth q wird, wenn

$$c < \frac{p - q}{x_1 - \alpha}.$$

Der Werth

$$\frac{p - q}{x_1 - \alpha}$$

sei mit C bezeichnet. Dann ist, für

$$c < C: \quad \varphi(x_1, c) > q;$$

1) Scheeffer Acta Math. Bd. 5 S. 283.

und weil $\varphi(\alpha, c) = 0$, so wird es (§ 15) eine obere Grenze ξ der Werthe von x geben, für welche

$$\varphi(x, c) \leq q$$

ist. Dieser Werth ξ ist sicher $< x_1$, denn $\varphi(x_1, c)$ ist ja schon $> q$. Somit ist auch $\xi < \beta$. Weil die Function φ stetig ist, ist (§ 46)

$$\varphi(\xi, c) = q, \quad \varphi(\xi + h, c) > q$$

für jedes h, das > 0 und $< x_1 - \xi$. Folglich ist

$$\varphi(\xi + h, c) - \varphi(\xi, c)$$

für die genannten Werthe von h positiv und

$$\lim \frac{\varphi(\xi + h, c) - \varphi(\xi, c)}{h} \geq 0,$$

wenn es existirt. Wäre ξ ein Punkt, der nicht zu G gehörte, so wäre aber, nach der Annahme über die Ableitung von $f(x)$, dieser Grenzwerth $= -c$, also negativ. Also muss ξ ein Punkt von G sein. Ist q gewählt, so ist ξ nur von c abhängig und jedem c, das > 0 und $< C$ ist, entspricht ein ξ. Aber jedem ξ entspricht auch nur ein Werth von c. Denn würden c und c' denselben Werth ξ liefern, so wäre $q = \varphi(\xi, c)$ und $\varphi(\xi, c')$, daher

$$(c' - c)(\xi - \alpha) = 0.$$

$\xi = \alpha$ ist aber nicht möglich, weil

$$\varphi(\alpha, c) = 0 < q$$

ist. Daher müsste $c = c'$ sein. Nehmen wir nun aus der Menge G diejenigen Zahlen heraus, welchen überhaupt ξ gleich werden kann, während c zwischen δ und $C - \varepsilon$, (wo δ und ε positiv und beliebig klein) diese Grenzen eingeschlossen, variirt, so entsteht eine Menge, die als Theil einer abzählbaren Menge selbst abzählbar sein muss und deren Zahlen gegenseitig eindeutig auf das Continuum $\delta \cdots C - \varepsilon$ bezogen sind, so dass hiernach dieses Continuum abzählbar wäre.

Wäre $f(x) - f(\alpha)$ für einen Werth x_1 zwischen α und β negativ $= -p$, so würde die Betrachtung von

$$f(x) - f(\alpha) + c(x - \alpha),$$

mit positivem c, auch das eben gefundene Resultat liefern. Darin, dass das Continuum $\delta \cdots C - \varepsilon$ abzählbar sein solle,

liegt aber — wie sofort bewiesen werden soll — ein Widerspruch, der sich nur löst, wenn man schliesst, dass

$$f(x) - f(\alpha)$$

weder > 0 noch < 0, sondern $= 0$ ist, dass also die Behauptung des Satzes richtig ist.

Um zu zeigen, dass ein Continuum nicht abzählbar sein kann, nehmen wir an, es sei abzählbar und seine Punkte seien, in eine Reihe nach ihren Nummern geordnet, $w_1 w_2 w_3 \ldots$, so dass in dieser Reihe jeder Punkt des Continuums auftrete. Um darin einen Widerspruch nachzuweisen[1]), betrachten wir das Intervall $w_1 \,..\, w_2$. Wenn w_3 in dem Intervall liegt, so betrachten wir weiter das Intervall $w_2 \ldots w_3$. Liegt w_3 nicht zwischen w_1 und w_2, so gehen wir zu $w_4 \,..$ über. Es sei w_a der Punkt mit niedrigster Nummer, der zwischen w_1 und w_2 fällt. Im Intervall $w_2 \,..\, w_a$ sei dann wieder w_b der Punkt niedrigster Nummer, in dem $w_a \,..\, w_b$, der w_c, u. s. w. ohne Ende. Man erhält so eine unendliche Reihe in einander liegender Intervalle, deren linke Endpunkte $\alpha' \alpha'' \alpha''' \ldots$, deren rechte $\beta' \beta'' \beta''' \ldots$ seien. Die Zahlen der ersten Reihe wachsen, die der zweiten nehmen ab, soweit sie sich nicht gleich bleiben. Dabei sind aber alle $\alpha < \beta'$ und alle $\beta > \alpha'$. Daher nähern sich die Zahlen α einer Grenze α^∞ und die β einer β^∞, wobei $\beta^\infty > \alpha^\infty$ ist. Ist $\beta^\infty > \alpha^\infty$, so ist das Intervall $\alpha^\infty \,..\, \beta^\infty$ ganz in allen den früheren Intervallen $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$, .. enthalten. Jeder seiner Punkte muss dann eine bestimmte Nummer haben, diese müsste aber grösser sein als irgend eine Zahl der Reihe $1 2 a b c \ldots$, was offenbar nicht möglich ist, weil jede dieser unendlich vielen Zahlen mindestens um 1 grösser ist als die vorhergehende. Wäre aber $\beta^\infty = \alpha^\infty$, so müsste auch dieser Punkt eine bestimmte Stellenzahl haben und es ergäbe sich die gleiche Unmöglichkeit.

5) Die letzte Bemerkung in 4) führt uns dann auf das Folgende:

Wenn zwei Functionen $f(x)$ und $F(x)$ in einem ge-

---

1) Cantor, Journ. f. Math. Bd. 77 S. 260. Der obige Beweis zeigt zugleich, dass es in jedem Intervall Zahlen geben muss, die nicht zu einer gegebenen abzählbaren Menge gehören. Denn sonst wäre ja das Continuum jenes Intervalles abzählbar.

gebenen Intervall immer endlich und continuirlich sind und in allen Punkten höchstens mit Ausnahme einer abzählbaren Menge G, für welche die Derivirte ungewiss ist, eine und dieselbe endliche und bestimmte Derivirte besitzen, oder wenn sie von der Art sind, dass die auftretende Unbestimmtheit dieser Derivirten für beide dieselbe ist (das heisst so, dass die Differenz der beiden Functionen zur Derivirten Null hat), alsdann können diese Functionen in diesem Intervall nur um eine constante Grösse differiren.

Die Unentschiedenheit, die in den Punkten der Menge G stattfindet, kann darin bestehen, dass die Existenz der Derivirten für eine oder für beide Functionen $f(x)$ und $F(x)$ ungewiss ist, oder darin, dass es zweifelhaft ist, ob die Werthe dieser Derivirten, wenn man weiss, dass sie existiren und endlich sind, einander gleich sind, oder darin, dass die Eine oder Andere unendlich gross und von bestimmtem oder unbestimmtem Vorzeichen ist. Hat man sich nun nicht auf die eine oder andere Weise darüber Gewissheit verschafft, dass die Derivirten der $f(x)$ und $F(x)$ auch für die Punkte von G wenigstens bei einer der beiden Functionen existiren (und dass also die Ungewissheit sich nur auf die Gleichheit ihrer Werthe oder die Existenz der Derivirten einer einzigen der beiden Functionen bezieht), so lässt uns der obige Satz über die Existenz oder die Natur dieser Derivirten in diesen Punkten überhaupt im Ungewissen.

6) Aus der Formel (1) folgt dann weiter: Wenn die Function $f(x)$ in dem ganzen Intervall endlich und continuirlich ist und in allen Punkten höchstens mit Ausnahme der Endpunkte dieses Intervalls durchweg eine bestimmte Derivirte hat, und man mit x und $x+h$ (h positiv oder negativ genommen) zwei beliebige Punkte dieses Intervalls (die Enden eingeschlossen) und mit Θ eine zwischen 0 und 1 (0 und 1 ausgeschlossen) gelegene Zahl bezeichnet, die von x und h abhängt, so ist stets:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\Theta h).$$

7) Allgemeiner lässt sich sagen: Wenn eine Function

$f(x)$ in einem ganzen Intervall endlich und stetig ist und, höchstens eine endliche Anzahl von Punkten $a_1, a_2, a_3 \ldots$, ausgenommen, in denen es ungewiss ist, in allen andern Punkten eine bestimmte Derivirte hat, die eine endliche Zahl nicht überschreiten kann, und wenn die Verhältnisse

$$\frac{f(a_1+\delta)-f(a_1)}{\delta}, \quad \frac{f(a_2+\delta)-f(a_2)}{\delta}, \ldots$$

für die Punkte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit dem numerischen Abnehmen der δ zwar nicht endlichen und bestimmten Grenzwerthen zustreben, sondern nur zwischen endlichen Zahlen (§ 24) hin- und herschwanken und man dann mit x und $x+h$ zwei beliebige Punkte desselben Intervalls bezeichnet, so hat man

$$f(x+h)-f(x)=h\mathsf{A},$$

worin A eine von x und h abhängige Grösse ist, die ihrem absoluten Werth nach niemals eine gegebene endliche und positive Zahl überschreiten kann.

Denn wenn $f(x)$ zwischen x und $x+h$ (höchstens x und $x+h$ ausgeschlossen) stets eine bestimmte Derivirte hat, so folgt dieser Satz unmittelbar aus dem Vorhergehenden. Es ist deshalb nur nöthig, den Fall in Betracht zu ziehen, in welchem ein oder mehrere Punkte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in das Innere des Intervalls von x bis $x+h$ fallen.

In diesem Fall nun existirt nach den gemachten Voraussetzungen eine positive und von Null verschiedene Zahl δ_1 von der Beschaffenheit, dass die Verhältnisse

$$\frac{f(a_1+\delta)-f(a_1)}{\delta}, \quad \frac{f(a_2+\delta)-f(a_2)}{\delta} \ldots$$

für δ, die numerisch kleiner als δ_1 sind und für $\delta = \pm\delta_1$ sämmtlich numerisch kleiner als eine endliche Grösse g sind, während dagegen dieselben Verhältnisse für δ, die numerisch grösser als δ_1 sind, sämmtlich ihrem absoluten Werth nach unter $\frac{2g'}{\delta_1}$ bleiben, wenn g' der Maximalwerth der $|f(x)|$ in dem gegebenen Intervall ist. Bezeichnet man daher mit A' die grössere der beiden Zahlen g und $\frac{2g'}{\delta_1}$ und nimmt an, dass

wenigstens einer der Punkte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zum Beispiel der Punkt a_1 in das Innere des Intervalls von x bis $x + h$ falle, so dass man

$$x = a_1 \mp \delta, \quad x + h = a_1 \pm \delta',$$

worin δ und δ' positiv sind, setzen kann, so erhält man

$$| f(a_1 \pm \delta') - f(a_1) | < \delta' \mathsf{A}', \quad | f(a_1 \mp \delta) - f(a_1) | < \delta \mathsf{A}'$$

und deshalb auch

$$| f(a_1 \pm \delta') - f(a_1 \mp \delta) | < (\delta + \delta') \mathsf{A}'$$

und daraus folgt, unter h_1 eine Grösse verstanden, die numerisch kleiner als die Einheit ist,

$$f(x + h) - f(x) = h h_1 \mathsf{A}',$$

womit offenbar der Satz bewiesen ist.

8) Aus dem unter 6) Gesagten, sowie den Untersuchungen des § 71 geht dann noch insbesondere hervor: Wenn die Function $f(x)$ in dem Intervall (a, b) immer endlich und stetig ist und in allen Punkten, höchstens mit Ausnahme der Endpunkte des Intervalls, eine bestimmte Derivirte besitzt, und wenn überdies diese Function $f(x)$ in den Endpunkten a und b denselben Werth hat, so existirt stets wenigstens ein bestimmter Punkt x' in dem Innern des Intervalls (a, b), in welchem $f'(x') = 0$ ist.

9) Durch Verallgemeinerung des unter 6) Gesagten findet man: Wenn eine Function $f(x)$ in einem ganzen Intervall $(x_0, x_0 + h)$ endlich und continuirlich ist und in allen Punkten desselben, höchstens mit Ausnahme der Endpunkte, eine bestimmte Derivirte besitzt und wenn dann weiter eine andere Function $F(x)$ in demselben Intervall ebenfalls endlich und continuirlich ist und in jedem von den Endpunkten x_0 und $x_0 + h$ verschiedenen Punkten eine endliche und von Null verschiedene Derivirte besitzt, während in diesen Endpunkten keine Derivirte zu existiren braucht oder dieselbe gleich Null oder unendlich gross sein kann, so ist, wenn Θ eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl ist (0 und 1 ausgeschlossen)

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{F(x_0+h)-F(x_0)}=\frac{f'(x_0+\Theta h)}{F'(x_0+\Theta h)}.$$

Denn nach den für $F(x)$ aufgestellten Bedingungen kann

$$F(x_0+h)-F(x_0)$$

(vergleiche Nr. 8) nicht gleich Null sein; es hat also einen Sinn, mit dieser Differenz als Nenner die Function zu bilden

$$\varphi(x)=f(x)-f(x_0)-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{F(x_0+h)-F(x_0)}\Big[F(x)-F(x_0)\Big],$$

welche für $x=x_0$ und für $x=x_0+h$ verschwindet. Nach dem in Nr. 8 aufgestellten Satz ist es klar, dass ein Punkt $x_0+\Theta h$ innerhalb des gegebenen Intervalls existiren muss, für welchen

$$\varphi'(x_0+\Theta h)=0$$

ist, woraus dann die oben gegebene Formel hervorgeht.

Anstatt anzunehmen, dass $F'(x)$ zwischen x_0 und x_0+h niemals gleich Null oder unendlich gross sein kann, könnte man auch voraussetzen, dass $f'(x)$ sich so verhielte und dass $F(x_0+h)$ nicht gleich $F(x_0)$ wäre u. s. w.

§ 73. Aus dem in der letzten der vorhergehenden Ausführungen enthaltenen Satz lassen sich noch andere sehr wichtige Ergebnisse ableiten, welche man sonst gewöhnlich nicht mit der ganzen Strenge und der ganzen Allgemeinheit bewiesen findet, die man bei ihnen anwenden kann.

Wir wollen annehmen, unsere Function $f(x)$ könne zwar bei der unbegrenzten Annäherung der x an eine Zahl α rechts oder links, zum Beispiel rechts, auch in's unendlich Grosse wachsen oder unendlich klein werden, oder es könne auch für $x=\alpha$ eine Discontinuität der ersten oder der zweiten Art stattfinden, doch habe die Function ausserhalb des Punktes α in den Punkten einer hinreichend kleinen Umgebung auf der rechten Seite von α immer endliche Werthe[1]), sei stetig und

1) Um Irrthümer zu vermeiden, wird es gut sein, ein für alle Mal zu bemerken, dass, wenn wir von einer Grösse $f(x)$ und $f'(x)$ sagen, sie seien in den Punkten jeder Umgebung von α (α ausgeschlossen) immer endlich oder hätten immer endliche Werthe, damit nicht ausgeschlossen ist, dass einige dieser Werthe, wenn sie auch in jedem speciellen

besitze eine bestimmte Derivirte $f'(x)$. Wir stellen uns nun die Aufgabe, zu untersuchen, auf welche Art das Verhalten der $f(x)$ bei der unbegrenzten Annäherung der x an α von dem Verhalten der $f'(x)$ abhängt.

Zu dem Ende nehmen wir in dem am Ende des vorigen Paragraphen gegebenen Satz zuerst an, $F(x)$ verhalte sich ebenso, wie wir dies eben von $f(x)$ gesagt haben, werde also auch unendlich, wenn x sich dem α nähert. Nimmt man nun

$$x_0 = \alpha + \delta\,, \quad x_0 + h = \alpha + \varepsilon\,,$$

unter δ und ε positive beliebig kleine Zahlen verstanden und $\delta < \varepsilon$ gesetzt. Dann ist

$$(2) \qquad \frac{f(\alpha+\varepsilon)}{F(\alpha+\delta)} - \frac{f(\alpha+\delta)}{F(\alpha+\delta)} = \left(\frac{F(\alpha+\varepsilon)}{F(\alpha+\delta)} - 1\right)\frac{f'(\alpha+\delta_1)}{F'(\alpha+\delta_1)}\,,$$

wo δ_1 zwischen δ und ε liegt. Zu einem gegebenen ε kann man nun δ so klein annehmen, dass die beiden Quotienten

$$\frac{f(\alpha+\varepsilon)}{F(\alpha+\delta)}\,, \quad \frac{F(\alpha+\varepsilon)}{F(\alpha+\delta)}$$

beliebig klein werden. Damit erhält man offenbar

$$(3) \qquad \lim_{\delta=0} \frac{f(\alpha+\delta)}{F(\alpha+\delta)} = \lim_{\delta_1=0} \frac{f'(\alpha+\delta_1)}{F'(\alpha+\delta_1)}$$

jedesmal, wenn wenigstens der eine dieser beiden Grenzwerthe endlich und bestimmt oder unendlich gross ist [1]).

Setzt man

$$F(x) = (x-\alpha)^{-m}\,,$$

wo m positiv ist, und beachtet, dass, wenn

$$f'(\alpha+\delta)\,\delta^{m+1} \quad \text{für} \quad \delta = 0$$

oder

$$f'(x)\,(x-\alpha)^{m+1} \quad \text{für} \quad x = \alpha + 0$$

einen bestimmten und endlichen oder unendlich grossen Grenzwerth hat, dieser Grenzwerth offenbar derjenige von

---

Punkt immer endlich sind, doch bei der stets grösseren Annäherung der x an α ins Unendliche wachsen können.

Sagen wir dagegen von einer Function $f(x)$, dass sie einem ganzen Intervall endlich wäre, ohne sonst etwas zuzufügen, so meinen wir immer, dass alle ihre Werthe zwischen endlichen Zahlen liegen.

1) Stolz, Math. Ann. Bd. 14 S. 231 u. Bd. 15 S. 556. Du Bois-Reymond, Journ. f. Math. Bd. 74 S. 297.

$$f'(\alpha + \delta_1)\,\delta_1^{m+1}$$

ist, so findet man, dass in diesen Fällen

$$\lim f(x)\,(x - \alpha)^m = -\frac{1}{m} \lim f'(x)\,(x - \alpha)^{m+1}, \qquad (4)$$

wenn die Grenzwerthe für $x = \alpha + 0$ genommen werden. Wir können daher den Satz aufstellen: Wenn die Function $f(x)$ in den Punkten einer Umgebung zur Rechten des Punktes α (α ausgeschlossen) endlich und continuirlich ist und ihre Derivirte $f'(x)$ in denselben Punkten endlich und bestimmt ist und wenn alsdann für einen gegebenen positiven Werth der Constanten m das Product $f'(x)(x-\alpha)^{m+1}$ für $x=\alpha+0$ einen bestimmten und endlichen Grenzwerth A hat, so hat die Grösse $f(x)(x-\alpha)^m$ ebenfalls einen bestimmten und endlichen Grenzwerth $-\frac{A}{m}$ und wenn die erste dieser Grössen zum Grenzwerth $\pm\infty$ hat, so hat die zweite als Grenzwerth $\mp\infty$.

Setzt man z. B.

$$f(x) = \left[l(x-\alpha)\right]^{m_1},\ m_1 > 0,$$

so ist

$$\lim \left[l(x-\alpha)\right]^{m_1}(x-\alpha)^m = -\frac{m_1}{m} \lim \left[l(x-\alpha)\right]^{m_1-1}(x-\alpha)^m.$$

Indem man dieselbe Gleichung wieder anwendet, bis der Exponent des Logarithmus negativ geworden ist, findet sich, dass

$$\lim \left[l(x-\alpha)\right]^{m_1}(x-\alpha)^m = 0$$

ist, wenn m und m_1 beide > 0 sind. Nimmt man weiter

$$f(x) = \left[ll(x-\alpha)\right]^{m_2}$$

und

$$F(x) = \left[l(x-\alpha)\right]^{-m_1}(x-\alpha)^{-m},$$

m_2, m_1 und m positiv, so folgt

$$\lim\,(x-\alpha)^m\left[l(x-\alpha)\right]^{m_1}\left[ll(x-\alpha)\right]^{m_2} =$$

$$= -\lim \frac{m_2(x-\alpha)^m\,[l(x-\alpha)]^{m_1}\,[ll(x-\alpha)]^{m_2-1}}{m\,l(x-\alpha) + m_1}$$

$$= -\frac{m_2}{m} \lim\,(x-\alpha)^m\left[l(x-\alpha)\right]^{m_1-1}\left[ll(x-\alpha)\right]^{m_2-1}.$$

Indem man diese Gleichung wiederholt anwendet, zeigt man, dass der Grenzwerth $= 0$ ist. In dieser Weise kann man nach und nach die Richtigkeit der in § 28 benutzten Grenzwerthe nachweisen. Wenn man in dem angezogenen Satz

$$F(x) = l(x - \alpha)$$

setzt, erhält man den Satz: Unter denselben Voraussetzungen in Bezug auf die Function $f(x)$ und ihre Derivirte $f'(x)$ kann man auch sagen, dass, wenn

$$f'(x)(x - \alpha) \quad \text{für} \quad x = \alpha + 0$$

einen endlichen und bestimmten Grenzwerth A hat, die Grösse $\frac{f(x)}{l(x - \alpha)}$ denselben Grenzwerth A hat und wenn $f'(x)(x - \alpha)$ als Grenzwerth $\pm\infty$ hat, auch $\frac{f(x)}{l(x-\alpha)}$ zum Grenzwerth $\pm\infty$ hat. In diesen Fällen gilt die Gleichung:

$$(5) \qquad \lim_{x=\alpha+0} \frac{f(x)}{l(x - \alpha)} = \lim_{x=\alpha+0} f'(x)(x - \alpha).$$

Aehnliche Sätze würde man finden, wenn man in dem angezogenen Satz

$$F(x) = (x - \alpha)^{-m} l(x - \alpha)$$

bei positivem m nähme u. s. w.

Man bemerke ferner: Wenn die Grössen

$$f'(\alpha + \delta)\,\delta^{m+1} \quad \text{oder} \quad f'(\alpha + \delta)\,\delta$$

bei unbegrenzt abnehmendem δ, ohne einen bestimmten Grenzwerth zu haben, innerhalb endlicher, von Null verschiedener und mit demselben Vorzeichen versehener Grenzen hin- und herschwanken, so ist dasselbe auch der Formeln (3) und (5) wegen mit den Grössen

$$f(\alpha + \delta)\,\delta^{m} \quad \text{oder} \quad \frac{f(\alpha + \delta)}{l\delta}$$

der Fall oder diese Grössen haben einen endlichen, bestimmten und von Null verschiedenen Grenzwerth. Deswegen und wegen der eben aufgestellten Sätze kann man nun auch behaupten (§ 28): Wenn die Derivirte der $f(x)$ bei der unbegrenzten Annäherung von x an α (auf der rechten Seite) immer bestimmt und endlich ist (einerlei ob continuirlich oder nicht), aber ins Unendliche wächst und für $x = \alpha + 0$ unendlich gross von der ersten

Ordnung bezüglich von der $(m+1)^{\text{ten}}$ Ordnung wird, so wird die Function $f(x)$ für $x = \alpha + 0$ unendlich gross nur von der logarithmischen Ordnung bezüglich von der m^{ten} Ordnung.

Man bemerkt ferner noch: Wenn in jeder hinreichend kleinen Umgebung von α zur Rechten stets Punkte vorhanden sind, in welchen die Derivirte $f'(x)$ der $f(x)$ unendlich gross und von bestimmtem Vorzeichen ist, so können die Produkte

$$f'(x)(x-\alpha)^{m-1} \quad \text{für} \quad m > 0$$

keinen endlichen und bestimmten Grenzwerth, sondern höchstens den Grenzwerth unendlich haben. Die Gleichungen der beiden obigen Sätze (2) und (4) können daher nur bestehen, wenn

$$\lim_{x=\alpha+0} f'(x)(x-\alpha)^{m+1} = \pm\infty.$$

---

§ 74. Nimmt man nun in der Formel (2)

$$F(x) = (x-\alpha)^p$$

mit $p > 0$, so erhält man:

$$f(\alpha+\varepsilon) - f(\alpha+\delta) = (\varepsilon^p - \delta^p)\frac{f'(\alpha+\delta_1)\,\delta_1^{\,1-p}}{p}. \qquad (6)$$

Wenn die Grösse $f'(\alpha+\delta)\,\delta^{1-p}$ bei positivem aber beliebig kleinem p zum Grenzwerth Null oder eine endliche Grösse hat oder zwischen endlichen Grenzwerthen hin- und herschwankt, so kann man es augenscheinlich so einrichten, dass die Differenz

$$f(\alpha+\varepsilon) - f(\alpha+\delta)$$

für alle Werthe von δ, die kleiner als ε sind, und bei hinreichend kleinem ε numerisch immer kleiner als irgend eine beliebig gegebene Grösse σ sei. Daraus folgt (§ 22), dass $f(x)$ für $x = \alpha + 0$ in einem solchen Fall einen bestimmten und endlichen Grenzwerth A hat, so dass man also den Schluss ziehen kann: Wenn die Function $f(x)$ in den Punkten einer Umgebung von α zur Rechten (α ausgeschlossen) immer eine bestimmte (einerlei ob continuirlich oder nicht) Derivirte hat, welche unterhalb einer endlichen Zahl bleibt oder welche, wenn sie mit der Annäherung der x an α ins Unendliche wächst, doch

nur von einer Ordnung, welche um die endliche Grösse p hinter der ersten Ordnung zurückbleibt, unendlich wird, so geht die Function $f(x)$ bei der unbegrenzten Annäherung der x an α niemals über eine gewisse endliche Zahl hinaus und hat einen bestimmten und endlichen Grenzwerth und in α höchstens eine Discontinuität der ersten Art.

Daraus geht hervor: Wenn die Werthe der

$$f'(\alpha + \delta)\,\delta^{1-p}$$

(ebenfalls nur für hinreichend kleine Werthe von p) zum Grenzwerth Null oder eine endliche Grösse haben oder zwischen endlichen Grenzwerthen hin- und herschwanken und man, wenn nöthig, den Werth der $f(x)$ im Punkt α dadurch ändert, dass man den Werth der $f(\alpha + 0)$ als $f(\alpha)$ nimmt, so wird die Function $f(x)$ auch in diesem Punkt stetig. Hat man nöthigenfalls diese Aenderung vorgenommen, so kann man in der vorstehenden Formel $\delta = 0$ voraussetzen und erhält:

$$(7) \qquad \frac{f(\alpha + \varepsilon) - f(\alpha)}{\varepsilon^p} = \frac{f'(\alpha + \delta_1)\,\delta_1^{\,1-p}}{p}.$$

Dieses berechtigt uns zu der Behauptung: Wenn

$$f'(x)\,(x - \alpha)^{1-p}$$

für von Null verschiedene und positive Werthe von p einen bestimmten und endlichen Grenzwerth A für $x = \alpha + 0$ hat, alsdann hat unter der obigen Voraussetzung die Grösse

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{(x - \alpha)^p}$$

für $x = \alpha + 0$ zum Grenzwerth $\frac{\mathsf{A}}{p}$ und wenn der erste dieser Grenzwerthe $\pm\infty$ ist, so ist auch der zweite $\pm\infty$. Man könnte hier auch Schlüsse über die Ordnungen des Unendlichkleinwerdens der

$$f(x) - f(\alpha) \quad \text{für} \quad x = \alpha + 0$$

in Beziehung auf die Ordnungen des Unendlichklein- oder Unendlichgrosswerdens der $f'(x)$ für $x = \alpha + 0$ ziehen, wie wir es oben mit dem Unendlichgrosswerden derselben $f(x)$ gethan haben. Wir gehen darauf nicht näher ein, so wenig

wie wir die analogen Resultate weiter verfolgen wollen, die wir erhalten würden, wenn wir

$$F(x) = \frac{1}{l(x-\alpha)},$$

u. s. w. setzten.

Als Folgerung des oben gegebenen Satzes ist dann zu merken: Wenn die Function $f(x)$ im Punkt α eine Discontinuität zweiter Art hat und ihre Derivirten ausserhalb dieses Punktes immer endlich und bestimmt sind, so müssen diese letzteren bei der unbeschränkten Annäherung der x an α stets auch eine unendlich grosse Anzahl von Werthen annehmen, die, obgleich endlich, numerisch grösser als jede beliebige gegebene Zahl sind.

Ein Beispiel dazu geben für $x=0$ die Functionen, welche für $x=0$ einen beliebigen endlichen Werth haben und für von Null verschiedene x gleich

$$\sin\frac{1}{x} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$$

u. s. w. sind.

---

§ 75. Setzen wir in der Formel (7) $p=1$ (womit sie sich auf die unter 6 im § 72 angeführte reducirt), so sieht man sofort: Wenn die Grösse $f''(x)$ für $x=\alpha+0$ einen bestimmten und endlichen oder einen unendlich grossen Grenzwerth hat, so existirt auch die Derivirte der $f(x)$ für $x=\alpha$ zur Rechten und ist diesem Grenzwerth der $f'(x)$ gleich; und wenn $f'(x)$ für

$$x=\alpha+0$$

keinen bestimmten Grenzwerth hat, sondern bei der unbegrenzten Annäherung der x an α zwischen endlichen Grenzwerthen hin- und herschwankt, alsdann ist die Derivirte der $f(x)$ im Punkt α entweder bestimmt und endlich oder das Verhältniss

$$\frac{f(\alpha+\delta)-f(\alpha)}{\delta}$$

schwankt ebenfalls, wenn δ von der positiven Seite

her der Null zustrebt, zwischen endlichen Grenzwerthen hin und her.

Aehnliche Resultate erhält man, wenn $f(x)$ bei der unbeschränkten Annäherung der x an α zwischen unendlich weit auseinander liegenden Grenzen hin- und herschwankt.

---

§ 76. Danach lässt sich weiter schliessen: Die Function $f(x)$ kann, wenn sie in einer Umgebung rechts vom Punkt α (α eingeschlossen) immer endlich und continuirlich ist, im Punkt $x = \alpha$ auf der rechten Seite nur in den folgenden beiden Fällen keine endliche oder unendlich grosse Derivirte besitzen:

1) Wenn für jeden Punkt dieser Umgebung ausserhalb α's keine bestimmte Derivirte existirt.

2) Wenn zwar diese Derivirte für jeden Punkt der in Betracht gezogenen Umgebung von α (α ausgeschlossen) existirt, ihre Werthe aber für $x = \alpha + 0$ keinen bestimmten endlichen oder unendlich grossen Grenzwerth haben.

§ 77. Bei dieser letzteren Voraussetzung der Existenz der Derivirten für jeden Punkt der in Betracht gezogenen Umgebung von α (α ausgeschlossen) kann man mit Rücksicht auf die aus (7) dadurch, dass man $p = 1$ setzte, abgeleitete Formel auch behaupten:

1) Die Derivirte der $f(x)$ im Punkt α zur Rechten kann nur dann unendlich gross sein, wenn diese Derivirten für $x = \alpha + 0$ zum Grenzwerth ∞ haben oder ohne ∞ zum Grenzwerth zu haben, doch in unendlich vielen Punkten dieser Umgebung Werthe annehmen, die zwar endlich aber numerisch grösser als jede beliebige gegebene Grösse sind, ohne dass damit ausgeschlossen werden soll, dass sie auch in gewissen Punkten dieser Umgebung unendlich grosse Werthe haben können.

2) Wenn die Derivirte $f'(\alpha)$ der $f(x)$ im Punkt α

zur Rechten bestimmt und endlich ist, dann müssen die Derivirten der $f(x)$ in den Punkten der in Betracht gezogenen Umgebung von α zum Grenzwerth $f'(x)$ für $x = \alpha + 0$ haben oder müssen wenigstens in unendlich vielen Punkten dieser Umgebung Werthe haben, die von $f'(x)$ um weniger als eine beliebige gegebene Grösse abweichen, womit nicht ausgeschlossen ist, dass sie in unendlich vielen andern Punkten der nämlichen Umgebung auch ganz verschiedene und auch unendlich grosse Werthe haben können.

---

§ 78. Man sieht ein, dass diese Sätze noch zu anderen Beziehungen führen, falls man die Derivirten im Punkt α zur Rechten und Linken gleichzeitig in Betracht zieht oder die Derivirten im gewöhnlichen Sinn des Wortes auffasst. Diese weiteren Sätze ergänzen alsdann diejenigen der §§ 71 und 72.

So findet man zum Beispiel aus dem Vorstehenden ohne Weiteres: Wenn eine Function $f(x)$ in dem ganzen Intervall (α, β) endlich und stetig ist und in allen Punkten, höchstens die Endpunkte α und β ausgenommen, eine bestimmte Derivirte besitzt, so nimmt diese Derivirte entweder in jedem beliebigen Punkt im Innern des Intervalls Werthe an, die numerisch kleiner als eine endliche Zahl sind, oder sie nimmt in unendlich vielen Punkten desselben Intervalls auch Werthe an, welche, obgleich endlich, doch ihrem absoluten Werth nach grösser als jede gegebene beliebig grosse Zahl sind, ohne in diesem letzteren Fall auszuschliessen, dass auch unendlich viele Punkte vorhanden sein können, in welchen die Derivirte selbst unendlich gross ist.

Unter der bekannten Voraussetzung, dass $f(x)$ in dem Intervall (α, β) immer endlich und continuirlich ist und zwischen α und β (höchstens α und β ausgeschlossen) immer eine bestimmte Derivirte hat und wenn man der Derivirten auch in den Endpunkten, falls sie in diesen Punkten nicht

existirt, besondere Werthe beilegt und wenn man alsdann diese Derivirte als eine Function $\varphi(x)$ von x (welche jedoch in gewissen Punkten auch unendlich grosse Werthe haben kann) in diesem Intervall (α, β) betrachtet, kann man mit Rücksicht auf den in § 75 aufgestellten Satz behaupten: Unter den angegebenen Voraussetzungen kann diese derivirte Function $\varphi(x)$ in den Punkten, in welchen sie endlich ist, niemals gewöhnliche Discontinuitäten auch nicht auf nur einer Seite haben, sondern kann höchstens Discontinuitäten der zweiten Art haben, und in den Punkten, in welchen sie unendlich gross ist, muss sie sich so verhalten, dass ihre Werthe in den Umgebungen dieser Punkte zur Rechten und zur Linken einen unendlich grossen Grenzwerth haben oder zwischen unendlich weit von einander entfernten Grenzwerthen hin- und herschwanken, ohne damit auszuschliessen, dass diese Werthe ausserhalb des Punktes α auch immer endlich sein können, trotzdem einige von ihnen ihrem absoluten Werth nach willkürlich gross sein müssen.

So ist zum Beispiel die Derivirte der Function $x^2 \sin \frac{1}{x}$ für jeden Werth von x vorhanden und endlich und hat im Punkt $x = 0$ eine Discontinuität, welche aber von der zweiten Art ist.

Ebenso existirt für die Function, welche für $x = 0$ Null ist und für positive x den Werth

$$\sqrt{x}\left(1 + x \sin \frac{1}{x}\right)$$

und für negative x den Werth

$$-\sqrt{-x}\left(1 + x \sin \frac{1}{x}\right)$$

(wobei die Wurzelzeichen positiv genommen sind) hat, stets eine Derivirte und diese Derivirte ist im Punkt $x = 0$ gleich $+\infty$, aber in den Umgebungen dieses Punktes schwankt sie beständig zwischen beliebig grossen positiven und negativen Grenzwerthen hin und her.

§ 79. Bleiben wir nun bei den Derivirten einer Function stehen, welche nur zur Rechten oder zur Linken der Punkte in dem bekannten Intervall in Betracht gezogen werden, so ist leicht zu beweisen, dass sich der zweite Theil des in § 71 aufgestellten Satzes folgendermassen verallgemeinern lässt: Wenn eine Function $f(x)$ in einem ganzen Intervall (α, β) endlich und continuirlich ist, so können ihre Derivirten zur Rechten (oder zur Linken) der Punkte desselben Intervalls (ein Endpunkt ausgeschlossen) nicht sämmtlich gleich Null sein, es sei denn, dass die Function constant ist.

Man setze der Einfachheit wegen $\alpha < \beta$ und nehme an, dass die Derivirten rechts von $f(x)$ für alle Punkte x des Intervalls (β ausgeschlossen) sämmtlich gleich Null seien und bilde die beiden Functionen

$$\varphi(x) = f(x) - f(\alpha) + \Theta(x - \alpha)$$
$$\psi(x) = f(x) - f(\alpha) - \Theta(x - \alpha),$$

worin Θ eine positive Grösse bedeutet.

Diese Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sind in dem ganzen Intervall (α, β) wie die $f(x)$ endlich und continuirlich und ihre Derivirten rechts von jedem Punkt x in demselben Intervall (β ausgeschlossen) sind immer gleich Θ bezüglich $-\Theta$. Es existirt daher für jeden dieser Punkte x und für jede positive und beliebig kleine Zahl σ ein besonderer und positiver Werth ε von der Beschaffenheit, dass für alle positiven Werthe von h, die kleiner als ε sind, die Ungleichungen bestehen:

$$\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \Theta \right| < \sigma$$
$$\left| \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} + \Theta \right| < \sigma.$$

Es sind daher die Differenzen

$$\varphi(x+h) - \varphi(x), \quad \psi(x+h) - \psi(x)$$

für positive Werthe von h, die kleiner als ε sind, die eine positiv und die andere negativ.

Daraus folgt, dass für jedes Intervall von a bis β', wenn $\beta' < \beta$, das Maximum der Function $\varphi(x)$ und das Minimum

von $\psi(x)$ (die beide sicherlich existiren müssen, weil diese Functionen continuirlich sind) nur im Endpunkt β' dieses Intervalls (α, β') liegen können. Man hat daher stets

$$\varphi(\beta') > \varphi(\alpha), \quad \psi(\beta') < \psi(\alpha)$$

oder

$$f(\beta') - f(\alpha) + \Theta(\beta' - \alpha) > 0$$
$$f(\beta') - f(\alpha) - \Theta(\beta' - \alpha) < 0'$$

oder auch

$$-\Theta(\beta' - \alpha) < f(\beta') - f(\alpha) < \Theta(\beta' - \alpha).$$

Weil nun Θ willkürlich klein ist, so hat man offenbar

$$f(\beta') = f(\alpha)$$

für alle Werthe von β', die zwischen α und β liegen (höchstens β ausgeschlossen). Wenn man nun bemerkt, dass die Function in dem Intervall (α, β) immer continuirlich ist, kommt man zu dem Schluss, dass auch (§ 45)

$$f(\beta) = f(\alpha)$$

sein muss und hat so den Lehrsatz vollständig bewiesen.

Ein gleicher Beweis lässt sich auch für Derivirte zur Linken führen und wenn man ähnliche Betrachtungen wie in § 72 anstellt, so kann man auch die Sätze 4 und 5 dieses Paragraphen verallgemeinern. (Vgl. § 150*.)

§ 80. Kehren wir nun zu den Derivirten im gewöhnlichen Sinne des Worts zurück, so bemerken wir zunächst das Folgende: Da man im Allgemeinen, wenn eine Function $f(x)$ in einem Punkt x endlich und continuirlich ist, von der Aenderung

$$f(x + \delta) - f(x)$$

der Function und der Aenderung δ (positiv oder negativ) der Variabelen sagen kann, dass sie immer gleichzeitig unendlich klein werden, so kann man in Bezug auf die Derivirten vollständigere Resultate aufstellen und behaupten:

1) Wenn die Function $f(x)$ im Punkt x eine Derivirte besitzt, welche bestimmt, endlich und von Null verschieden ist, so wird die Aenderung

$$f(x + \delta) - f(x)$$

dieser Function mit Bezug auf die Aenderung der Variabelen, wenn diese letztere Aenderung unendlich klein wird, unendlich klein von der ersten Ordnung und der Art, dass das Verhältniss

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$$

einen bestimmten und von dem Vorzeichen von δ unabhängigen Grenzwerth hat.

2) Wenn die Derivirte der $f(x)$ im Punkt x gleich Null oder unendlich gross (von bestimmtem oder unbestimmtem Vorzeichen) ist, so wird die Aenderung der Function mit Bezug auf die Aenderung δ der Variabelen unendlich klein von einer höheren, bezüglich niedrigeren Ordnung als der ersten.

3) Wenn endlich die Derivirte der $f(x)$ im Punkt x unbestimmt ist, sei es, weil das Verhältniss

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$$

für die negativen Werthe von δ nicht denselben Grenzwerth hat, wie für die positiven Werthe, sei es, weil dasselbe für positive δ oder für negative δ oder in beiden Fällen keinen bestimmten Grenzwerth hat, so ist die Aenderung der Function in Bezug auf die, auf einer der beiden Seiten von x in Betracht gezogene Aenderung der Variabelen entweder wieder von der ersten Ordnung oder, ohne eigentlich von kleinerer oder der ersten gleichen Ordnung zu sein, von einer nicht grösseren Ordnung als der ersten und umgekehrt; oder es können auch schliesslich diese Aenderungen, obgleich beide unendlich klein, doch in Bezug auf die Ordnung des Unendlichkleinen in keiner Weise miteinander vergleichbar sein (§ 27) und während auf der einen Seite von x eine dieser Eigenthümlichkeiten auftritt, kann auf der andern Seite eine andere auftreten u. s. w.

Auf Grund dieser Ausführungen und des Satzes in § 71 kann man nun sagen: Wenn $f(x)$ in einem ganzen Intervall endlich und continuirlich und nicht constant ist, so kann die Aenderung der Function in Bezug auf diejenigen der Variabelen nicht in allen Punkten eines beliebigen Theils dieses Intervalls unendlich klein von einer höheren Ordnung als der ersten sein (auch nicht einmal logarithmisch etc.); und in

dem besonderen Fall, dass diese Function nur eine endliche Anzahl von Maxima und Minima hat, kann man von ihrer Aenderung in Bezug auf diejenige der Variabelen auch sagen, dass sie für alle Punkte eines beliebigen Theils des Intervalls, in welchem sie in Betracht gezogen wird, nicht immer von einer niedrigeren Ordnung als der ersten sein kann, weil sonst ihre Derivirte in endlichen Intervallen stets unendlich gross und von bestimmten Vorzeichen (§ 72, 3) sein würde, was nicht möglich ist.

§ 81. Hieraus folgt dann noch besonders: Wenn die Function $f(x)$ in einem ganzen Intervall endlich und continuirlich ist und man einen beliebigen Theil dieses Intervalls, in welchem $f(x)$ nicht immer denselben Werth hat, in Betracht zieht, so ist es nicht möglich, eine positive und von Null verschiedene Zahl ε zu finden der Art, dass in jedem in obigem Theilintervall genommenen Intervall h, dessen Ausdehnung kleiner als ε ist, die Schwankungen D_h der Function unendlich klein von einer höheren Ordnung als derjenigen des Intervalls h (auch nur logarithmisch) werden; das heisst also, es ist unmöglich, zu jeder positiven und beliebig kleinen Zahl σ einen hinreichend kleinen Werth ε zu finden der Art, dass für alle Intervalle h, deren Ausdehnung kleiner als ε ist, der Quotient $\frac{D_h}{h}$ immer kleiner als σ sei.

Denn, wenn $(x, x+h)$ ein Intervall ist, dem die Schwankung D_h entspricht, so ist

$$\frac{D_h}{h} \geqq \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right|$$

und wenn daher immer

$$\frac{D_h}{h} < \sigma$$

sein könnte, so würde die Derivirte der $f(x)$ in jedem beliebigen Punkt x immer Null sein, was nicht sein kann (§ 71).

Wenn ferner $f(x)$ nicht nur in dem gegebenen Intervall endlich und continuirlich ist, sondern in diesem Intervall auch nicht eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima

hat, so kann man auch behaupten: Es ist nicht möglich für jeden beliebigen in Betracht gezogenen Theil dieses Intervalls eine positive und von Null verschiedene Zahl ε zu finden der Art, dass in jedem in demselben Theil genommenen Intervall h, dessen Ausdehnung kleiner als ε ist, die Schwankungen D_h der Function unendlich klein von einer geringeren Ordnung als derjenigen des Intervalls h (auch nur logarithmisch) werden. Das heisst, es ist unmöglich, dass man zu jeder positiven und beliebig grossen Zahl ω eine hinreichend kleine Zahl ε finden kann der Art, dass für alle Intervalle h, deren Ausdehnung kleiner als ε ist, der Quotient $\frac{D_h}{h}$ immer grösser als ω ist.

Theilt man nämlich, wenn es nöthig ist, das Gesammtintervall in mehrere Theilintervalle, in welchen die Function monoton ist und nimmt an, in den so gebildeten Theilintervallen entspräche dem Intervall $(x, x + h)$ die Schwankung D_h, so wäre immer

$$\frac{D_h}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Wenn deshalb immer

$$\frac{D_h}{h} > \omega$$

sein könnte, so würde die Derivirte der $f(x)$ immer für jede Lage des Punktes x unendlich gross und von bestimmtem Vorzeichen sein, was dem Satz in § 71 widerspricht.

Wenn dagegen die Function $f(x)$ in dem gegebenen Intervall oder in dem in Betracht gezogenen Theil desselben eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hat, dann kann der Fall eintreten, dass diese letzte Eigenschaft in Bezug auf die Schwankungen D_h der $f(x)$ verloren geht. Hier lässt sich darüber noch nichts allgemein Gültiges sagen.

---

§ 82. Wenn die Derivirte einer in einem gegebenen Intervall endlichen und continuirlichen Function $f(x)$ in allen Punkten dieses Intervalls existirt und eine neue ebenfalls endliche und continuirliche Function $f'(x)$ ist, so zieht man auch die Derivirte dieser Function in Betracht und bezeichnet sie

gewöhnlich mit $f''(x)$. Wie $f'(x)$ die erste Dirivirte der $f(x)$ genannt wird, so heisst $f''(x)$ die zweite Derivirte der $f(x)$. Ist diese zweite Derivirte auch wieder eine neue in dem ganzen Intervall endliche und continuirliche Function von x, dann zieht man auch ihre Derivirte in Betracht, nennt sie die dritte Derivirte der $f(x)$ und bezeichnet sie mit $f'''(x)$ und so fort.

Nehmen wir nun an, in einer Umgebung

$$(x' - \varepsilon,\ x' + \varepsilon)$$

eines Punktes x' innerhalb eines gegebenen Intervalls seien die ersten Derivirten der Function $f(x)$ endlich und continuirlich und die zweiten Derivirten seien endlich und bestimmt oder unendlich gross und von bestimmtem Vorzeichen, die zweite Derivirte $f''(x')$ der $f(x)$ im Punkt x' sei dagegen eine endliche Grösse k und betrachten die Function

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{k}{2} x^2,$$

welche in derselben Umgebung dieselben Eigenschaften besitzt und deren zweite Derivirte im Punkt x' gleich Null ist.

Setzt man $\delta < \varepsilon$ und bezeichnet mit $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ positive Zahlen, die zwischen 0 und 1 liegen, so erhält man (§ 72, 6)

$$\begin{aligned}
\varphi(x' + \delta) &= \varphi(x') + \delta\varphi'(x' + \Theta\delta), \\
\varphi(x' - \delta) &= \varphi(x') - \delta\varphi'(x' - \Theta_1\delta), \\
\varphi'(x' + \Theta\delta) &= \varphi'(x') + \Theta\delta\varphi''(x' + \Theta\Theta_2\delta), \\
\varphi'(x' - \Theta_1\delta) &= \varphi'(x') - \Theta_1\delta\varphi''(x' - \Theta_1\Theta_3\delta).
\end{aligned}$$

Es ist deshalb

$$\frac{\varphi(x' + \delta) - 2\varphi(x') + \varphi(x' - \delta)}{\delta^2}$$

$$= \Theta\varphi''(x' + \Theta\Theta_2\delta) + \Theta_1\varphi''(x' - \Theta_1\Theta_3\delta).$$

Da aber die zweite Derivirte der $\varphi(x)$ im Punkt x' existirt und gleich Null ist, so haben die Grössen

$$\frac{\varphi'(x' + \Theta\delta) - \varphi'(x')}{\Theta\delta} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi'(x' - \Theta_1\delta) - \varphi'(x')}{-\Theta_1\delta}$$

für $\delta = 0$ Null zum Grenzwerth. Dasselbe gilt aber auch nach den obigen Formeln für die Grössen

$$\varphi''(x' + \Theta\Theta_2\delta) \quad \text{und} \quad \varphi''(x' - \Theta_1\Theta_3\delta).$$

Man erhält also:

$$\lim_{\delta=0} \frac{\varphi(x'+\delta) - 2\varphi(x') + \varphi(x'-\delta)}{\delta^2} = 0$$

und daher auch:

$$\lim_{\delta=0} \frac{f(x'+\delta) - 2f(x') + f(x'-\delta)}{\delta^2} = k = f''(x');$$

das heisst: Wenn die ersten Derivirten einer endlichen und continuirlichen Function $f(x)$ in einer ganzen Umgebung eines Punktes x' innerhalb des Intervalls, in welchem die Function $f(x)$ in Betracht gezogen wird, ebenfalls endlich und continuirlich sind und wenn überdies die zweite Derivirte $f''(x)$ der $f(x)$ in allen Punkten derselben Umgebung bestimmt und endlich oder unendlich gross und von bestimmtem Vorzeichen, im Punkt x' jedoch endlich ist, so kann man den Werth dieser zweiten Derivirten in diesem selben Punkt x' als den Grenzwerth der Grösse

$$\frac{f(x'+\delta) - 2f(x') + f(x'-\delta)}{\delta^2}$$

für $\delta = 0$ betrachten.

Ebenso findet man, dass $f''(x')$ unter denselben Voraussetzungen als Grenzwerth der Grösse

$$\frac{f(x'+2\delta) - 2f(x'+\delta) + f(x')}{\delta^2}$$

für $\delta = 0$ betrachtet werden kann, auch wenn der Punkt x' ein Endpunkt des Intervalls ist.

Es ist indessen zu beachten, dass (wie es zum Beispiel in dem Punkt $x = 0$ bei der Function der Fall ist, welche für $x = 0$ Null und für von Null verschiedene x gleich $x \sin^2 \frac{1}{x}$ ist) es sehr wohl vorkommen kann, dass die Grösse

$$\frac{f(x+\delta) - 2f(x) + f(x-\delta)}{\delta^2}$$

für $\delta = 0$ einen bestimmten und endlichen Grenzwerth für den besonderen Werth x' von x hat, auch wenn für denselben Werth von x die erste Derivirte der $f(x)$ nicht einmal existirt. In vielen Fällen kann man daher zwar bei einer Function $f(x)$ den Grenzwerth dieser Grösse

$$\frac{f(x+\delta)-2f(x)+f(x-\delta)}{\delta^2}$$

für einige oder auch für alle Werthe von x in einem gegebenen Intervall in Betracht ziehen, ohne jedoch weder von einer ersten Derivirten noch von einer zweiten Derivirten dieser Function $f(x)$ für dieselben Werthe von x sprechen zu können.

Wir können noch hinzufügen: Wenn auch die erste Derivirte und deshalb auch die zweite Derivirte einer Function $f(x)$ in den Unstetigkeitspunkten dieser Function keine Bedeutung haben, so kann doch der Grenzwerth der Grösse

$$\frac{f(x+\delta)-2f(x)+f(x-\delta)}{\delta^2}$$

auch in diesen Punkten eine Bedeutung haben, wenn die Discontinuitäten der Art sind, dass in diesen Punkten

$$f(x)=\lim_{\delta=0}\frac{f(x+\delta)+f(x-\delta)}{2}$$

ist. So kann besonders der Grenzwerth dieser Grösse auch in den Unstetigkeitspunkten eine Bedeutung haben, wenn es sich um gewöhnliche Discontinuitäten handelt, für welche

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

ist.

§ 83. Man kann nun beweisen: Wenn die Grösse

$$\frac{f(x+\delta)-2f(x)+f(x-\delta)}{\delta^2}$$

für $\delta=0$ in allen Punkten innerhalb eines Intervalls (α,β), in welchem die Function $f(x)$ endlich und continuirlich ist, zum Grenzwerth Null hat, so ist diese Function eine Function ersten Grades in dem ganzen Intervall und ihre ersten und zweiten Derivirten existiren daher immer und ihre zweite Derivirte ist stets gleich Null[1]).

---

1) Schwarz, Journ. f. Math. Bd. 72 S. 141.

Nehmen wir nämlich an, die Function $f(x)$ genüge in dem gegebenen Intervall (α, β) den eben angeführten Bedingungen in Bezug auf die Grösse

$$\frac{f(x+\delta) - 2f(x) + f(x-\delta)}{\delta^2}$$

und bemerken dass, wenn Θ eine Constante ist, die Function:

$$\varphi(x) = \pm \left\{ f(x) - f(\alpha) - \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\left[f(\beta) - f(\alpha)\right]\right\} + \Theta^2(x-\alpha)(x-\beta),$$

welche für $x = \alpha$ und $x = \beta$ verschwindet, in dem ganzen Intervall (α, β) ebenfalls endlich und continuirlich ist, so erhält man:

$$\lim_{\delta=0} \frac{\varphi(x+\delta) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\delta)}{\delta^2} = 2\Theta^2.$$

Es existirt daher für jeden Werth von x im Innern des Intervalls (α, β) eine positive Zahl ε von der Beschaffenheit, dass die Grösse

$$\varphi(x+\delta) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\delta)$$

für alle Werthe von δ, die positiv und kleiner als ε sind, immer positiv und von Null verschieden ist.

Daraus geht sofort hervor, dass $\varphi(x)$ immer negativ oder gleich Null in dem Intervall (α, β) sein muss; denn wenn dieselbe auch positive Werthe annehmen könnte, so könnte der dem Maximum ihrer Werthe (welches unter allen Umständen existiren muss, § 47) entsprechende Punkt x' weder mit α noch mit β zusammenfallen, weil in diesen Punkten $\varphi(x) = 0$ ist, sondern würde sich im Innern des Intervalls befinden. Man hätte also bei hinreichend kleinem ε und wenn $\delta < \varepsilon$ stets

$$\varphi(x'+\delta) - \varphi(x') \leq 0$$
$$\varphi(x'-\delta) - \varphi(x') \leq 0$$

und die Grösse

$$\varphi(x+\delta) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\delta)$$

wäre im Punkt x' stets negativ oder gleich Null, während doch das Gegentheil stattfindet, wie vorhin bewiesen wurde. $\varphi(x)$ muss daher in dem ganzen Intervall (α, β) negativ oder gleich Null sein, ohne jedoch immer gleich Null sein zu können. Da nun das erste Glied der $\varphi(x)$ ein doppeltes Vorzeichen hat

und das zweite (welches immer negativ ist) wegen der willkürlichen Wahl von Θ für alle Werthe von x zwischen α und β so klein angenommen werden kann, als man nur will, so folgt, dass das erste Glied der $\varphi(x)$ in allen Punkten x zwischen α und β und auch in diesen Grenzpunkten (§ 45) Null sein muss. Man hat also in diesem Intervall (die Grenzpunkte eingeschlossen)

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\left[f(\beta) - f(\alpha)\right],$$

wie wir behauptet hatten.

---

§ 84. Der eben bewiesene Satz behält auch dann noch seine Gültigkeit, wenn in einer Menge G von Punkten des Intervalls (α, β), die endlich oder abzählbar ist, die Existenz oder das Zahlmass des Grenzwerths der Grösse

$$\frac{f(x+\delta) - 2f(x) + f(x-\delta)}{\delta^2}$$

für $\delta = 0$ zweifelhaft ist, wenn nur die Grösse

$$\frac{f(x+\delta) - 2f(x) + f(x-\delta)}{\delta}$$

für $\delta = 0$ in den Punkten, in welchen diese Ungewissheit auftritt, zum Grenzwerth Null hat, in allen andern Punkten

$$\lim \frac{f(x+\delta) - 2f(x) + f(x-\delta)}{\delta^2} = 0$$

und $f(x)$ in dem ganzen Intervall (α, β) endlich und continuirlich ist.

Wir wollen zuerst annehmen, die Punkte, für welche die Existenz oder das Zahlmass des Grenzwerths der Grösse

$$\frac{f(x+\delta) - 2f(x) + f(x-\delta)}{\delta^2}$$

zweifelhaft ist, seien in endlicher Anzahl vorhanden und es seien die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$. Scheidet man diese Punkte mit willkürlich kleinen Intervallen

$$(\alpha_1 - \varepsilon_1, \alpha_1 + \varepsilon_1), (\alpha_2 - \varepsilon_2, \alpha_2 + \varepsilon_2), \ldots.$$

aus, so hat man in den übrig bleibenden Intervallen der Reihe nach:

$$f(x) = c_1 x + d_1,\; f(x) = c_2 x + d_2,\; f(x) = c_3 x + d_3 \ldots,$$

worin c und d Constante sind. Weil nun $f(x)$ auch in den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ continuirlich ist und die ausgeschiedenen Intervalle willkürlich klein sind, so müssen (§ 45) die Gleichungen bestehen:

$$c_1 \alpha_1 + d_1 = c_2 \alpha_1 + d_2, \; c_2 \alpha_2 + d_2 = c_3 \alpha_2 + d_3, \; \ldots,$$

und die obigen Formeln gelten bezüglich von α bis α_1, von α_1 bis α_2, von α_2 bis α_3 (die Grenzwerthe eingeschlossen).

Beachtet man ferner, dass in diesen Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ die Grösse

$$\frac{f(x+\delta) - 2f(x) + f(x-\delta)}{\delta}$$

für $\delta = 0$ Null zum Grenzwerth haben muss und diese Grösse in jedem beliebigen solchen Punkt α_s gleich $c_{s+1} - c_s$ ist, so kommt man zu dem Schluss, dass die Grössen $c_1, c_2, c_3 \ldots$ und also auch die $d_1, d_2, d_3 \ldots$ sämmtlich einander gleich sein müssen und dass deshalb $f(x)$ in dem ganzen Intervall (α, β) dieselbe Function $cx + d$ vom ersten Grad sein muss. Somit wäre der Satz bewiesen für den Fall, dass die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ in endlicher Anzahl vorhanden sind.

Dadurch dass man nun so verfährt, wie es in einem ähnlichen Fall im § 72, 3 geschehen ist, lässt sich der vorliegende Satz auch auf den allgemeinen Fall ausdehnen, in welchem die Menge der Punkte, in welchen die Existenz oder das Zahlenmass des Grenzwerths der Grösse

$$\frac{f(x+\delta) - 2f(x) + f(x-\delta)}{\delta^2}$$

zweifelhaft ist, eine Punktmenge der ersten Gattung und von beliebiger Art ist, auf welche Weise dann dieser Satz vollständig bewiesen ist.

Wir bemerken noch speciell, dass die in Bezug auf den Grenzwerth des Verhältnisses

$$\frac{f(x+\delta) - 2f(x) + f(x-\delta)}{\delta}$$

gestellte Bedingung in denjenigen Punkten x' im Innern des Intervalls (α, β), in welchen $f(x)$ eine endliche und bestimmte erste Derivirte besitzt, immer erfüllt ist, weil man dieses Verhältniss auch in die Form

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} \quad \frac{f(x-\delta)-f(x)}{-\delta}$$

bringen kann, woraus dann hervorgeht, dass für diejenigen Punkte x', für welche die erste Derivirte der $f(x)$ existirt und endlich ist, dieses Verhältniss den Grenzwerth Null für $\delta = 0$ hat.

---

§ 84*. Ist aber die Menge G eine unendliche aber abzählbare, so kann man so verfahren.

Gesetzt die Function

$$f(x) - f(\alpha) - \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}[f(\beta) - f(\alpha)] = F(x)$$

sei für irgend einen Punkt x_1 des Intervalles positiv $= p$. Man betrachte dann die Function

$$\varphi(x, c) = F(x) + c(x-\alpha)^2,$$

in der c eine positive Zahl sei. Für $x = \alpha$ ist diese Function Null, für β hat sie den Werth

$$c(\beta-\alpha)^2,$$

für x_1 dagegen den

$$p + c(x_1-\alpha)^2.$$

Dieser letztere wird grösser als $\varphi(\beta, c)$ wenn

$$c < \frac{p}{(\beta-\alpha)^2 - (x_1-\alpha)^2} = C$$

angenommen wird. Da $\varphi(x_1, c)$ dann

$$> \varphi(\beta, c) \text{ und } > \varphi(\alpha, c)$$

ist, muss die Function $\varphi(x, c)$ zwischen α und β ein Maximum haben. Der Maximalwerth η kann aber vielleicht für unendlich viele Werthe von x angenommen werden. Da sie alle $< \beta$ sind, haben sie eine obere Grenze ξ und dann wird, wegen der Stetigkeit, auch $\varphi(\xi, c) = \eta$ sein müssen. Wenn δ positiv ist, folgt jetzt

$$\pi_1 = \frac{\varphi(\xi+\delta, c) - \varphi(\xi, c)}{\delta} < 0,$$

$$\pi_2 = \frac{\varphi(\xi-\delta, c) - \varphi(\xi, c)}{\delta} \leq 0,$$

und

$$\lim \frac{\varphi(\xi+\delta, c) - 2\varphi(\xi, c) + \varphi(\xi-\delta, c)}{\delta^2} < 0,$$

wenn dieser Grenzwerth existirt. Wäre ξ ein Werth, der nicht zu G gehört, so wäre der Grenzwerth $= 2c$, also > 0. Folglich muss ξ ein Punkt von G sein, so dass jedem c, das > 0 aber $< C$ ist, ein Werth von G entspricht. Nach der weiteren Annahme über $f(x)$ ist aber auch für den Punkt ξ

$$\lim(\pi_1 + \pi_2) = \lim \frac{\varphi(\xi+\delta, c) - 2\varphi(\xi, c) + \varphi(\xi-\delta, c)}{\delta} = 0;$$

und weil π_1 und π_2 gleiches Zeichen haben, folgt hieraus

$$\lim \pi_1 = \lim \pi_2 = 0,$$

und weiter

$$\lim \frac{f(\xi+\delta) - f(\xi)}{\delta} = \lim \frac{f(\xi-\delta) - f(\xi)}{-\delta}$$
$$= \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} - 2c(\xi - \alpha).$$

Würden nun zwei verschiedene Werthe c und c' das gleiche ξ liefern, so wäre für beide der Grenzwerth links der nämliche, daher auch

$$c(\xi - \alpha) = c'(\xi - \alpha)$$

und weil $\xi \neq \alpha$, $c = c'$. Somit entspricht jedem ξ auch nur ein Werth von c, so dass das Continuum $0 \ldots C$ auf die abzählbare Menge G oder einen Theil von ihr gegenseitig eindeutig bezogen wäre. Da dies oben (§ 72 No. 4) als unmöglich nachgewiesen ist, so kann die Function $F(x)$ nicht > 0 sein. Ebenso wenig kann sie < 0 sein und daher muss sie für jedes x zwischen α und β gleich Null sein.

---

§ 85. Ein Zusatz zu dem bewiesenen Lehrsatz ist: Wenn $f(x)$ und $F(x)$ zwei in dem Intervall (α, β) endliche und continuirliche Functionen von x sind und wenn $f(x)$ in diesem Intervall eine endliche und continuirliche erste Derivirte $f'(x)$ besitzt und, höchstens eine Punktmenge der ersten Gattung ausgenommen, in allen andern Punkten auch eine zweite Derivirte $f''(x)$ (gleichgültig, ob continuirlich oder nicht) besitzt, während die Function $F(x)$ der Art ist, dass von den beiden Verhältnissen

$$\frac{F(x+\delta) - 2F(x) + F(x-\delta)}{\delta} \text{ und } \frac{F(x+\delta) - 2F(x) + F(x-\delta)}{\delta^2}$$

das erste immer den Grenzwerth Null und das zweite überall, höchstens mit Ausnahme einer Punktmenge der ersten Gattung, den Grenzwerth $f'''(x)$ hat, so können die beiden Functionen $f(x)$ und $F(x)$ in dem ganzen Intervall (α, β) nur um dieselbe Function ersten Grades $cx + d$ differiren.

---

§ 86. Auf ähnliche Weise lassen sich analoge Sätze über die Function

$$\frac{f(x+2\delta) - 3f(x+\delta) + 3f(x) - f(x-\delta)}{\delta^3}$$

beweisen, zu welcher wir durch die Betrachtung der dritten Derivirten der $f(x)$ geleitet werden, und ähnliche Sätze erhält man auch über die analogen Functionen, auf die man durch die Betrachtung der übrigen Derivirten kommt.

Zum Schluss bemerken wir, dass die Sätze der Differenzialrechnung über die Derivirten von Summen, Producten, Quotienten etc. mehrerer Functionen stets Geltung haben, wenn die gegebenen Functionen und die derivirten Functionen, um die es sich bei der Anwendung dieser Sätze handelt, endlich und bestimmt sind und wenn die Summen und Producte aus einer endlichen Anzahl von Gliedern oder Factoren etc. zusammengesetzt sind.

Achtes Kapitel.

Unendliche Reihen.

§ 87. Bekanntlich wird als unendliche Reihe oder kurz als Reihe ein Aggregat

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n \cdots$$

von reellen oder complexen Gliedern, deren Anzahl unendlich gross ist, bezeichnet. Summe oder Werth der Reihe ist der Grenzwerth der Summe S_n ihrer n ersten Glieder bei unbegrenzt wachsendem n. Die Reihe heisst convergent, wenn dieser Grenzwerth endlich und bestimmt ist; sie heisst diver-

gent, wenn der Grenzwerth numerisch oder nach seinem absoluten Betrage (Modul) unendlich gross ist; sie heisst unbestimmt, wenn der genannte Grenzwerth nicht existirt.

Wir erinnern ferner daran, dass bei einer convergenten Reihe der Grenzwerth des Gliedes u_n bei unbegrenzt wachsendem n Null ist, dass man aber nicht umgekehrt aus der Erfüllung dieser Bedingung auf die Convergenz der Reihe schliessen darf. Wohl aber besteht eine für die Convergenz einer Reihe nothwendige und hinreichende Bedingung darin, dass die Summe

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} = s_{n+p} - s_n$$

einer beliebigen Anzahl p von auf das n^{te} Glied der Reihe nach folgenden Gliedern zum Grenzwerth bei unbegrenzt wachsendem u (§ 23) Null habe, oder auch, was auf dasselbe herauskommt, dass der sogenannte Rest der Reihe, dass heisst die Summe r_n der Reihe

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots$$

von Termen, die auf das n^{te} Glied folgen, zum Grenzwerth bei unbegrenzt wachsendem n Null habe.

Endlich erinnern wir noch daran, dass, abweichend von den aus einer endlichen Anzahl von Gliedern zusammengesetzten Summen, die unendlichen Reihen ihren Werth ändern können, wenn die Ordnung, in welcher ihre Glieder auf einander folgen, geändert wird und dass man demgemäss die unbedingt convergenten Reihen, deren Summe von der Anordnung der Glieder unabhängig ist, von den convergenten Reihen schlechtweg, deren Werth durch die Reihenfolge der Summanden bedingt ist, zu unterscheiden hat. Man beweist, dass es für die von der Ordnung der Glieder unabhängige Convergenz einer reellen oder complexen Reihe nothwendig und hinreichend ist, dass die aus den numerischen Werthen oder den absoluten Beträgen ihrer Glieder gebildete Reihe convergent sei.

---

§ 88. Ueber die Reihen, welche bei Umstellung der Glieder ihren Werth ändern können, lassen sich die folgenden Betrachtungen anstellen.

Es sei

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

eine Reihe, die wir der Einfachheit wegen als reell voraussetzen wollen, ihre Glieder seien zum Theil positiv, zum Theil negativ und mögen mit unbeschränkt wachsendem n der Null zustreben.

Die Summe der ersten n Terme dieser Reihe sei S_n und

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m + \cdots \tag{2}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m + \cdots \tag{3}$$

seien die beiden Reihen der positiven Terme bezüglich der absoluten Werthe der negativen Terme, aus denen die Reihe (1) besteht.

In S_n ist eine gewisse Anzahl m der ersten Glieder der Reihe (2) und eine gewisse Anzahl m' der ersten Glieder der Reihe (3) enthalten. Wenn man daher mit σ_m und $\sigma'_{m'}$ die bezüglichen Summen dieser m bezüglich m' ersten Glieder der Reihen (2) und (3) bezeichnet, so ist:

$$S_n = \sigma_m - \sigma'_{m'} \text{ und } \lim S_n = \lim (\sigma_m - \sigma'_{m'}) \cdot$$

Daraus ist ersichtlich, dass, wenn die Reihen (2) und (3) beide convergent sind, auch die Reihe (1) unabhängig von der Ordnung der Glieder convergent ist; divergirt eine einzige der Reihen (2) und (3), so divergirt die Reihe (1) bei jeder Anordnung ihrer Glieder. Es bleibt also nur der Fall zu untersuchen, in welchem beide Reihen (2) und (3) divergiren.

In diesem Fall kann man sich leicht überzeugen, dass man stets und auf unendlich viele Arten die Ordnung der Glieder der Reihe (1) der Art ändern kann, dass sie entweder convergirt und zur Summe irgend eine beliebige gegebene Grösse hat, oder dass sie divergirt, oder dass sie unbestimmt wird.

Wir verstehen also unter h eine endliche und positive beliebige Grösse und zeigen zunächst, wie man die Glieder der Reihe (1) so anordnen kann, dass dieselbe convergent wird und ihre Summe genau gleich h ist.

Zu diesem Zweck wollen wir annehmen, die Glieder der Reihe (2) seien schon vom ersten an sämmtlich kleiner als h. Wenn dieses nicht zutrifft, so können wir nach einem

beliebigen Gesetz eine gewisse Anzahl der ersten Glieder der Reihen (2) und (3) zusammenstellen, bis wir finden, dass die folgenden Glieder der Reihe (2) dieser Bedingung genügen und dass die algebraische Summe der so zusammengestellten Glieder (diejenigen der Reihe (2) mit positivem, diejenigen der Reihe (3) mit negativem Vorzeichen genommen) eine negative Grösse oder Null ist. Wenn dann $-k$ diese Summe ist, so hätte man die Reihen (2) und (3) von den noch übrigen Gliedern an in Betracht zu ziehen und hätte zu versuchen, aus ihnen eine andere Reihe zu bilden, in welcher die α_s mit positivem und die β_s mit negativem Vorzeichen zu nehmen wären, und als deren Summe man $h+k$ erhielte. Wir sind also berechtigt, die obige Annahme zu machen.

Da die Reihen (2) und (3) divergiren, so können wir eine endliche Anzahl p_1 von Gliedern

$$\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots\, \alpha_{p_1}$$

der Reihe (2) nehmen so, dass ihre Summe zwar kleiner als $h+\beta_1$ bleibt, aber um weniger als das folgende Glied α_{p_1+1} davon abweicht, oder dass die Differenz höchstens gleich diesem Glied ist. Alsdann können wir p_2 andere Glieder

$$\alpha_{p_1+1},\, \alpha_{p_1+2},\, \ldots,\, \alpha_{p_1+p_2}$$

nehmen so, dass die Summe

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{p_1}+\alpha_{p_1+1}+\alpha_{p_1+2}+\cdots+\alpha_{p_1+p_2}$$

zwar kleiner als

$$h+\beta_1+\beta_2$$

ist, aber um weniger als das folgende Glied

$$\alpha_{p_1+p_2+1}$$

davon verschieden ist, oder die Differenz diesem Glied höchstens gleich ist.

Man findet dann sofort, dass

$$\alpha_{p_1+1}+\cdots+\alpha_{p_1+p_2}<\beta_2+\alpha_{p_1+1},$$

aber

$$>\beta_2-\alpha_{p_1+p_2+1}$$

ist. So kann man weiter gehen.

Im Allgemeinen kann man nach dem Glied

$$\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}}$$

noch weitere p_n Glieder

$$\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+1},$$

$$\alpha_{p_1} + \alpha_{p_2} + \cdots + \alpha_{p_{n-1}+2}, \cdots, \quad \alpha_{p_1+p_2+\cdots p_{n-1}+p_n}$$

nehmen so, dass

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

zwar

$$< h + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n,$$

aber

$$> h + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n - \alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n+1}$$

ist. Und da zeigt sich, dass die Summe dieser p_n Glieder

$$> \beta_n - \alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n+1}$$

aber

$$< \beta_n + \alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+1}.$$

Von diesen Zahlen

$$p_1, p_2, \cdots p_n$$

können auch einige gleich Null sein, weil zum Beispiel β_s so klein sein kann, dass die Summe

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{s-1}},$$

die von

$$h + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{s-1}$$

um weniger als das Glied

$$\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{s-1}+1}$$

abweicht, auch von

$$h + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{s-1} + \beta_s$$

um weniger als dieses Glied abweicht. Sicher aber ist, dass die Summe

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

mit n in's Unendliche wachsen muss, weil die Grösse

$$h + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$$

ebenfalls mit n in's Unendliche wächst.

Mit diesen aufeinander folgenden Gruppen kann man dann die Reihe

$$(4) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p_1} - \beta_1 + \alpha_{p_1+1} + \cdots + \alpha_{p_1+p_2} - \beta_2 + \cdots$$
$$- \beta_{n-1} + \alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+1} + \cdots$$
$$+ \alpha_{p_1+p_2+\cdots p_{n-1}+p_n} - \beta_n + \cdots$$

bilden, welche nichts weiter als die Reihe (1) mit besonderer Anordnung ihrer Glieder ist; und in dieser Reihe können (weil einige der p auch Null sein können) auch die negativen Glieder sich zu Gruppen von aufeinander folgenden Termen vereinigt finden. Auf alle Fälle aber streben sowohl die Gruppen von positiven Gliedern, als diejenigen von negativen Gliedern mit in's Unendliche wachsendem n der Null zu; denn die n^{te} positive Gruppe hat eine Summe, die kleiner ist als

$$\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+1} + \beta_n$$

und die folgende negative Gruppe ist offenbar kleiner als

$$\beta_n + \alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n+1}$$

und nach den gemachten Voraussetzungen hat sowohl die eine wie die andere dieser Summen zum Grenzwerth Null für $n = \infty$.

Setzt man demnach:

$$S'_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p_1} - \beta_1 + \cdots + \alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n} - \beta_n\,,$$

so erhält man offenbar:

$$h - \alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n+1} < S'_n < h\,,$$

und weil man n so gross annehmen kann, dass für diesen und für grössere Werthe von n das Glied

$$\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n+1}$$

immer kleiner als eine beliebige Grösse bleibt, so folgt daraus, dass

$$\lim S'_n = h$$

ist. Man kommt also zu dem Schluss, dass die Reihe (4) convergirt und zur Summe h hat; denn anstatt bei einer Gruppe negativer Glieder anzuhalten und so h als Grenzwerth der Summe S'_n zu erhalten, hätte man ebenso wohl auch an jedem andern Punkt sowohl in einer positiven, als in einer negativen Gruppe anhalten können, ohne dass das Resultat sich geändert hätte, weil, wie wir gesehen haben, diese Gruppen und also auch ihre Theile der Null zustreben.

Man sieht, die Glieder der Reihe (1) können so geordnet werden, dass ihre Summe der gegebenen Grösse h gleichkommt und es ist auch selbstverständlich, dass dieses auf unendlich verschiedene Art geschehen kann, indem man anderen Gesetzen

bei der Bildung der aufeinander folgenden Gruppen der Reihen (2) und (3) folgt, oder auch, indem man zwar die vorstehende Methode beibehält, aber statt h eine positive Function von n nimmt, welche bei unendlich wachsendem n zum Grenzwerth h hat. Auf gleiche Weise liesse sich beweisen, dass man den Gliedern der Reihe (1) eine solche Anordnung geben kann, dass ihre Summe einer gegebenen negativen Grösse gleichkommt. Und wenn man statt h eine positive oder negative Function von n nimmt, die bei unendlich wachsenden n zum Grenzwerth ∞ oder keinen bestimmten Grenzwerth hat, so würde aus ähnlichen Erörterungen ersichtlich sein, dass man die Reihe (1) auch in unendlich viele andere Reihen verwandeln kann, die divergiren oder unbestimmt sind[1]. Wenn wir also zusammenfassen, können wir jetzt behaupten: Ist eine reelle Reihe

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{5}$$

gegeben, deren Glieder zum Theil positiv, zum Theil negativ sind und mit unendlich wachsendem n der Null zustreben, und sind

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots \tag{6}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n + \cdots \tag{7}$$

die Reihen der positiven und der absoluten Werthe der negativen Glieder, so folgt:

1) Wenn die beiden Reihen (6) und (7) convergiren, so convergirt die gegebene Reihe (5) unabhängig von der Ordnung ihrer Glieder.

2) Wenn eine einzige der Reihen (6) und (7) divergirt, so divergirt die gegebene Reihe (5) bei jeder Anordnung, die man ihren Gliedern geben mag.

3) Wenn die Reihen (6) und (7) beide divergiren, so kann man die Ordnung der Glieder in der Reihe (5) immer der Art ändern, dass sie convergent wird und zur Summe eine beliebige gegebene Grösse hat, oder dass sie divergent oder unbestimmt wird und dieses kann auch auf unendlich verschiedene Art geschehen.

---

1) Pringsheim, Math. Ann. Bd. 22 S. 455.

Speciell kann man also sagen: Wenn eine schlechtweg convergirende oder unbestimmte Reihe gegeben ist, deren Glieder der Null zustreben, so kann man durch passende Aenderung der Ordnung ihrer Glieder es immer erreichen, dass sie convergirt und eine beliebige gegebene Grösse zur Summe hat oder dass sie divergirt oder unbestimmt ist; und dieses kann immer auf unendlich verschiedene Art geschehen.

Nimmt man an, die beiden Reihen (6) und (7) seien gleich, das heisst $\alpha_n = \beta_n$, so erhält man insbesondere noch: Wenn $\Sigma\alpha_n$ eine divergente Reihe mit positiven Gliedern ist und man bildet eine neue Reihe Σu_n, deren positive Glieder die Glieder von $\Sigma\alpha_n$ sind und deren negative Glieder ebenfalls diejenigen derselben Reihe, negativ genommen, sind, so kann man auf unendlich verschiedene Art erreichen, dass die so gebildete Reihe Σu_n divergent oder unbestimmt oder convergent ist und zur Summe eine beliebige gegebene Grösse hat.

Geht man so zum Beispiel von der divergirenden Reihe $\sum_0^\infty \frac{1}{n}$ aus, so lassen sich folgende Reihen bilden:

$$1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \cdots$$
$$- \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} + \cdots,$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \cdots$$
$$- \frac{1}{n-1} + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{n} + \cdots,$$

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + \cdots$$
$$- \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1)^2+1} + \frac{1}{(n-1)^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \cdots,$$

von denen die erste $l2$, die zweite $l3$ zur Summe hat und die dritte divergirt, trotzdem in jeder derselben neben jedem positiven Glied $\frac{1}{n}$ auch das entsprechende negative Glied $-\frac{1}{n}$ vorkommt.

§ 89. Um nun zu einem weiteren Satz über die unendlichen Reihen zu gelangen, der für die Folge von grosser Wichtigkeit für uns sein wird, schicken wir ein von Abel[1]) herrührendes Hilfstheorem voraus, welches lautet: Wenn $v_1, v_2, \ldots v_p$ solche reelle und endliche Grössen sind, dass die Summen

$$v_1, v_1 + v_2, \quad v_1 + v_2 + v_3, \cdots, \quad v_1 + v_2 + \cdots + v_p$$

sämmtlich zwischen zwei Grössen a und A, wo $a < A$, enthalten und wenn $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_p$ positive Grössen sind, von denen keine grösser als die vorhergehende ist, so findet die Relation statt:

$$\varepsilon_1 a < \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_p v_p < \varepsilon_1 A.$$

Denn setzt man

$$v_1 = s_1, \quad v_1 + v_2 = s_2, \quad v_1 + v_2 + v_3 = s_3, \cdots, v_1 + v_2 + \cdots + v_p = s_p,$$

so erhält man

$$v_1 = s_1, \quad v_2 = s_2 - s_1, \quad v_3 = s_3 - s_2, \cdots, \; v_p = s_p - s_{p-1}.$$

Es ist deshalb

$$\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_p v_p = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) s_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) s_2 + \cdots + (\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p) s_{p-1} + \varepsilon_p s_p$$

und also offenbar:

$$\varepsilon_1 a < \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_p v_p < \varepsilon_1 A,$$

wie oben behauptet wurde.

Wenn dagegen die Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ zwar sämmtlich positiv sind, dagegen keine kleiner als die vorhergehende, so erhält man eine mit der Abelschen Formel analoge Beziehung in den Ungleichungen:

$$\varepsilon_1 a + \varepsilon_p (A - a) > \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_p v_p > \varepsilon_1 A - \varepsilon_p (A - a).$$

Wir fügen noch hinzu: Wenn eine oder die andere der Grössen a, A einer oder mehreren der Summen

$$v_1, v_1 + v_2, \cdots, v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_p$$

gleich wird, dann kann höchstens eines der vorstehenden Ungleichheitszeichen sich in ein Gleichheitszeichen verwandeln. Wenn man also bei dem Abel'schen Satz stehen bleibt, kann man auch sagen: Wenn die Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ sämmt-

1) Journ. f. Math. Bd. 1 S. 314. Oeuvres. Bd. 1 S. 222.

lich positiv sind und keine grösser als die vorhergehende ist und die Summen

$$v_1, v_1 + v_2, \quad v_1 + v_2 + v_3, \cdots, \quad v_1 + v_2 + \cdots + v_p$$

nicht kleiner als a und nicht grösser als A sind, so ist

$$\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_p v_p = \varepsilon_1 C,$$

wenn C ein zwischen a und A (a und A eingeschlossen) oder ein zwischen dem Maximum und dem Minimum der Summen

$$v_1, v_1 + v_2, \quad v_1 + v_2 + v_3, \cdots, \quad v_1 + v_2 + \cdots + v_p$$

liegender Werth ist.

Und ähnlich: Wenn die Grössen $v_1, v_2, \ldots, v_p$ sämmtlich oder zum Theil complex sind und die absoluten Beträge der Summen

$$v_1, v_1 + v_2, \cdots, \quad v_1 + v_2 + \cdots + v_p$$

sämmtlich kleiner als A und die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ wieder positive Grössen sind, von denen keine kleiner als die vorhergehende ist, so besteht die Ungleichung:

$$|\, \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_p v_p \,| < \varepsilon_1 A.$$

---

§ 90. Aus diesen Ergebnissen geht unmittelbar der Satz hervor, von dem wir oben gesprochen haben, nämlich: Wenn eine reelle oder complexe Reihe Σu_n convergirt und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ Grössen sind, die wenigstens von einem gewissen Werth n' von n an positiv sind und nicht zunehmen, so ist auch die Reihe $\Sigma \varepsilon_n u_n$ convergent.

Denn wenn Σu_n convergirt, so giebt es eine solche Zahl $n > n'$, dass die Summen einer beliebigen Anzahl von auf das n^{te} Glied folgenden Termen absolute Beträge haben, die unter einer beliebig kleinen Grösse σ bleiben und daher haben nach dem vorhergehenden Satz die entsprechenden Summen der Reihe $\Sigma \varepsilon_n u_n$ kleinere absolute Beträge als $\varepsilon_{n+1} \sigma$ und deshalb ist auch die Reihe $\Sigma \varepsilon_n u_n$ convergent.

Eine Anzahl von andern Sätzen über unendliche Reihen, welche in vielen Fällen dazu dienen, die Frage über ihre Con-

vergenz oder Divergenz zu entscheiden, setzen wir als bekannt voraus[1]).

§ 91. Wir gehen nun dazu über, einige Betrachtungen und allgemeine Sätze über Reihen zu entwickeln, deren Glieder in einem gegebenen Intervall (α, β) reelle und endliche Functionen einer reellen Variabelen x sind, oder allgemeiner von einer reellen Variabelen x abhängen, welche in diesem Intervall unendlich viele Werthe annehmen kann.

Es sei zu dem Ende

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

eine Reihe, deren Glieder in dem Intervall (α, β) (α und β eingeschlossen) reelle und endliche Functionen der Variabelen x sind, oder von einer Variabelen x abhängen, welche in demselben Intervall unendlich viele Werthe annehmen kann und diese Reihe sei für alle Werthe von x, die in Betracht gezogen werden können, convergent. Dieser Convergenz wegen existirt für jeden speciellen Werth von x, der zwischen α und β (α und β eingeschlossen) in Betracht kommen kann und für jede positive und beliebig kleine Zahl σ eine ganze und endliche Zahl m von der Eigenschaft, dass für Werthe von n, die nicht hinter m zurückbleiben, der Rest

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

der Reihe seinem absoluten Werth nach kleiner als σ ist. Allerdings kann sich, wie ohne Weiteres verständlich, diese Zahl m mit x verändern und wenn sich x gewissen ausgezeichneten Werthen nähert, kann sie auch unbegrenzt wachsen, ohne jedoch für irgend einen besonderen Werth von x unendlich gross zu werden. Mit anderen Worten, diese Zahl m kann, ohne jemals unendlich gross zu sein, zum oberen Grenzwerth ∞ haben. Alsdann existirt nicht mehr zu jeder positiven und beliebig kleinen Zahl σ eine endliche Zahl m von der Eigenschaft, dass für $n \geq m$ und für alle Werthe von

---

1) Siehe z. B. Du Bois-Reymond, Journ. f. Math. Bd. 76 S. 61 ff. Stolz in d. S. 104 angef. Werke S. 251 ff. Pringsheim, Math. Ann. Bd. 35 S. 297.

x, die zwischen α und β (α und β eingeschlossen) in Betracht kommen können, dem absoluten Werth nach stets $R_m < \sigma$ ist.

Mit Rücksicht auf diese Möglichkeit wird eine unendliche Reihe Σu_n, deren Glieder in einem gegebenen Intervall (α, β) Functionen von x sind oder auch allgemeiner Grössen sind, die man für eine unendlich grosse Menge von Punkten x desselben Intervalls kennt, als in dem ganzen Intervall (α, β) oder wenigstens für alle Punkte oder Werthe x, die in demselben Intervall in Betracht kommen können, in gleichem Grad oder gleichmässig convergent bezeichnet, wenn zu jeder positiven und beliebig kleinen Zahl σ eine endliche Zahl m zu finden ist von der Eigenschaft, dass für $n > m$ und für alle Werthe von x, die zwischen α und β in Betracht kommen können, dem absoluten Werth nach $R_n < \sigma$ ist. Die gegebene Reihe Σu_n heisst dagegen nicht in gleichem Grad convergent in demselben Intervall und für die Werthe von x, die zwischen α und β in Betracht kommen können, wenn zu jeder positiven Zahl σ eine endliche Zahl m, die den genannten Bedingungen genügt, nicht vorhanden ist[1]).

In gleichem Grad nur im Allgemeinen convergent heisst ferner die Reihe Σu_n in dem gegebenen Intervall (α, β) oder für die Werthe von x, die in diesem Intervall in Betracht kommen können, wenn sie, ohne in Wirklichkeit in dem oben angegebenen Sinn gleichmässig convergent zu sein, doch so beschaffen ist, dass sie, nachdem man aus demselben Intervall eine endliche Anzahl p von willkürlich kleinen Intervallen herausgenommen hat, in den übrig bleibenden Intervallen oder in den Punkten x, welche in diesen Intervallen in Betracht kommen können, in gleichem Grad convergent ist.

Einfach gleichmässig convergent heisst schliesslich eine Reihe Σu_n in dem Intervall (α, β) oder für die Werthe von x, die in diesem Intervall in Betracht kommen können, wenn zu jeder positiven und beliebig kleinen Zahl σ und zu jeder Zahl m' nur eine oder einige ganze Zahlen m vorhanden sind, die nicht kleiner als m' und von der Art sind,

1) Seidel, Abh. d. Münchener Acad. II. Cl. Bd. 5 S. 380.

dass für alle Werthe von x, die zwischen α und β (α und β eingeschlossen) in Betracht kommen können, der dieser Zahl m entsprechende Rest R_m numerisch kleiner als σ [1]) ist. Man kann also behaupten, dass eine gleichmässig zwischen α und β convergente Reihe immer auch einfach gleichmässig convergent sein muss, während man die umgekehrte Behauptung gegenwärtig wenigstens nicht aufstellen kann.

Beschränkt man sich aber auf die Untersuchung solcher Reihen Σu_n, welche für alle zwischen α und β in Betracht kommenden Werthe von x aus positiven Gliedern bestehen und für diese Werthe von x einfach gleichmässig convergent sind, oder aber solcher, die negative Glieder besitzen, indessen einfach gleichmässig convergent bleiben, wenn man ihre Glieder auf ihre respectiven absoluten Werthe zurückführt, so lässt sich allerdings beweisen, dass die Bedingungen, welchen derartige Reihen zu genügen haben, nothwendiger Weise auch ihre gleichmässige Convergenz für die zwischen α und β in Betracht kommenden Werthe von x zur Folge haben.

Bezeichnet nämlich $\Sigma u_n'$ die Reihe, welche aus den absoluten Werthen der Glieder von Σu_n gebildet ist und versteht man unter m eine der Zahlen, die nicht kleiner als m' sind und für welche nach den gemachten Voraussetzungen der entsprechende Rest R_m' der Reihe $\Sigma u_n'$ für alle in Betracht kommenden Werthe von x zwischen α und β kleiner ausfällt als σ, so ist ersichtlich, dass die folgenden Reste R'_{m+1}, $R'_{m+2}, \ldots$ der gleichen Reihe gleichfalls sämmtlich kleiner als σ sind, insofern keiner grösser als R_m' ausfallen kann. Dann aber ist offenbar dasselbe auch für die absoluten Werthe der

1) Setzt man

$$u_{2n-1}(x) = x^{n+1}, \quad u_{2n}(x) = -x^{n+1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right)$$

für $0 \leq x < 1$, dagegen für $x = 1$

$$u_n(1) = \frac{1}{n^2},$$

so ist die Reihe $\Sigma u_n(x)$ für alle x zwischen 0 und 1 (diese Grenzen eingeschlossen) convergent, aber nur einfach gleichmässig, weil für jedes x in jenen Grenzen $|R_n|$ nur $< \sigma$ zu machen ist, wenn n eine gerade Zahl ist, während es nicht möglich ist für ungerade n. (Volterra, Giorn. di Mat. Bd. 19 (1881) S. 79 Fussnote.)

entsprechenden Reste R_m, R_{m+1}, R_{m+2}, ... der ursprünglichen Reihe Σu_n der Fall und diese Reihe ist folglich gleichmässig convergent.

---

§ 92. Um gleich hier die Existenz von Reihen nachzuweisen, die, obgleich sie in einem ganzen Intervall convergiren, doch in demselben nicht einmal einfach gleichmässig convergent sind, sei darauf hingewiesen, dass dieser Umstand stets bei jeder Reihe Σu_n eintritt, deren Glieder in einem Punkt a desselben Intervalls[1]) endliche und continuirliche Functionen von x sind, während in eben diesem Punkt die Summe $f(x)$ der Reihe eine discontinuirliche Function von x ist.

$f(x)$ sei zu dem Ende wenigstens auf einer Seite des Punktes a, zum Beispiel auf der rechten, discontinuirlich und m' bezeichne einen Werth von n, der so gewählt ist, dass für $n \geq m'$ und für $x = a$ dem absoluten Werth nach $R_n < \sigma$. Für ein bestimmtes m, welches $> m'$ ist, werde ferner gesetzt:

$$f(a) = S_m + R_m, \quad f(a + \delta) = S_m' + R_m'.$$

Da m eine bestimmte Zahl ist und die Functionen

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

für $x = a$ continuirlich sind, so lässt sich offenbar, wie gross man auch m annehmen mag, eine von Null verschiedene und positive Zahl ε von der Beschaffenheit finden, dass für positive Werthe von δ, die kleiner als ε sind, $|S_m' - S_m|$ kleiner als irgend eine beliebig kleine positive Grösse ist. Und da, wenn der Sprung der $f(x)$ im Punkt a grösser als d ist, $f(a + \delta)$ und $f(a)$ wenigstens für einige der in Betracht kommenden Werthe von δ um mehr als d von einander abweichen müssen, so werden sich R_m und R_m', wie gross auch m sei, um eine Grösse d' von einander unterscheiden, die mehr als 2σ beträgt, wenn σ genügend klein gewählt wird. Welchen Werth

---

1) Zur Beseitigung jedes Zweifels bemerken wir ein für alle Mal, dass mit der Ausdrucksweise, eine unendliche Anzahl von Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ besitze gewisse Eigenschaften, gemeint ist, dass diese Eigenschaften für jedes n bewiesen wurden oder bewiesen werden können.

man daher auch m beilegen mag, falls er nur nicht kleiner als m' ist, es werden immer unter jenen Werthen von δ einige vorhanden sein, für welche R_m' grösser als σ ist und deshalb ist offenbar die gegebene Reihe Σu_n in dem Intervall (α, β) auch nicht einmal einfach gleichmässig convergent und kann in demselben Intervall höchstens nur im Allgemeinen gleichmässig convergent sein, wenn ihre Glieder $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ continuirliche Functionen sind und ihre Summe $f(x)$ in dem Intervall im Allgemeinen continuirlich ist.

---

§ 93. Wir gehen nun dazu über, die folgenden allgemeinen Sätze zu begründen:

Lehrsatz I. Wenn die Glieder $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ der Reihe Σu_n zwischen α und β (α und β eingeschlossen) immer endliche Functionen von x sind und wenn die Reihe $\Sigma u_n'$, welche sich aus den oberen Grenzwerthen der absoluten Werthe eben dieser Glieder oder aus Zahlen bilden lässt, die grösser als diese Grenzwerthe sind, convergent ist, dann ist die ursprüngliche Reihe Σu_n für alle Werthe von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen) convergent und ist daher eine Function von x; sie ist überdies convergent unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder und ist gleichmässig convergent.

Wir wollen mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$ die absoluten Werthe der $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ für einen beliebigen speciellen Werth von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen) bezeichnen. Die Reihe $\Sigma \varrho_n$, deren Glieder kleiner als diejenigen der Reihe $\Sigma u_n'$ oder ihnen höchstens gleich sind, ist zugleich mit dieser convergent. Daher ist die Reihe Σu_n für jeden in Betracht gezogenen speciellen Werth von x, wie auch für alle anderen, convergent unabhängig von der Ordnung ihrer Glieder und in Folge dessen stellt sie in dem ganzen Intervall eine Function von x dar. Ueberdies ist

$$\varrho_{n+1} + \varrho_{n+2} + \cdots \leqq u_{n+1}' + u_{n+2}' + \cdots.$$

Wird also m so gewählt, dass für $n \geqq m$

$$u_{n+1}' + u_{n+2}' + \cdots < \sigma$$

ist, so besitzt offenbar diese Zahl m auch die Eigenschaft, dass der Rest R_n der Reihe Σu_n, wenn $n \geq m$ ist, für alle Werthe von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen) seinem absoluten Werth nach stets kleiner als σ ist. Die Reihe Σu_n ist deshalb in dem Intervall (α, β) ebenfalls gleichmässig convergent und damit der Satz vollständig bewiesen.

Es ist zu bemerken, dass, wenn die Glieder u_n der Reihe Σu_n, anstatt Functionen von x zwischen α und β zu sein, nur für gewisse, einer Punktmenge erster oder zweiter Gattung zwischen α und β entsprechende, Werthe von x gegeben sind, der bewiesene Satz seine Gültigkeit nach wie vor behält mit dem einzigen Unterschied, dass nunmehr die Summe $U(x)$ der Reihe Σu_n nicht im gewöhnlichen Sinn eine Function von x zwischen α und β ist, sondern eine Grösse ist, welche nur für die Werthe von x eine Bedeutung hat, für welche diese Glieder u_n gegeben sind.

---

§ 94. Lehrsatz II. Wenn die Glieder $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ einer Reihe Σu_n in einem Intervall $(a, a + \varepsilon)$, welches zur Rechten eines Punktes a liegt und dessen Ausdehnung von Null verschieden aber beliebig klein ist, Functionen von x sind, oder auch, wenn sie nur in einer unendlich grossen Menge von Punkten x desselben Intervalls, für welche a einfach ein Grenzpunkt ist, gegeben sind; wenn ferner ihre Grenzwerthe u_n' für $x = a + 0$ bestimmt und endlich sind und die Reihe Σu_n in demselben Intervall und für die in Betracht kommenden Werthe von x gleichmässig convergent ist, so hat auch die Summe $U(x)$ dieser Reihe für $x = a + 0$ einen bestimmten und endlichen Grenzwerth und dieser Grenzwerth ist die Summe der Reihe der Grenzwerthe $\Sigma u_n'$ (so dass diese Reihe nach einer endlichen Anzahl von Gliedern abbricht oder convergent ist).

Sind nämlich x_1 und x_2 zwei beliebige Werthe von x, welche in Betracht kommen können und zwischen a und $a + \varepsilon$ (a ausgeschlossen) liegen und wenn man unter $u_n(x)$ und $R_m(x)$ die Werthe von u_n und R_m für den Werth x der Variabelen versteht, so ist:

$$U(x_1) - U(x_2) = \sum_1^m [u_n(x_1) - u_n(x_2)] + R_m(x_1) - R_m(x_2).$$

Nach den gemachten Voraussetzungen kann man m immer so wählen, dass die Reste $R_m(x)$ für alle zwischen a und $a+\varepsilon$ in Betracht kommenden Werthe von x und daher auch für die Werthe x_1 und x_2 numerisch kleiner als eine beliebig kleine Zahl σ sind.

Da aber die Zahl m, nachdem sie auf solche Weise ausgewählt worden ist, als eine feste Grösse betrachtet werden kann, so lässt sich offenbar (§ 22) eine Zahl $\varepsilon_1 < \varepsilon$ so ermitteln, dass für alle zwischen a und $a+\varepsilon_1$ (a ausgeschlossen) liegenden Werthe von x_1 und x_2 die Summe

$$\sum_1^m [u_n(x_1) - u_n(x_2)]$$

ebenfalls numerisch kleiner als σ ausfällt. Daher ist offenbar

$$| U(x_1) - U(x_2) | < 3\sigma$$

und die Summe $U(x)$ der gegebenen Reihe hat also für

$$x = a + 0$$

(§ 22) einen bestimmten und endlichen Grenzwerth.

Nennt man nun diesen Grenzwerth U, so kann man offenbar eine Zahl $\varepsilon_2 < \varepsilon$ so klein wählen, dass für alle zwischen a und $a+\varepsilon_2$ (a ausgeschlossen) in Betracht kommenden Werthe von x die Differenz $U(x) - U$ numerisch kleiner wie σ ist. Weil aber:

$$U(x) - \sum_1^m u_n' = \sum_1^m [u_n(x) - u_n'] + R_m(x),$$

so ist offenbar:

$$U - \sum_1^m u_n' = \sum_1^m [u_n(x) - u_n'] + R_m(x) + \Theta\sigma,$$

wenn Θ zwischen -1 und $+1$ liegt. Bedenkt man nun weiter, dass wegen der gleichmässigen Convergenz von Σu_n zwischen a und $a+\varepsilon$ von einem gewissen Werth m' von m ab die Reste $R_m(x)$ numerisch immer kleiner als σ sind und dass man, wie gross auch m angenommen wird, dann immer ε_2 so klein wählen kann, dass die Summe

$$\sum_1^m [u_n(x) - u_n']$$

ebenfalls numerisch kleiner wie σ wird, so kommt man zu dem Schluss, dass von einem gewissen Werth von m an stets

$$| U - \sum_1^m u_n' | < 3\sigma$$

sein muss. Deshalb ist $\Sigma u_n'$ eine endliche oder eine convergente unendliche Reihe, deren Summe gleich U ist. Damit ist der Beweis des Satzes vollständig geliefert.

Hätte man vorausgesetzt, dass die Reihe Σu_n zwischen a und $a + \varepsilon$ nur einfach gleichmässig convergent ist, so hätte sich aus dem ersten Theil des vorstehenden Beweises ergeben, dass auch in diesem Fall die Summe $U(x)$ dieser Reihe für $x = a + 0$ einen bestimmten und endlichen Grenzwerth hat, es würde aber ungewiss geblieben sein, ob dieser Grenzwerth die Summe der Reihe der Grenzwerthe $\Sigma u_n'$ ist oder nicht. Wenn man allerdings auch wüsste, dass die Reihe $\Sigma u_n'$ sich auf ein endliches Polynom reducirt oder convergent ist, so würde jener Zweifel fallen; es würde dann der Grenzwerth von Σu_n die Summe der Reihe $\Sigma u_n'$ sein; denn in diesem Fall hätte man, unter R_m' den Rest dieser Reihe $\Sigma u_n'$ verstanden, die Beziehung

$$U(x) - \Sigma u_n' = \sum_1^m [u_n(x) - u_n'] + R_m(x) - R_m';$$

und wenn man nunmehr m grösser als jene Zahl m' wählt, für welche R_m' gleich Null oder numerisch kleiner als σ ist und zugleich derart, dass stets $R_m(x) < \sigma$ ist, so würde man bei hinreichend kleinem ε finden, dass $\lim U(x) = \Sigma u_n'$.

---

§ 95. Lehrsatz III. Wenn die Glieder einer Reihe Σu_n in einem gegebenen Intervall (α, β) Functionen von x sind oder von einer Variabelen x abhängen, die fähig ist, eine unendlich grosse Anzahl von Werthen anzunehmen, von welchen a ein Grenzpunkt ist und wenn diese Glieder u_n für $x = a$ rechts oder links zum

Beispiel auf der rechten Seite Grenzwerthe u_n' haben, die bestimmt und endlich sind, so besteht die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass die Summe $U(x)$ der Reihe Σu_n für $x = a + 0$ einen bestimmten und endlichen Grenzwerth habe und dass dieser Grenzwerth die Summe der Reihe der Grenzwerthe $\Sigma u_n'$ darstelle, in Folgendem: 1) muss diese Grenzwerthreihe $\Sigma u_n'$ convergent sein, 2) müssen sich zu jeder positiven und beliebig kleinen Zahl σ und zu jeder willkürlich grossen ganzen Zahl m' zwei Zahlen ε und m finden lassen, von denen die erste von Null verschieden und positiv und die zweite ganzzahlig und grösser als m' ist, dergestalt, dass für alle zwischen a und $a + \varepsilon$ (a ausgeschlossen) in Betracht kommenden Werthe von x der Rest $R_m(x)$ der Reihe Σu_n numerisch kleiner als σ ist.

Wir wollen in der That annehmen, die Reihe der Grenzwerthe $\Sigma u_n'$ sei convergent und bemerken, dass

$$(8) \quad U(x) - \Sigma u_n' = \sum_1^m [u_n(x) - u_n'] + R_m(x) - R_m',$$

wenn R_m' der Rest der Reihe der Grenzwerthe $\Sigma u_n'$ ist. In dieser Formel kann m grösser als die Zahl m' vorausgesetzt werden, von welcher an wegen der Convergenz von $\Sigma u_n'$ dem absoluten Werth nach $R_m' < \sigma$ ist. Wenn alsdann auch die zweite der oben gestellten Bedingungen erfüllt ist, so lassen sich immer zwei Zahlen m und ε finden, durch welche $R_m(x)$ für alle zwischen a und $a + \varepsilon$ (a ausgeschlossen) in Betracht kommenden Werthe von x ebenfalls numerisch kleiner als σ wird. Nimmt man, nachdem so der Werth von m festgelegt worden ist, eine Zahl $\varepsilon_1 < \varepsilon$, so kann man auch erreichen, dass, wenn x zwischen a und $a + \varepsilon_1$ liegt, dem absoluten Werth nach stets

$$\sum_1^m [u_n(x) - u_n'] < \sigma$$

ist. Damit kommt man zu dem Schluss, dass für diese Werthe von x stets dem absoluten Werth nach:

$$U(x) - \Sigma u_n' < 3\sigma$$

und deshalb:

$$\lim U(x) = \Sigma u_n'$$

ist.

Wenn umgekehrt

$$\lim U(x) = \Sigma u_n'$$

ist, so ist die Reihe $\Sigma u_n'$ convergent und man kann eine Zahl m' finden, von welcher aufwärts dauernd dem absoluten Werth nach

$$R_m' < \frac{\sigma}{3}$$

ist. Nimmt man dann eine Zahl $m > m'$, so lässt sich auch eine entsprechende Zahl ε_1 finden so, dass für alle zwischen a und $a + \varepsilon_1$ in Betracht kommenden Werthe von x stets

$$\left| U(x) - \sum_1^m u_n' \right| < \frac{\sigma}{3} \quad \text{und} \quad \left| \sum_1^m [u_n(x) - u_n] \right| < \frac{\sigma}{3}$$

ist. Alsdann hat man auch nach Formel (8) für dieselben Werthe von x offenbar

$$R_m(x) < \sigma,$$

womit dann der Satz als vollständig erwiesen angesehen werden kann.

---

§ **96.** Der letzte Theil des obigen Beweises zeigt auch, dass, wenn

$$\lim U(x) = \Sigma u_n'$$

ist, für jede Zahl m, die eine gewisse Zahl m' an Grösse übertrifft, eine Zahl ε_1 existirt so, dass für alle zwischen a und $a + \varepsilon_1$ (a ausgeschlossen) in Betracht kommenden Werthe von x dem absoluten Werth nach $R_m(x) < \sigma$ ist.

Umgekehrt, wenn dieses letztere der Fall ist, findet man durch Wiederholung der Ausführungen, die dazu dienten, den Satz in § 94 zu beweisen, dass

$$\lim U(x) = \Sigma u_n'$$

ist. Man kann daher offenbar auch das Folgende behaupten:

Lehrsatz IV. Die Glieder einer Reihe Σu_n seien in einem gegebenen Intervall (α, β) Functionen von x oder seien von einer Variabelen x abhängig, welche

fähig ist, eine unendlich grosse Anzahl von Werthen anzunehmen, für welche a ein Grenzpunkt ist und die Grenzwerthe dieser Glieder seien für $x = a + 0$ bestimmt und endlich. Damit alsdann der Grenzwerth der Summe $U(x)$ der Reihe Σu_n für $x = a + 0$ bestimmt und endlich sei und die Summe der Reihe der Grenzwerthe $\Sigma u_n'$ darstelle, dazu ist es nothwendig und ausreichend, dass zu jeder beliebig kleinen, positiven Zahl σ und zu *jedem* Werth von m, der grösser als eine gegebene, hinreichend grosse Zahl m' ist, eine Zahl ε (mit m veränderlich oder nicht) existire so, dass für alle zwischen a und $a + \varepsilon$ (a ausgeschlossen) in Betracht kommenden Werthe von x der Rest $R_m(x)$ der Reihe Σu_n numerisch kleiner als σ ist.

Um Irrthümer zu vermeiden, bemerken wir ausdrücklich, dass die in diesem Satz enthaltene Bedingung eine nothwendige Bedingung für die Existenz des Grenzwerths der Summe $U(x)$ der Reihe Σu_n nur dann ist, wenn man (wie in dem Satz) auch verlangt, dass dieser Grenzwerth die Summe der Reihe der Grenzwerthe $\Sigma u_n'$ sei. Sie hört auf, eine nothwendige Bedingung zu sein, wenn man, ohne sich um die Reihe $\Sigma u_n'$ zu kümmern, einfach die Forderung stellt, dass die Summe $U(x)$ einen bestimmten und endlichen Grenzwerth habe. Denn offenbar ist es der Gleichung

$$U(x_1) - U(x_2) = \sum_1^m [u_n(x_1) - u_n(x_2)] + R_m(x_1) - R_m(x_2)$$

wegen für die Existenz des Grenzwerths $U(x)$ nur erforderlich, dass für die zwischen a und $a + \varepsilon$ liegenden Werthe von x bei hinreichend kleinem ε dem absoluten Werth nach $R_m(x_1) - R_m(x_2) < \sigma$ sei.

---

§ 97. Lehrsatz V. Wenn in einer beliebig kleinen, aber von Null verschiedenen Umgebung

$$(a - \varepsilon_1, \quad a + \varepsilon_2)$$

eines Punktes a die Glieder $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ einer Reihe Σu_n endliche Functionen von x sind, welche

zudem im Punkt a continuirlich verlaufen, und wenn die Reihe selbst in der nämlichen Umgebung wenigstens einfach gleichmässig convergent ist, so ist die Summe der Reihe Σu_n für $x = a$ eine endliche und stetige Function von x.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der am Schluss des § 94 gemachten Bemerkung, kann aber auch aus dem § 92 abgeleitet werden; denn könnte $f(x)$ für $x = a$ discontinuirlich sein, so würde, wie wir damals ausgeführt haben, die Reihe Σu_n in dem Intervall $(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_2)$ nicht einmal einfach gleichmässig convergent sein.

Man kann sogar mit Rücksicht auf den Beweis in § 94 davon absehen, in dem eben aufgestellten Lehrsatz a priori die Bedingung der Convergenz der Reihe Σu_n für $x = a$ zu stellen, vorausgesetzt nur, dass man weiss, dass diese Reihe in allen andern Punkten der Umgebung $(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_2)$ durchaus gleichmässig convergent ist.

---

§ 98. Aus dem eben bewiesenen Lehrsatz folgt dann als besonderer Fall:

Lehrsatz VI. Wenn die Glieder einer Reihe Σu_n in einem ganzen Intervall (α, β) endliche und continuirliche Functionen von x sind und wenn in diesem Intervall die Reihe Σu_n wenigstens einfach gleichmässig convergent ist, so ist auch ihre Summe $f(x)$ in diesem Intervall eine endliche und continuirliche Function von x. Und auf Grund dieses Satzes kann man nun auch behaupten: Wenn eine Reihe Σu_n in einem ganzen Intervall (α, β) wenigstens einfach gleichmässig convergent ist, so kann ihre Summe $f(x)$ in diesem Intervall nur in den Punkten discontinuirlich sein, in welchen eine oder mehrere der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ discontinuirlich sind.

---

§ 99. Beschränkt man sich nun auf den Fall von Reihen, deren Glieder nicht nur in dem ganzen Intervall (α, β) endliche und continuirliche Functionen von x, sondern auch wenigstens von einem bestimmten endlichen Werth m' von n an für alle in Frage kommenden x positiv sind, so lässt sich auch die Umkehrung des eben gegebenen Satzes beweisen, das heisst, es lässt sich zeigen, dass, sobald die Summe einer solchen Reihe eine endliche und stetige Function von x ist, diese Reihe selbst in dem ganzen Intervall (α, β) gleichmässig convergent ist.

Bezeichnet nämlich Σu_n eine Reihe, welche die eben angegebenen Bedingungen erfüllt, so existiren zu jedem besonderen Werth von x zwischen α und β unendlich viele Zahlen m, die grösser als die Zahl m' und derart sind, dass die entsprechenden Reste $R_n(x)$ der gegebenen Reihe für den in Betracht kommenden Werth von x und für $n \geqq m$ immer kleiner als σ ausfallen.

Unter diesen unendlich vielen Zahlen m denken wir uns die kleinste ausgewählt und bezeichnen sie mit $m(x, \sigma)$. Lässt man alsdann σ unverändert, so erhält diese Zahl $m(x, \sigma)$ für jeden Werth von x eine bestimmte Bedeutung und die Grösse $\frac{1}{m(x, \sigma)}$ kann als eine endliche und bestimmte Function von x für alle Werthe von x zwischen α und β betrachtet werden.

Daraus folgt (§§ 15 und 36), dass in demselben Intervall (α, β) ein unterer Grenzwerth μ der Werthe $\frac{1}{m(x, \sigma)}$ existirt und dass zwischen α und β wenigstens ein bestimmter Punkt x' vorhanden sein muss, der solcher Art ist, dass für die Punkte jeder noch so beliebig kleinen Umgebung von x' der untere Grenzwerth von $\frac{1}{m(x, \sigma)}$ immer wieder μ ist.

Weil nun die Reihe Σu_n im Punkt x' convergirt, kann man für sie eine endliche Zahl $m_1 > m'$ der Art finden, dass für $n \geqq m_1$ stets

$$R_n(x') < \frac{\sigma}{3}$$

ist und weil

$$f(x'+\delta)-f(x')=\sum_1^{m_1}\Big[u_n(x'+\delta)-u_n(x')\Big]+$$
$$+R_{m_1}(x'+\delta)-R_{m_1}(x'),$$

während gleichzeitig vermöge der Stetigkeit der $f(x)$ und der Glieder $u_n(x)$ ein Intervall

$$(x'-\varepsilon_1,\quad x'+\varepsilon_2)$$

existirt, in welchem

$$\left|f(x'+\delta)-f(x')\right|<\frac{\sigma}{3},\quad \left|\sum_1^{m_1}\Big[u_n(x'+\delta)-u_n(x')\Big]\right|<\frac{\sigma}{3},$$

so folgt, dass in diesem Intervall

$$R_{m_1}(x'+\delta)<\sigma$$

ist. Berücksichtigt man nun noch die gestellte Bedingung, dass die Glieder von Σu_n von dem Index m' an sämmtlich positiv sein sollen, so sieht man, dass $R_n(x)$ für alle Werthe von n, die nicht kleiner als m_1 sind, und für alle Punkte x zwischen $x'-\varepsilon_1$ und $x'+\varepsilon_2$ kleiner als σ sein muss.

Folglich kann μ nicht kleiner sein als $\frac{1}{m_1}$ und also $m(x,\sigma)$ niemals grösser als m_1. Dies beweist aber gerade, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Reihe Σu_n zwischen α und β gleichmässig convergent ist, wie unser Lehrsatz verlangt[1]).

Aus dem eben bewiesenen Satz geht dann offenbar, wie wir noch bemerken wollen, die folgende Verallgemeinerung hervor: Wenn Σu_n eine reelle oder complexe Reihe ist, deren Glieder in dem ganzen Intervall (α,β) (die Endpunkte eingeschlossen) endliche und stetige Functionen von x sind und wenn diese Reihe unabhängig von der Ordnung der Glieder convergirt, ausserdem aber so beschaffen ist, dass die Summe der entsprechenden Reihe $\Sigma u_n'$ der absoluten Beträge in dem

---

1) Ohne die Bedingungen ist der Satz nicht richtig. Vgl. Du Bois-Reymond Math. Ann. Bd. 4 S. 135. Cantor Math. Ann. Bd. 16 S. 269 u. Du Bois-Reymond Abh. d. Münch. Academie II. Cl. Bd. 12 S. 120, Darboux Ann. Éc. Norm. 2. Serie Bd. 4 S. 79.

ganzen Intervall eine endliche und continuirliche Function von x ist, so ist die Reihe Σu_n in dem gegebenen Intervall (α, β) gleichmässig convergent.

---

§ 100. Indem wir nun dazu übergehen, die Derivirte von Reihen in den Kreis unserer Untersuchungen zu ziehen, bemerken wir zuerst, dass die Lehrsätze der §§ 94, 95 und 96 ohne Weiteres die folgenden liefern:

Lehrsatz VII. Wenn die Glieder $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ einer convergenten Reihe Σu_n in einer beliebig kleinen aber von Null verschiedenen Umgebung

$$(a - \varepsilon_1, \quad a + \varepsilon_2)$$

eines Punktes a Functionen von x sind, die für $x = a$ auch eine bestimmte und endliche Derivirte u_n' besitzen, alsdann hat jedesmal, wenn die Reihe

$$\sum \left[\frac{u_n(a + \delta) - u_n(a)}{\delta} \right]$$

für die Punkte $a + \delta$, welche in dieselbe Umgebung (a ausgeschlossen) fallen, gleichmässig convergent ist, auch die Summe $f(x)$ der Reihe Σu_n für $x = a$ eine bestimmte und endliche Derivirte, welche die Summe der Reihe $\Sigma u_n'$ der Derivirten ihrer Glieder ist.

§ 101. Lehrsatz VIII. Wenn die vorstehenden Bedingungen in Betreff der Glieder $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ der Reihe Σu_n in der Umgebung $(a - \varepsilon_1, \ a + \varepsilon_2)$ des Punktes a erfüllt sind, so ist dafür, dass die Summe $f(x)$ dieser Reihe Σu_n für $x = a$ eine endliche und bestimmte Derivirte habe und dass diese die Summe der Reihe $\Sigma u_n'$ der Derivirten von $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sei, das Folgende nothwendig und ausreichend: 1) Es muss diese Reihe $\Sigma u_n'$ der Derivirten von u_n convergent sein. 2) Es müssen sich zu jeder positiven und be-

liebig kleinen Zahl σ und zu jeder ganzen willkürlich grossen Zahl m' zwei Zahlen ε und m finden lassen, von denen die erste von Null verschieden und positiv und die zweite ganzzahlig und grösser als m' ist der Art, dass für alle Werthe von δ, die numerisch kleiner als ε sind und für welche der Punkt $a + \delta$ in das Innere des Intervalls $(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_2)$ fällt, die Grösse

$$\frac{R_m(a + \delta) - R_m(a)}{\delta}$$

numerisch kleiner als σ ist, wobei allgemein mit $R_m(x)$ der Rest der Reihe Σu_n für den Werth x der Variabelen bezeichnet wird.

§ 102. Lehrsatz IX. Lässt man die gemachten Voraussetzungen noch gelten, so kann man auch sagen: Dafür, dass die Summe $f(x)$ der Reihe Σu_n für $x = a$ eine bestimmte und endliche Derivirte habe und dass diese die Summe der Reihe $\Sigma u_n'$ der Derivirten von

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

sei, ist es nothwendig und ausreichend, dass zu jeder positiven und beliebig kleinen Zahl σ und zu jeder Zahl m, die grösser als eine ganze hinreichend grosse Zahl m' ist, sich eine positive Zahl ε (mit m veränderlich oder nicht) finden lasse der Art, dass für alle Werthe von δ, die numerisch hinter ε zurückbleiben und für welche der Punkt $a + \delta$ in das Intervall $(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_2)$ fällt, die Grösse

$$\frac{R_m(a + \delta) - R_m(a)}{\delta}$$

numerisch kleiner als σ ist.

§ 103. Diesen Sätzen reiht sich der folgende an, der leicht zu bewiesen ist:

Lehrsatz X. Soll die Summe $f(x)$ einer Reihe Σu_n, deren Glieder wieder die obigen Bedingungen erfüllen, für $x = a$ eine bestimmte und endliche Deri-

virte haben und soll diese Derivirte die Summe der Reihe $\Sigma u_n'$ der Derivirten von $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sein, so ist dazu zweierlei erforderlich und hinreichend: 1) muss die Reihe $\Sigma u_n'$ der Derivirten convergent sein, 2) muss zu jeder positiven und beliebig kleinen Zahl σ eine von Null verschiedene und positive Zahl ε so gefunden werden können, dass für jeden speciellen Werth von δ, der numerisch kleiner als ε ist und für welchen der Punkt $a + \delta$ in das Intervall

$$(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_2)$$

fällt, eine endliche (mit δ veränderliche) Zahl m existirt, welche nicht kleiner als eine gegebene Zahl m' ist und für welche die drei Grössen

$$\sum_1^m \left[\frac{u_n(a+\delta) - u_n(a)}{\delta} - u_n'\right], \quad \frac{R_m(a+\delta)}{\delta}, \quad \frac{R_m(a)}{\delta}$$

numerisch sämmtlich kleiner als σ sind.

Wenn nämlich diese Bedingungen erfüllt sind, so lässt sich vermöge der Convergenz der Reihe $\Sigma u_n'$ eine endliche Zahl m' so ermitteln, dass der Rest R_n' dieser Reihe für $n > m'$ numerisch kleiner als σ ist. Da man nun immer setzen kann:

$$\frac{f(a+\delta) - f(a)}{\delta} - \sum u_n' = \sum_1^m \left[\frac{u_n(a+\delta) - u_n(a)}{\delta} - u_n'\right] + \\ + \frac{R_m(a+\delta)}{\delta} - \frac{R_m(a)}{\delta} - R_m',$$

so braucht man für m nur eine Zahl zu wählen, die grösser als m' ist und für den in Betracht gezogenen Werth von δ den oben genannten Bedingungen genügt, um sich sofort zu überzeugen, dass für alle unterhalb ε gelegenen Werthe von δ, die in Betracht kommen können, die Grösse

$$\frac{f(a+\delta) - f(a)}{\delta} - \sum u_n'$$

ihrem Absolutwerth nach kleiner als 4σ bleibt. Dieses besagt natürlich, dass, wenn die genannten Bedingungen erfüllt sind,

$$\lim \frac{f(\alpha+\delta) - f(\alpha)}{\delta} = \sum u_n'$$

ist.

Wenn umgekehrt $f(x)$ für $x = a$ eine endliche und bestimmte Derivirte hat, welche die Summe der Reihe $\Sigma u_n'$ ist, so ist diese letztere convergent. Es existirt dann nicht nur eine Zahl m' so, dass, wenn $m \geqq m'$, dem absoluten Werth nach

$$R_m' < \frac{\sigma}{4}$$

ist, sondern es giebt auch eine von Null verschiedene, positive Zahl ε der Art, dass für alle Werthe von δ, die numerisch kleiner als ε sind und in Betracht kommen können, die Differenz

$$\frac{f(a+\delta) - f(a)}{\delta} - \sum u_n'$$

numerisch ebenfalls kleiner als $\frac{\sigma}{4}$ ist. Bedenkt man ferner, dass in Folge der Convergenz von Σu_n für alle Werthe von x zwischen $a - \varepsilon$ und $a + \varepsilon$, welche in das Intervall

$$(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_2)$$

fallen und für jeden der in Betracht kommenden Werthe von δ offenbar eine entsprechende Zahl $m > m'$ existirt, für welche die beiden Grössen

$$\frac{R_m(a+\delta)}{\delta}, \quad \frac{R_m(a)}{\delta}$$

kleiner als $\frac{\sigma}{4}$ sind, so überzeugt man sich, dass für diese Werthe von δ und m numerisch

$$\sum_1^m \left[\frac{u_n(a+\delta) - u_n(a)}{\delta} - u_n'\right] < \sigma$$

ist, womit dann der Satz vollständig bewiesen ist.

---

§ 104. Es ist weiter zu bemerken, dass, wenn die Glieder

$$u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$$

auch noch die Eigenschaft besitzen, dass sie in einer ganzen hinreichend kleinen Umgebung

$$(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_2)$$

des Punktes a eine endliche und bestimmte Derivirte haben, dasselbe bei jedem beliebigen m, falls dasselbe nur endlich ist,

auch für alle Summen $\sum_1^{m} u_n(x)$ der Fall ist. Bezeichnet man daher mit $u_n'(x)$ die Derivirten von $u_n(x)$, so hat man für alle Werthe von δ, bei welchen der Punkt $a+\delta$ in diese Umgebung fällt (§ 72, 5), die Gleichungen:

$$\sum_1^{m}\left[\frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta}\right]=\frac{\sum_1^{m} u_n(a+\delta)-\sum_1^{m} u_n(a)}{\delta}$$

$$=\left[\sum_1^{m} u_n'(x)\right]_{x=a+\Theta\delta},$$

oder auch

$$\sum_1^{m}\left[\frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta}-u_n'(a)\right]=\sum_1^{m}\left[u_n'(a+\Theta\delta)-u_n'(a)\right],$$

in welchen Θ eine positive, zwischen 0 und 1 liegende Zahl ist, die für alle Glieder unserer Summe dieselbe bleibt, aber von m und δ abhängt. In diesem Fall lässt sich also die zweite der Bedingungen des vorstehenden Satzes auf eine durchaus gleiche Bedingung für die drei Grössen

$$\sum_1^{m}\left[u_n'(a+\Theta\delta)-u_n'(a)\right],\quad \frac{R_m(a+\delta)}{\delta},\quad \frac{R_m(a)}{\delta}$$

zurückführen.

§ 105. Gestützt auf das letzte Theorem, kann man nun auch beweisen:

Lehrsatz XI. Wenn eine Reihe Σu_n in jeder hinreichend kleinen Umgebung

$$(a-\varepsilon_1,\ a+\varepsilon_2)$$

eines Punktes a convergent ist und ihre Glieder einzeln eine endliche und bestimmte Derivirte besitzen, und wenn die Reihe $\Sigma u_n'(x)$ dieser Derivirten in derselben Umgebung gleichmässig convergent ist, alsdann hat auch die Summe $f(x)$ der Reihe Σu_n im Punkt a eine endliche und bestimmte Derivirte, welche die Summe der entsprechenden Reihe der Derivirten $\Sigma u_n'(a)$ ist.

Wir sehen, dass in diesem Fall die erste der Bedingungen des Lehrsatzes in § 103 erfüllt ist und wollen mit m' eine solche Zahl bezeichnen, dass für $m \geq m'$ und für alle Werthe von x zwischen $a - \varepsilon_1$ und $a + \varepsilon_2$ der Rest $R'_m(x)$ der Reihe $\Sigma u'_n(x)$ numerisch kleiner als $\frac{\sigma}{8}$ ist.

Für $m > m'$ ist dem absoluten Werth nach

$$\sum_{m'+1}^{m} u'_n(x) < \frac{\sigma}{4}.$$

Beachtet man ferner, dass offenbar die Gleichung besteht:

$$\sum_{1}^{m}\left[\frac{u_n(a+\delta) - u_n(a)}{\delta} - u'_n(a)\right] =$$

$$= \sum_{1}^{m'}\left[\frac{u_n(a+\delta) - u_n(a)}{\delta} - u'_n(a)\right] +$$

$$+ \sum_{m'+1}^{m}\left[u'_n(a+\Theta\delta) - u'_n(a)\right],$$

in welcher Θ eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl ist, welche von m und δ abhängt und in allen Gliedern der Summe $\sum\limits_{m'+1}^{m}$ die nämliche ist, so überzeugt man sich, dass

$$\left|\sum_{m'+1}^{m}\left[u'_n(a+\Theta\delta) - u'_n(a)\right]\right|$$

für alle Werthe von m, die grösser als m' sind, kleiner als $\frac{\sigma}{2}$ ist. Da andererseits m' endlich ist, so existirt immer eine solche Zahl ε, dass für alle Werthe von δ, die numerisch kleiner als ε sind, die Ungleichung besteht

$$\left|\sum_{1}^{m'}\left[\frac{u_n(a+\delta) - u_n(a)}{\delta} - u'_n(a)\right]\right| < \frac{\sigma}{2}.$$

Man kann daher behaupten, dass

$$\left|\sum_{1}^{m}\left[\frac{u_n(a+\delta) - u_n(a)}{\delta} - u'_n(a)\right]\right.$$

für jeden Werth von m, der nicht kleiner als m' ist und für die obigen Werthe von ε und δ kleiner als σ ist.

Fügt man noch hinzu, dass vermöge der Convergenz von Σu_n in dem ganzen Intervall

$$(a - \varepsilon_1, \; a + \varepsilon_2)$$

zu jedem dieser Werthe δ ein entsprechender Werth von $m \geqq m'$ existirt, für welchen auch die beiden Grössen

$$\frac{R_m(a+\delta)}{\delta}, \quad \frac{R_m(a)}{\delta}$$

numerisch kleiner als σ sind, so sieht man ein, dass auch die zweite der Bedingungen des Lehrsatzes X erfüllt ist, und damit ist der aufgestellte Satz vollständig bewiesen.

---

§ 106. Zum Schluss bemerken wir, dass, wenn die Summe $f(x)$ der Reihe Σu_n für $x = a$ eine endliche und bestimmte Derivirte $f'(x)$ hat und die Reihe $\Sigma u_n'(a)$ convergirt, aber ihre Summe von $f'(a)$ verschieden ist, dass dann offenbar die zweite der Bedingungen der Lehrsätze VIII und X nicht erfüllt ist. Ebenso wird, wenn die Derivirte der $f(x)$ für $x = a$ unendlich gross oder unbestimmt ist, wenigstens eine der Bedingungen der beiden Lehrsätze nicht erfüllt sein können; und da es zum mindesten zweifelhaft ist, ob auch in diesem Fall die erste Bedingung erfüllt ist, die zweite aber nicht, so sieht man ein, dass der Satz Duhamel's, den Bertrand in seiner Differenzialrechnung Seite 271 anführt, sehr wohl auch nicht allgemein gültig sein kann. Uebrigens beseitigt auch der von Bertrand dazu gegebene Beweis den Zweifel über seine allgemeine Gültigkeit nicht.

Ebenso können wenigstens die Sätze über die Ableitung der allgemeinen unendlichen Reihen, welchen man gewöhnlich in den Lehrbüchern der Differenzial- und Integralrechnung begegnet, nicht als vollständig bewiesen angesehen werden[1].

1) Weitere Untersuchungen über diese Fragen finden sich bei Du Bois-Reymond, Journ. f. Math. Bd. 100 S. 331.

Neuntes Kapitel.

Das Princip der Verdichtung der Singularitäten.

§ 107. Die in dem vorhergehenden Abschnitt entwickelten Lehrsätze über unendliche Reihen setzen uns in den Stand, ein Princip, welchem Hankel[1]) den Namen „Princip der Verdichtung der Singularitäten" beigelegt hat, mit aller Strenge zu beweisen. Den Namen führt dasselbe daher, weil man, ausgehend von einer Function, welche nur in einem Punkt des gegebenen Intervalls Singularitäten in Bezug auf die Continuität, die Derivirte oder die Maxima und Minima aufweist, mit seiner Hülfe dazu gelangt, analytische Ausdrücke unendlich vieler Functionen aufzustellen, welche dieselben Eigenthümlichkeiten in einer unendlich grossen Anzahl von Punkten eines beliebigen Theils des Intervalls, in welchem sie in Betracht gezogen werden, aufweisen.

$\varphi(y)$ sei eine Function, welche in dem ganzen Intervall zwischen -1 und 1 (die Endpunkte eingeschlossen) höchstens mit Ausnahme des Punktes $y = 0$ continuirlich und numerisch stets kleiner als eine gegebene endliche Zahl und für $y = 0$ Null ist.

Die Function $\varphi(\sin nx\pi)$ ist für die Werthe von x, welche nicht von der Form $\frac{m}{n}$, unter m und n ganze Zahlen verstanden, sind, endlich und continuirlich und für die Werthe von x, die von dieser Form sind, gleich Null. Wenn daher s grösser als die Einheit ist, so ist die Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s}$$

in einem beliebigen Intervall (§ 93) gleichmässig convergent und ihre Summe ist eine stets endliche Function $f(x)$ von x, welche für alle Werthe von x, welche nicht die Form $\frac{m}{n}$,

---

1) Untersuchungen über die unendlich oft unstetigen und oscillir. Functionen. Vgl. auch Darboux, Annal. d. l'École Norm. sup. 2[te] Serie Bd. 4 S. 92 ff. Gilbert, Mém. cour. de Belg. Bd. 23. Heft 3.

unter m eine ganze Zahl verstanden, haben, das heisst also für die irrationalen Werthe von x, auch continuirlich ist (§ 97). Und wenn $\varphi(y)$ auch für $y = 0$ continuirlich ist, alsdann ist $f(x)$ auch für die rationalen Werthe von x continuirlich.

---

§ 108. Um nun zu erkennen, wie sich $f(x)$ für die rationalen Werthe von x verhält, wenn $\varphi(y)$ für $y = 0$ discontinuirlich ist, bemerken wir, dass man, wenn $\varphi(0) = 0$ und $\frac{\nu}{\mu}$ ein rationaler Werth von x und ν und μ ganze Zahlen sind, die prim zu einander sind, die Relation erhält:

$$f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\mu} \frac{\varphi\left(\sin n \frac{\nu}{\mu} \pi\right)}{n^s},$$

in welcher die Summe auf alle Werthe von n ausgedehnt wird, die keine Vielfache von μ sind, was wie im Folgenden durch das dem Σ angehängte μ angedeutet sei. Es ist daher

$$(1)\begin{cases} f\left(\frac{\nu}{\mu} + \delta\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\mu} \frac{\varphi\left[\sin n \left(\frac{\nu}{\mu} + \delta\right) \pi\right] - \varphi\left(\sin n \frac{\nu}{\mu} \pi\right)}{n^s} + \\ \qquad + \frac{1}{\mu^s} \sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi\left(\pm \sin n \mu \delta \pi\right)}{n^s}, \end{cases}$$

wobei sich die letzte Summe auf alle Werthe von n zwischen 1 und ∞ erstreckt und dem Argumente von φ das positive oder negative Vorzeichen zu geben ist, je nachdem $n\nu$ eine gerade oder ungerade Zahl ist. Die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu} \frac{\varphi(\sin n x \pi)}{n^s}$$

ist aber eine Function von x, die für

$$x = \frac{\nu}{\mu}$$

continuirlich ist (§ 97); offenbar hat daher die erste Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (1) für $\delta = 0$ zum Grenzwerth 0; es reicht deshalb aus, wenn wir uns mit der zweiten beschäftigen.

---

§ 109. Wir unterscheiden zu diesem Zweck zwischen den Fällen, in welchen die Discontinuitäten, welche $\varphi(y)$ für $y = 0$ hat, auf einer oder beiden Seiten dieses Punktes gewöhnliche Discontinuitäten sind und denjenigen, in welchen diese Discontinuitäten wenigstens auf der einen Seite von der sogenannten zweiten Art sind.

Im ersten Fall hat man beim Uebergang zur Grenze für $\delta = 0$ ohne Weiteres (§ 94)

$$f\left(\frac{\nu}{\mu} + 0\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = \frac{\varphi(\pm 0)}{\mu^s} \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^s} + \frac{\varphi(+0)}{\mu^s} \sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^s},$$

$$f\left(\frac{\nu}{\mu} - 0\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = \frac{\varphi(\mp 0)}{\mu^s} \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^s} + \frac{\varphi(-0)}{\mu^s} \sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^s},$$

wobei in $\varphi(\pm 0)$ und $\varphi(\mp 0)$ die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem ν eine gerade oder ungerade Zahl ist. Ist daher ν eine gerade Zahl und $= 2\nu'$, so erhält man:

$$f\left(\frac{2\nu'}{\mu} + 0\right) - f\left(\frac{2\nu'}{\mu}\right) = \frac{\varphi(+0)}{\mu^s} \sum_1^\infty \frac{1}{n^s},$$

$$f\left(\frac{2\nu'}{\mu} - 0\right) - f\left(\frac{2\nu'}{\mu}\right) = \frac{\varphi(-0)}{\mu^s} \sum_1^\infty \frac{1}{n^s}.$$

Ist dagegen ν eine ungerade Zahl und $= 2\nu' + 1$, so wird:

$$f\left(\frac{2\nu'+1}{\mu} + 0\right) - f\left(\frac{2\nu'+1}{\mu}\right) = \frac{\varphi(-0)}{\mu^s} \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^s} + \\ + \frac{\varphi(+0)}{\mu^s} \sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^s},$$

$$f\left(\frac{2\nu'+1}{\mu} - 0\right) - f\left(\frac{2\nu'+1}{\mu}\right) = \frac{\varphi(+0)}{\mu^s} \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^s} + \\ + \frac{\varphi(-0)}{\mu^s} \sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^s}.$$

Von den Grössen $\varphi(+0)$ und $\varphi(-0)$, welche offenbar die Sprünge der Function $\varphi(y)$ rechts und links vom Punkt $y = 0$ darstellen, ist die erste oder die zweite oder sind beide bezüglich von Null verschieden oder gleich Null, je nachdem $\varphi(y)$ rechts oder links vom Punkt $y = 0$ oder auf beiden

Seiten discontinuirlich oder continuirlich ist. Daraus schliesst man, dass $f(x)$ in den rationalen Punkten $\frac{\nu}{\mu}$, für welche der Zähler eine gerade Zahl ist, stets eine gewöhnliche Discontinuität besitzt, welche sich auf beiden Seiten des Punktes oder auf einer (rechts oder links) befindet, je nachdem die Discontinuität der $\varphi(y)$ für $y=0$ auf beiden Seiten dieses Punktes oder nur auf einer (rechts oder links) stattfindet und dass die Function $f(x)$ in den rationalen Punkten $\frac{\nu}{\mu}$, für welche der Zähler eine ungerade Zahl ist, mag nun $\varphi(y)$ für $y=0$ nur auf einer Seite oder auf allen beiden discontinuirlich sein, stets eine gewöhnliche Discontinuität auf beiden Seiten des Punktes besitzt, es sei denn, es wäre eine der beiden Bedingungen erfüllt:

$$\varphi(-0)\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^s} + \varphi(+0)\sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^s} = 0,$$

$$\varphi(+0)\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^s} + \varphi(-0)\sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^s} = 0.$$

In diesem Fall findet die Discontinuität der $f(x)$ nur auf einer Seite des Punktes statt, da offenbar diese beiden Gleichungen nicht gleichzeitig erfüllt sein können, weil für $s>1$

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^s} = \left(1-\frac{1}{2^s}\right)\sum_1^\infty \frac{1}{n^s} = (2^s-1)\sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^s}$$

ist. Dieser letzte Fall kann aber nur eintreten, wenn die Discontinuität der $\varphi(y)$ für $y=0$ auf beiden Seiten dieses Punktes $y=0$ stattfindet.

Wenn ferner die Discontinuität der $\varphi(y)$ für $y=0$ von der Art ist, dass sie durch Aenderung des Werthes der Function in diesem Punkt beseitigt werden kann [das heisst, wenn $\varphi(+0)=\varphi(-0)$], so findet dasselbe auch bei den Discontinuitäten der $f(x)$ in den verschiedenen rationalen Punkten $\frac{\nu}{\mu}$ statt und die Sprünge, die $f(x)$ in diesen Punkten macht, sind

$$= \frac{\varphi(+0)}{\mu^s}\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}.$$

Es ist bemerkenswerth, dass solche Discontinuitäten der $f(x)$ nur in diesem Fall vorkommen können.

Es ist weiter zu beachten, dass, wenn

$$\varphi(+0) = -\varphi(-0)$$

ist, und nur in diesem Fall, der Werth $f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)$ der $f(x)$ in den rationalen Punkten $\frac{\nu}{\mu}$ stets der Mittelwerth zwischen

$$f\left(\frac{\nu}{\mu}+0\right) \quad \text{und} \quad f\left(\frac{\nu}{\mu}-0\right)$$

ist und dass alsdann der Sprung auf beiden Seiten des Punktes für gerade ν

$$\frac{\varphi(+0)}{\mu^s}\sum_1^\infty \frac{1}{n^s},$$

und für ungerade ν

$$\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\frac{\varphi(+0)}{\mu^s}\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$$

ist. Jedenfalls hängen die Sprünge der $f(x)$ in den rationalen Punkten $\frac{\nu}{\mu}$ nur von dem Werth des Nenners μ und davon ab, ob der Zähler ν eine gerade oder ungerade Zahl ist und mit wachsendem μ verkleinern sie sich ins Grenzenlose. $f(x)$ gehört deshalb in allen Fällen zu der Classe der punktirt discontinuirlichen Functionen, für welche in jedem endlichen Intervall nur eine endliche Anzahl von Punkten vorhanden ist, in denen die Sprünge grösser als irgend eine beliebige kleine gegebene Grösse sind.

---

§ 110. Es bleibt nun der Fall zu untersuchen, in dem $\varphi(y)$ wenigstens auf einer Seite des Punktes $y=0$ eine Discontinuität der zweiten Art hat und zu diesem Zweck verfahren wir wie folgt.

Es möge der Einfachheit wegen $s>2$ sein. Wenn dann in einer Reihe $\sum_1^\infty \frac{A_n}{n^s}$ die A_n ihrem absoluten Werth nach nicht über eine endliche Grösse g hinausgehen können, so ist für $n \geq 1$ dem absoluten Werth nach

$$R_n < \frac{g}{(n+1)^{s-2}} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{g}{(n+1)^{s-2}} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

oder

$$R_n < \frac{g}{n(n+1)^{s-2}} < \frac{g}{n^{s-1}}.$$

Man kann deshalb, wenn man unter h und h' zwischen -1 und 1 liegende Grössen versteht, auch setzen:

$$(2) \qquad R_n = \frac{hg}{n(n+1)^{s-2}} = \frac{h'g}{n^{s-1}}.$$

Dies berechtigt uns stets, die Relation aufzustellen (siehe § 108 nach Gleich. 1)

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi(\pm \sin n\mu\delta\pi)}{n^s} = \varphi\left[(-1)^\nu \sin \mu\delta\pi\right] + \frac{hg}{2^{s-2}},$$

wenn g die obere Grenze der Werthe der $\varphi(y)$ zwischen -1 und 1 ist. Daraus geht dann ohne Weiteres hervor, dass, wenn $\varphi(y)$ für $y = 0$ eine Discontinuität der zweiten Art auf beiden Seiten desselben Punktes besitzt und wenn s so gross genommen wird, dass die Grösse $\frac{g}{2^{s-2}}$ kleiner als die Hälfte der Schwankungen ist, welche $\varphi(y)$ in der Nähe des Punktes $y = 0$ und auf beiden Seiten dieses Punktes (§ 32) macht, die Function $f(x)$ in allen rationalen Punkten und auf beiden Seiten dieser Punkte eine Discontinuität der zweiten Art besitzt. Wenn dagegen $\varphi(y)$ nur auf einer Seite des Punktes $y = 0$ eine Discontinuität der zweiten Art hat und auf der anderen Seite dieses Punktes continuirlich ist oder nur eine gewöhnliche Discontinuität besitzt, alsdann zeigt $f(x)$ in den rationalen Punkten $\frac{\nu}{\mu}$, für welche ν eine gerade Zahl ist, rechts und links stets das nämliche Verhalten, wie $\varphi(y)$ zur Rechten oder zur Linken des Punktes $y = 0$. Bemerkt man dann für die rationalen Punkte $\frac{\nu}{\mu}$ mit ungeradem ν, dass die Gleichungen bestehen:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi(\pm \sin n\mu\delta\pi)}{n^s} = \sum_{0}^{\infty} \frac{\varphi[-\sin(2n+1)\mu\delta\pi]}{(2n+1)^s}$$
$$+ \frac{1}{2^s} \sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi(\sin 2n\mu\delta\pi)}{n^s}$$

und

$$\sum_0^\infty \frac{\varphi[-\sin(2n+1)\mu\delta\pi]}{(2n+1)^s} = \varphi(-\sin\mu\delta\pi) + \frac{hg}{3^{s-2}}$$

$$\sum_1^\infty \frac{\varphi(\sin 2n\mu\delta\pi)}{n^s} = \varphi(\sin 2\mu\delta\pi) + \frac{h'g}{2^{s-2}},$$

so sieht man sofort, dass bei hinreichend grossem s die $f(x)$ stets eine Discontinuität der zweiten Art auf beiden Seiten des Punktes $\frac{\nu}{\mu}$ besitzt. Man kann also jetzt behaupten: Falls die Unstetigkeiten der $\varphi(y)$ wenigstens auf der einen Seite im Punkt $y = 0$ von der zweiten Art sind, so ist $f(x)$ bei hinreichend grossen Werthen von s in allen rationalen Punkten $\frac{\nu}{\mu}$ unstetig und für diejenigen unter diesen Punkten mit ungeradem ν ist die Unstetigkeit immer auf beiden Seiten von der zweiten Art, während für diejenigen mit geradem ν die Unstetigkeit der $f(x)$ dasselbe Verhalten zeigt, wie jene der $\varphi(y)$ für $y = 0$.

Weil nun das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung (1) den Divisor μ^s hat, so bemerkt man ferner, dass $f(x)$ auch in dem vorliegenden Fall zu jenen punktirt discontinuirlichen Functionen gehört, die in jedem endlichen Intervall nur eine endliche Anzahl von Punkten haben, in denen sie Sprünge machen, die grösser als irgend eine beliebig kleine gegebene Grösse sind.

---

§ 111. Wir setzen jetzt voraus, die Function $\varphi(y)$ sei zwischen -1 und $+1$ stets continuirlich und habe in allen Punkten dieses Intervalls, höchstens den Punkt $y = 0$ ausgenommen, auch eine bestimmte Derivirte, die numerisch immer kleiner als eine endliche Grösse g ist; ferner sei $s > 2$. Alsdann ist die Function $f(x)$ stets endlich und continuirlich und wenn $\varphi(y)$ auch im Punkt $y = 0$ eine bestimmte Derivirte hat, so ist diese letztere nothwendiger Weise endlich (§ 77. 1) und nicht grösser als g; und die Derivirten der Glieder der Reihe

$$\sum_1^{\infty} \frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s}$$

sind für jeden beliebigen Werth von x und von n endlich und bestimmt und bilden eine stets convergente Reihe

$$\pi \sum_1^{\infty} \frac{\varphi'(\sin nx\pi)}{n^{s-1}} \cos nx\pi .$$

Diese letzte Reihe ist überdies für alle Werthe von x (§ 93) gleichmässig convergent, weil ihre Glieder numerisch kleiner als die entsprechenden Glieder der convergenten Reihe

$$\pi \sum_1^{\infty} \frac{g}{n^{s-1}}$$

sind. Man kann also behaupten (§ 105), dass in dem Fall, in dem $\varphi(y)$ auch im Punkt $y = 0$ eine bestimmte und endliche Derivirte hat, unsere Function $f(x)$ für alle Werthe von x eine endliche und bestimmte Derivirte besitzt und dass diese Derivirte genau die Summe der Reihe der Derivirten

$$\pi \sum \frac{\varphi'(\sin nx\pi)}{n^{s-1}} \cos(nx\pi)$$

ist.

---

§ 112. Wir wollen nun annehmen, $\varphi(y)$ habe für $y = 0$ keine bestimmte Derivirte, dagegen seien nach wie vor ausserhalb dieses Punktes $y = 0$ die Derivirten der $\varphi(y)$ noch bestimmt und numerisch kleiner als eine gegebene Grösse g und wollen untersuchen, wie sich alsdann die Derivirte der $f(x)$ verhält.

In diesem Fall hat das Verhältniss $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$, wenn sich δ unbegrenzt der Null nähert, wenigstens auf der einen Seite keinen bestimmten Grenzwerth, seine Werthe halten sich aber immer zwischen endlichen Grenzen (§ 75). Wir bemerken überdies, dass, so wie die Derivirten der Glieder

$$\frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s}$$

für irrationale Werthe von x bestimmt und endlich sind, auch die Reihe dieser Derivirten

$$\pi \sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi'(\sin n x \pi)}{n^{s-1}} \cos (n x \pi)$$

für irrationale Werthe von x convergirt.

Betrachten wir nun die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi[\sin n(x+\delta)\pi] - \varphi(\sin n x \pi)}{n^s \delta}$$

für alle von Null verschiedenen Werthe von δ und für die irrationalen Werthe von x. Man sieht sofort, dass die Glieder dieser Reihe, wenn sie nicht den Werthen von n entsprechen, für welche

$$\sin n(x+\delta)\pi = \sin n x \pi$$

(in welchem Fall sie übrigens verschwinden) ist, sich in die Form bringen lassen

$$\frac{\pi}{n^{s-1}} \frac{\varphi[\sin n(x+\delta)\pi] - \varphi(\sin n x \pi)}{\sin n(x+\delta)\pi - \sin n x \pi} \cos n\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\pi \frac{\sin n \frac{\delta}{2}\pi}{n \frac{\delta}{2}\pi}.$$

Da nun nach § 72. 7 der Factor

$$\frac{\varphi[\sin n(x+\delta)\pi] - \varphi(\sin n x \pi)}{\sin n(x+\delta)\pi - \sin n x \pi}$$

numerisch immer kleiner als g ist und der Factor

$$\cos n\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\pi \frac{\sin n \frac{\delta}{2}\pi}{n \frac{\delta}{2}\pi}$$

die Einheit nicht übersteigt, so sind diese Glieder ihrem absoluten Werth nach kleiner als

$$\frac{\pi g}{n^{s-1}}.$$

Die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi[\sin n(x+\delta)\pi] - \varphi(\sin n x \pi)}{n^s \delta}$$

selbst ist deshalb für von Null verschiedene Werthe von δ (da ihre Glieder numerisch sämmtlich kleiner sind als die entsprechenden Glieder der convergenten Reihe)

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\pi g}{n^{s-1}}$$

gleichmässig convergent. Man zieht daher nach dem Lehrsatz in § 100 den Schluss, dass die Function $f(x)$ für alle irrationalen Werthe von x eine endliche und bestimmte Derivirte hat, die die Summe der entsprechenden Reihe der Derivirten

$$\pi \sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi'(\sin nx\pi)}{n^{s-1}} \cos nx\pi$$

ist. Es bleibt also nur noch das Verhalten bei rationalen Werthen von x zu untersuchen.

Zu diesem Zweck bedenken wir zuerst, dass wir, wenn ν und μ ganze, unter sich prime, Zahlen sind, für $x = \frac{\nu}{\mu}$ nach der Gleichung (1) haben:

$$(3)\quad \begin{aligned} \frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta} &= \sum_{1}^{\infty}{}_{\mu} \frac{\varphi\left[\sin n\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)\pi\right]-\varphi\left(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^s\delta} \\ &+ \frac{1}{\mu^s}\sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi(\pm\sin n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}, \end{aligned}$$

wobei man in $\varphi(\pm \sin n\mu\delta\pi)$ das positive oder negative Vorzeichen zu nehmen hat, je nachdem $n\nu$ gerade oder ungerade ist. Die vorausgehende Betrachtung lehrt uns nun, dass die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu} \frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s}$$

eine endliche und bestimmte Derivirte auch für $x = \frac{\nu}{\mu}$ hat und dass diese Derivirte die Summe der Reihe

$$\pi \sum_{1}^{\infty}{}_{\mu} \frac{\varphi'\left(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^{s-1}} \cos n\frac{\nu}{\mu}\pi$$

ist. Bezeichnet man daher mit σ_1 eine Grösse, welche für die Werthe von δ, die numerisch kleiner als eine positive hinreichend kleine Grösse ε sind, selbst kleiner als irgend eine beliebige Grösse ist, so kann man auch setzen:

$$(4)\quad \begin{aligned} \frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta} &= \pi\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu} \frac{\varphi'\left(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^{s-1}} \cos n\frac{\nu}{\mu}\pi + \sigma_1 + \\ &+ \frac{1}{\mu^s}\sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi(\pm\sin n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}. \end{aligned}$$

Es reicht deshalb hin, wenn wir uns mit der Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{\varphi(\pm \sin n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}$$

beschäftigen.

Nehmen wir also zuerst an, die Derivirte der $\varphi(y)$ für $y = 0$ sei aus dem Grund nicht vorhanden, weil die Grenzwerthe der beiden Verhältnisse $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$, $\frac{\varphi(-\delta)}{-\delta}$ für $\delta = +0$ zwar bestimmt und endlich, aber nicht gleich sind; oder mit anderen Worten, $\varphi(y)$ habe für $y = 0$ rechts und links endliche und bestimmte, aber von einander verschiedene Derivirte und diese Derivirten seien $\varphi'(+0)$ bezüglich $\varphi'(-0)$.

Alsdann haben die Glieder der Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{\varphi(\pm \sin n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}$$

für $\delta = 0$ auf der rechten und für $\delta = 0$ auf der linken Seiten bestimmte und endliche Grenzwerthe und da:

$$\sum_1^\infty \frac{\varphi(\pm \sin n\mu\delta\pi)}{n^s\delta} = \sum_0^\infty \frac{\varphi[(-1)^\nu \sin(2n+1)\mu\delta\pi]}{(2n+1)^s\delta}$$
$$+ \sum_1^\infty \frac{\varphi(\sin 2n\mu\delta\pi)}{(2n)^s\delta}$$

ist, so sieht man sofort (§ 94), dass für gerade ν

$$\lim_{\delta=+0} \frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta} = \pi \sum_1^\infty{}_\mu \frac{\varphi'\left(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^{s-1}} \cos n\frac{\nu}{\mu}\pi$$
$$+ \frac{\varphi'(+0)}{\mu^{s-1}} \sum_1^\infty \frac{1}{n^{s-1}},$$

$$\lim_{\delta=-0} \frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta} = \pi \sum_1^\infty{}_\mu \frac{\varphi'\left(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^{s-1}} \cos n\frac{\nu}{\mu}\pi$$
$$+ \frac{\varphi'(-0)}{\mu^{s-1}} \sum_1^\infty \frac{1}{n^{s-1}}$$

ist, während für ungerade ν

$$\lim_{\delta=+0} \frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta} = \pi \sum_{1}^{\infty}{}' \mu \frac{\varphi'\left(\sin n \frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^{s-1}} \cos n \frac{\nu}{\mu} \pi$$

$$- \frac{\varphi'(-0)\pi}{\mu^{s-1}} \sum_{0}^{\infty}{}' \frac{1}{(2n+1)^{s-1}}$$

$$+ \frac{\varphi'(+0)\pi}{\mu^{s-1}} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{s-1}}$$

und

$$\lim_{\delta=-0} \frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta} = \pi \sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi'\left(\sin n \frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^{s-1}} \cos n \frac{\nu}{\mu} \pi$$

$$- \frac{\varphi'(+0)\pi}{\mu^{s-1}} \sum_{0}^{\infty}{}' \frac{1}{(2n+1)^{s-1}}$$

$$+ \frac{\varphi'(+0)\pi}{\mu^{s-1}} \sum_{1}^{\infty}{}' \frac{1}{(2n)^{s-1}}.$$

Man kann daher sagen: Die Unbestimmtheit der Derivirten der $f(x)$ ist in dem vorliegenden Fall in den rationalen Punkten $\frac{\nu}{\mu}$, welche den geraden ν entsprechen, von derselben Art, wie diejenige, welche die Derivirte der $\varphi(y)$ für $y=0$ hat, das heisst es sind sowohl die Derivirten zur Rechten wie diejenigen zur Linken dieser Punkte vorhanden, aber sie sind verschieden von einander. Dasselbe gilt auch für die den ungeraden Werthen von ν entsprechenden rationalen Punkte, da $\varphi'(+0)$ der $\varphi'(-0)$ nicht gleich sein kann.

Wenn ferner die bei der Derivirten der $\varphi(y)$ für $y=0$ auftretende Unbestimmtheit von dem Umstand herrührt, dass das Verhältniss $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ bei der Null sich näherndem δ wenigstens auf der einen Seite keinen bestimmten Grenzwerth hat, so kann man zeigen, dass die Derivirte der $f(x)$, wenn s hinreichend gross ist, ebenfalls für alle rationalen Werthe von x eine Unbestimmtheit derselben Art besitzt.

Bedenkt man nämlich, dass die Glieder der Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi(\pm \sin n\mu\delta\pi)}{n^s \delta},$$

in welchen $n\mu\delta$ eine ganze Zahl ist, sämmtlich gleich Null sind und man den übrigen die Gestalt geben kann:

$$\frac{\pm\mu\pi}{n^{s-1}}\,\frac{\varphi(\pm\sin n\mu\delta\pi)}{\pm\sin n\mu\delta\pi}\,\frac{\sin n\mu\delta\pi}{n\mu\delta\pi}$$

und das Verhältniss

$$\frac{\varphi(\pm\sin n\mu\delta\pi)}{\pm\sin n\mu\delta\pi}$$

numerisch immer kleiner, als eine endliche Grösse g ist, während

$$\frac{\sin n\mu\delta\pi}{n\mu\delta\pi}$$

numerisch die Einheit nicht übersteigt, so sieht man, dass mit Rücksicht auf (2)

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{\varphi(\pm\sin n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}=\frac{\mu\pi g h}{2^{s-3}},$$

worin h eine zwischen -1 und 1 liegende Grösse ist. Man hat also für alle von Null verschiedenen Werthe von δ

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi(\pm\sin n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}=\frac{\varphi(\pm\sin\mu\delta\pi)}{\delta}+\frac{\mu\pi g h}{2^{s-3}}.$$

Daraus geht hervor, dass die Unbestimmtheiten des Verhältnisses $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ auf beiden Seiten von $\delta=0$ liegen und bei hinreichend grossem s dieselben Unbestimmtheiten bei der Reihe

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi(\pm\sin n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}$$

und also auch bei dem Verhältniss

$$\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$$

für alle rationalen Punkte $\frac{\nu}{\mu}$ auftreten. $f(x)$ hat also in diesen Punkten keine bestimmte Derivirte weder auf der rechten noch auf der linken Seite.

Wenn ferner das Verhältniss $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ wieder für $\delta=0$ keinen bestimmten Grenzwerth hat, aber nur auf einer Seite, so trennt man wie früher in einem ähnlichen Fall bei den Discontinuitäten (§ 110) die Reihe

$$\sum_1^{\infty} \frac{\varphi(\pm \sin n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}$$

in zwei Theile und sieht dann sofort, dass der Grenzwerth des Verhältnisses

$$\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$$

sich in den rationalen Punkten $\frac{\nu}{\mu}$ bei geradem ν ebenso verhält wie der Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$. Die Derivirte der $f(x)$ existirt daher nur auf einer Seite dieser Punkte, während dasselbe Verhältniss

$$\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$$

in den rationalen Punkten $\frac{\nu}{\mu}$ bei ungeradem ν, wenigstens wenn s hinreichend gross ist, weder rechts noch links vom Punkt $\frac{\nu}{\mu}$ einen bestimmten Grenzwerth hat. Die Function $f(x)$ hat daher weder rechts noch links von diesen Punkten eine bestimmte Derivirte und das Verhältniss

$$\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$$

schwankt, wenn δ sich immer mehr der Null nähert, zwischen endlichen Grenzwerthen hin und her.

— —

§ 113. Wir ziehen jetzt den Fall in Betracht, in welchem die Derivirte der $\varphi(y)$ ausserhalb des Punktes $y=0$ zwar immer endlich und bestimmt ist, aber bei der Annäherung des y an Null in gewissen Punkten auch Werthe annimmt, die numerisch grösser als irgend eine gegebene Grösse sind. (Es ist dieses zum Beispiel nach § 77. 1 immer nöthig, wenn die Derivirte der $\varphi(y)$ für $y=0$ wenigstens auf einer Seite unendlich gross sein soll.)

In diesem Fall kann die Derivirte der $\varphi(y)$ für $y=0$ (§§ 75 und folgende) bestimmt und endlich oder unendlich

gross und von bestimmtem oder unbestimmtem Vorzeichen oder auch ganz und gar unbestimmt sein. Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Derivirte der $f(x)$ in diesen einzelnen Fällen verhält.

In diesen Fällen lässt sich im Allgemeinen, wenigstens für die irrationalen Punkte x, die Existenz der Derivirten der $f(x)$ nicht mehr nachweisen. Denn da nx bei unendlich wachsendem n auch durch Werthe durchgeht, die so nahe, wie man will, an ganzen Zahlen gelegen sind, so können sich die Derivirten $\varphi'(\sin nx\pi)$ nicht mehr immer numerisch kleiner als eine endliche Grösse halten und die Schlussfolgerung des § 112 ist nicht länger anwendbar.

In Betreff der rationalen Punkte kann man argumentiren wie folgt.

Wir bemerken, dass auch in diesem Fall die Gleichung (3) gilt, untersuchen sofort die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu} \frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s}$$

und versuchen unter Anwendung des Lehrsatzes in § 103 zu beweisen, dass die Derivation der einzelnen Glieder für $x = \frac{\nu}{\mu}$ auf diese Reihe angewendet werden kann.

Wenn man zu diesem Zweck zunächst beachtet, dass die Glieder dieser Reihe für $x = \frac{\nu}{\mu}$ eine endliche und bestimmte Derivirte

$$\frac{\pi\varphi'\left(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)\cos n\frac{\nu}{\mu}\pi}{n^{s-1}}$$

haben, so sieht man sofort, dass die Reihe dieser Derivirten wieder convergent ist; es bleibt also nur zu untersuchen, ob man der zweiten der Bedingungen des citirten Lehrsatzes genügen kann.

Zu diesem Zweck sei m die erste ganze Zahl, die nicht kleiner als δ_1^{-q} ist, wenn δ_1 der absolute Werth von δ und q eine derart ausgewählte positive Zahl ist, dass sie der Bedingung

$$1 > q > \frac{1}{s-1}$$

genügt (was offenbar möglich ist, weil $s > 2$). Alsdann ist dem absoluten Werth nach

$$\delta m^{s-1} > \delta_1^{\,1-q(s-1)}$$

und

$$m\delta = \delta_1^{\,1-q} + \Theta\delta_1,$$

unter Θ eine Zahl zwischen 0 und 1 (1 ausgeschlossen) verstanden. Wenn nun $R_n(x)$ der Rest der Reihe

$$\sum_1^\infty {}_\mu \frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s}$$

für den Werth x der Variabelen und g der absolute Maximalwerth der $\varphi(y)$ zwischen -1 und 1 ist, so ist, wie aus (2) § 110 ersichtlich, dem absoluten Werth nach

$$\frac{R_m\left(\frac{\nu}{\mu} + \delta\right)}{\delta} < g\delta_1^{\,q(s-1)-1}$$

und

$$\frac{R_m\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta} < g\delta_1^{\,q(s-1)-1}.$$

Wenn man daher zu jeder positiven und beliebig kleinen Zahl σ ein ε so wählt, dass

$$g\varepsilon^{q(s-1)-1} < \sigma$$

ist, alsdann braucht man zu jedem speciellen Werth von δ, der kleiner als ε ist, nur eine ganze Zahl m auf die eben angegebene Art zu bestimmen, um zu erreichen, dass die Grössen

$$\frac{R_m\left(\frac{\nu}{\mu} + \delta\right)}{\delta} \quad \text{und} \quad \frac{R_m\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$$

beide numerisch kleiner als σ sind. Diese Zahl m ist, wenn ε hinreichend klein genommen wird, auch stets grösser als eine noch so grosse gegebene Zahl m'.

Wenn nun ε hinreichend klein genommen und m für jeden speciellen, numerisch hinter ε zurückbleibenden Werth von δ auf die eben angegebene Art bestimmt wird, so ist offenbar auch die Grösse

$$(5) \quad \sum_1^m {}_\mu \left\{ \frac{\varphi\left[\sin n\left(\frac{\nu}{\mu} + \delta\right)\pi\right] - \varphi\left(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^s\delta} - \frac{\pi\varphi'\left(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)\cos n\frac{\nu}{\mu}\pi}{n^{s-1}} \right\}$$

für alle diese Werthe von δ numerisch kleiner als σ. Es ist deshalb allen Bedingungen genügt, die nothwendig und ausreichend sind, um auf die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu} \frac{\varphi(\sin n x \pi)}{n^s}$$

für $x = \frac{\nu}{\mu}$ die gliederweise Derivation anwenden zu können.

Bezeichne in der That m_1 eine Zahl derart, dass für $n \geqq m_1 - 1$ der Rest R_n der Reihe

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu} \frac{1}{n^{s-1}}$$

kleiner als eine beliebig kleine Grösse σ' wird. Die Zahl m kann, wie wir oben gesagt haben, für alle Werthe von δ auch grösser wie diese Zahl m_1 angenommen werden und die vorstehende Summe (5) kann in Folge dessen in die beiden

$$\sum_{1}^{m_1 - 1}{}_{\mu} \quad \text{und} \quad \sum_{m_1}^{m}{}_{\mu}$$

zerlegt werden. Da nun die erste dieser Summen (weil sie aus einer endlichen und bestimmten Anzahl von Gliedern zusammengesetzt ist) bei hinreichend kleinem ε für alle zwischen $-\varepsilon$ und ε liegenden Werthe von δ numerisch kleiner als eine noch so kleine gegebene Grösse σ ist, so reicht es aus, wenn wir uns jetzt mit der zweiten Summe beschäftigen.

Die Grösse

$$\varphi'\left(\sin n \frac{\nu}{\mu} \pi\right)$$

bleibt für alle ganzzahligen Werthe von n, die keine Vielfache von μ sind, immer hinter einer endlichen Grösse g' zurück, weil $n\frac{\nu}{\mu}$ sich niemals um mehr als $\frac{1}{\mu}$ an eine ganze Zahl annähern kann. Da nun dem absoluten Werth nach

$$m\delta = \delta_1{}^{1-q} + \Theta\delta_1 < \varepsilon^{1-q} + \varepsilon,$$

so liegen, wenn man ε so klein voraussetzt, dass

$$\varepsilon^{1-q} + \varepsilon$$

$\frac{1}{2\mu}$ nicht erreicht, die Grössen $n\frac{\nu}{\mu}$ und $n\left(\frac{\nu}{\mu} + \delta\right)$ für alle

ganzzahligen Werthe von n, die keine Vielfache von μ und nicht grösser als m sind, sehr nahe zusammen, sind niemals ganzzahlig, enthalten auch zwischen sich keine ganzen Zahlen und sind vielmehr um mehr als $\frac{1}{2\mu}$ von der nächsten ganzen Zahl entfernt. Daher hat offenbar nach den gemachten Voraussetzungen die Function $\varphi(y)$ für alle zwischen

$$\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi \quad \text{und} \quad \sin n\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)\pi$$

liegenden Werthe von y, vorausgesetzt, dass n ganzzahlig, kein Vielfaches von μ und nicht grösser als m ist, stets eine bestimmte Derivirte, die numerisch kleiner als eine endliche Grösse g'' ist. Daraus folgt (§ 72. 6), dass das Verhältniss

$$\frac{\varphi\left[\sin n\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)\pi\right]-\varphi\left(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^s\delta},$$

welchem man, wie oben, wenn es von Null verschieden ist, die Gestalt geben kann:

$$\frac{\pi}{n^{s-1}}\,\frac{\varphi\left[\sin n\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)\pi\right]-\varphi\left(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{\sin n\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)\pi-\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi}\cos n\left(\frac{\nu}{\mu}+\frac{\delta}{2}\right)\pi\,\frac{\sin\frac{n\delta\pi}{2}}{\frac{n\delta\pi}{2}},$$

numerisch kleiner als $\frac{\pi g''}{n^{s-1}}$ ist. Es ist deshalb dem absoluten Werth nach:

$$\sum_{m_1}^{m}{}_{\mu}\left\{\frac{\varphi\left[\sin n\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)\pi\right]-\varphi\left(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^s\delta}-\frac{\pi\varphi'\left(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)\cos n\frac{\nu}{\mu}\pi}{n^{s-1}}\right\}$$

$$<\pi(g'+g'')\sum_{m_1}^{m}{}_{\mu}\frac{1}{n^{s-1}}<\pi(g'+g'')\sigma'$$

und dieses zeigt, dass die linke Seite bei hinreichend kleinem ε und für alle zwischen $-\varepsilon$ und ε liegenden Werthe von δ numerisch kleiner als eine noch so kleine gegebene Grösse σ'' ist.

Daraus folgt, wie wir schon gesagt haben, dass das Gleiche auch bei der Summe

$$\sum_{1}^{m}{}_{\mu}\left\{\frac{\varphi\left[\sin n\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)\pi\right]-\varphi\left(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^s\delta}-\frac{\pi\varphi'\left(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)\cos n\frac{\nu}{\mu}\pi}{n^{s-1}}\right\}$$

der Fall ist. Weil nun damit bewiesen ist, dass die Bedingungen des Lehrsatzes in § 103 erfüllt sind, so kommt man jetzt zu dem Schluss, dass die Function

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s}$$

für $x=\frac{\nu}{\mu}$ eine endliche und bestimmte Derivirte hat, welche die Summe der Reihe

$$\pi\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi'\left(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^{s-1}}\cos n\frac{\nu}{\mu}\pi$$

ist. Es ist daraus ersichtlich, dass man, unter σ_1 eine Grösse verstanden, welche für die Werthe von δ, die numerisch kleiner als eine positive und hinreichend kleine Zahl ε sind, geringer als jede ganz beliebige Grösse ist, in diesem Fall die Gleichung (3) auch auf die folgende zurückführen kann:

$$\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}=\pi\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{\varphi'\left(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^{s-1}}\cos n\frac{\nu}{\mu}\pi+\sigma_1+$$
$$+\frac{1}{\mu^s}\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi(\pm\sin n\mu\delta\pi)}{n^s\delta},$$

welche mit der Gleichung (4) des vorigen Paragraphen übereinstimmt. Es reicht daher aus, wenn wir uns mit der Reihe

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi(\pm\sin n\mu\delta\pi)}{n_s\delta}$$

beschäftigen.

Zu dem Ende zerlegen wir diese Reihe in die beiden Summen

$$\sum_{1}^{m}\frac{\varphi(\pm\sin n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}\quad\text{und}\quad\sum_{m+1}^{\infty}\frac{\varphi(\pm\sin n\mu\delta\pi)}{n^s\delta},$$

wobei m eine Zahl ist, die für jeden speciellen Werth von δ, der numerisch kleiner als eine hinreichend kleine Grösse ε

ist, auf die oben angegebene Art bestimmt wurde. Wenn man alsdann die Gleichung (2) anwendet, so ist sofort ersichtlich, dass die zweite dieser Summen bei hinreichend kleinem ε für alle in Betracht gezogenen Werthe von δ numerisch kleiner als jede ganz beliebige Grösse ist. Es reicht also aus, sich auf die Betrachtung der ersten Summe

$$\sum_1^m \frac{\varphi(\pm \sin n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}$$

zu beschränken.

Wir geben dieser Summe die Gestalt:

$$(6) \qquad \mu\pi \sum_1^m \pm \frac{1}{n^{s-1}} \frac{\varphi(\pm \sin n\mu\delta\pi)}{\pm \sin n\mu\delta\pi} \frac{\sin n\mu\delta\pi}{n\mu\delta\pi}$$

und setzen zunächst voraus, dass $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ für $\delta = 0$ auf der einen Seite $+\infty$, auf der anderen Seite $-\infty$ zum Grenzwerth habe; oder mit andern Worten, dass die Derivirte der $\varphi(y)$ für $y = 0$ auf der einen Seite, zum Beispiel auf der rechten, $+\infty$ und auf der andern $-\infty$ sei.

Erinnert man sich, dass bei den Gliedern der vorstehenden Summe das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem $n\nu$ gerade oder ungerade ist und setzt ε so klein voraus, dass die Grösse $m\delta$ (welche numerisch geringer als $\varepsilon^{1-q} + \varepsilon$ ist) ebenfalls numerisch geringer als eine beliebig kleine Zahl ist, so ist ohne Weiteres klar, dass die Glieder dieser Summe für ein positives δ sämmtlich dasselbe Vorzeichen und für ein negatives δ ebenfalls dasselbe, jedoch demjenigen für ein positives δ entgegengesetzte, Vorzeichen haben und dass wenigstens die ersten Glieder für alle in Betracht kommenden Werthe von δ numerisch grösser als eine jede ganz beliebige Grösse sind. In diesem Fall hat daher offenbar das Verhältniss

$$\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu} + \delta\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta},$$

welches auch der rationale Punkt $\frac{\nu}{\mu}$ sein mag, für $\delta = 0$ auf der einen Seite $+\infty$ und auf der andern $-\infty$ zum Grenzwerth und die Derivirte der $f(x)$ ist also für

$$x = \frac{\nu}{\mu}$$

auf der einen Seite $+\infty$, auf der andern $-\infty$.

Wenn ferner

$$\frac{\varphi(\delta)}{\delta} \text{ für } \delta = 0$$

auf beiden Seiten zum Grenzwerth $+\infty$ oder auch $-\infty$ hat so erkennt man auf ähnliche Art, dass das Verhältniss

$$\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu} + \delta\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$$

für die rationalen Punkte $\frac{\nu}{\mu}$ mit geradem ν dasselbe Verhalten wie das Verhältniss $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ zeigt, dass man dagegen bei den rationalen Punkten $\frac{\nu}{\mu}$ mit ungeradem ν nichts Bestimmtes sagen kann, weil die Glieder der Summe (6) für diese Punkte abwechselnd positiv oder negativ werden. — Wenn sodann das Verhältniss $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ auf einer Seite des Punktes $\delta = 0$ zum Grenzwerth $+\infty$ oder $-\infty$ und auf der andern Seite zum Grenzwerth eine endliche und bestimmte Grösse hat oder zwischen endlichen Grenzen hin- und herschwankt, dann führen ähnliche Betrachtungen wie in § 112 zu dem Schluss, dass das Verhältniss

$$\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu} + \delta\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$$

bei hinreichend grossem s in den Punkten $\frac{\nu}{\mu}$ mit geradem ν dieselben Eigenthümlichkeiten wie das Verhältniss $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ aufweist und in den Punkten $\frac{\nu}{\mu}$ mit ungeradem ν dasselbe Verhältniss für $\delta = 0$ auf der einen Seite $+\infty$ und auf der andern $-\infty$ zum Grenzwerth hat.

Wenn schliesslich die Function $\varphi(y)$ im Punkt $y = 0$ eine bestimmte und endliche Derivirte hat, so findet man mit Hülfe von ähnlichen Betrachtungen über die Summe (6), dass die Function $f(x)$ in allen rationalen Punkten $\frac{\nu}{\mu}$ eine bestimmte

und endliche Derivirte hat, welche die Summe der Reihe der Derivirten

$$\pi \sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi'\left(\sin n \frac{\nu}{\mu} \pi\right)}{n^{s-1}} \cos n \frac{\nu}{\mu} \pi$$

ist, und wenn $\varphi(y)$ im Punkt $y = 0$ keine bestimmte Derivirte hat, sei es, weil die Grenzwerthe von $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ für $\delta = 0$ rechts und links, obwohl bestimmt und endlich, einander nicht gleich sind, sei es, weil dieses Verhältniss, wenigstens auf einer Seite, zwischen Grenzwerthen, die nach unserer Annahme endlich sind, hin- und herschwankt, alsdann zeigt $f(x)$ im ersten Fall für alle rationalen Punkte $\frac{\nu}{\mu}$ dasselbe Verhalten wie $\varphi(y)$ und im zweiten Fall zeigt es für alle rationalen Punkte $\frac{\nu}{\mu}$ mit geradem ν ebenfalls dasselbe Verhalten und ist wenigstens bei hinreichend grossem s der Art, dass das Verhältniss

$$\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu} + \delta\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$$

für alle rationalen Punkte $\frac{\nu}{\mu}$ mit ungeradem ν auf beiden Seiten von $\delta = 0$ zwischen endlichen Grenzen hin- und herschwankt.

Wie wir sehen, sind auf diese Art die Resultate, die wir in den §§ 111 und 112 erhielten, auf den Fall ausgedehnt, dass die Derivirten der $\varphi(y)$ ausserhalb des Punktes $y = 0$ numerisch immer kleiner als eine endliche Grösse sind; jedoch bleibt hier, abweichend von den Ergebnissen der §§ 111 und 112, die Existenz der Derivirten der $f(x)$ in den Irrationalpunkten durchaus ungewiss. Auch bleibt es ungewiss, wie die Derivirte der $f(x)$ in den Rational- und Irrationalpunkten sich verhält, wenn das Verhältniss $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ bei unbeschränkt abnehmendem δ wenigstens auf der einen Seite zwischen unendlich weit von einander entfernten Grenzen hin- und herschwankt.

§ 114. Indem wir nun die vorstehenden Resultate zusammenfassen, können wir die folgenden allgemeinen Lehrsätze aufstellen, die im Wesentlichen das Princip, wie Hankel es genannt hat, der Verdichtung der Singularitäten bilden. Wir geben es hier in einer strengeren Form und in grösserer Vollständigkeit.

1. Wenn $\varphi(y)$ eine Function ist, welche in dem ganzen Intervall von -1 bis 1 mit Ausschluss des Punktes 0 continuirlich und numerisch stets kleiner als eine gegebene endliche Zahl und im Punkt Null gleich Null und discontinuirlich ist, so ist die Function

$$(7) \qquad f(x) = \sum_1^\infty \frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s}$$

für die Einheit übersteigende und hinreichend grosse Werthe von s in einem beliebigen Intervall eine punktirt discontinuirliche Function, welche numerisch stets kleiner als eine gegebene endliche Zahl ist, und welche in allen Irrationalpunkten desselben Intervalls continuirlich und in allen Rationalpunkten discontinuirlich ist; und die Zahl der Sprünge, die grösser als eine positive beliebig kleine Zahl σ sind und die sie in demselben Intervall macht, ist immer endlich (§§ 109 und 110). Ueberdies besitzen die Discontinuitäten dieser Function $f(x)$ in den Rationalpunkten im Vergleich mit denen der $\varphi(y)$ im Punkt $y=0$ die in den §§ 109 und 110 angegebenen Eigenthümlichkeiten; und in dem besonderen Fall, in welchem die Discontinuität der $\varphi(y)$ für $y=0$ von der ersten Art ist, treten, wenn s nur überhaupt grösser als die Einheit ist, stets die vorgenannten Eigenschaften auf und sind die Discontinuitäten der $f(x)$ ebenfalls von der ersten Art; und wenn die Discontinuität der $\varphi(y)$ für $y=0$ zu den „hebbaren" gehört, die durch Aenderung ihres Werthes in diesem Punkt beseitigt werden können, so ist dasselbe auch bei den Discontinuitäten der $f(x)$ in allen Rationalpunkten der Fall (§ 109).

2. Wenn ferner die Function $\varphi(y)$ auch für $y=0$ continuirlich ist, dann ist die Function $f(x)$ für $s>1$ stets continuirlich (§ 107); und wenn $\varphi(y)$ nicht nur in dem ganzen Intervall von -1 bis 1 endlich und continuirlich ist, sondern

auch eine bestimmte Derivirte hat, welche numerisch stets kleiner als eine endliche Grösse ist, alsdann hat, wenn nur $s > 2$, für alle Werthe von x die Function $f(x)$ auch eine endliche und bestimmte Derivirte, und diese Derivirte ist die Summe der Reihe der Derivirten der Glieder der $f(x)$ (§ 111). Und wenn die Derivirte der $\varphi(y)$ in jedem speciellen Punkt zwischen -1 und 1 stets bestimmt und endlich ist, aber bei der Annäherung des y an Null schliesslich auch beliebig grosse Werthe annimmt und im Punkt $y = 0$ endlich ist, alsdann ist es sicher, dass auch die Derivirte der $f(x)$ in allen Rationalpunkten $\frac{\nu}{\mu}$ bestimmt und endlich ist, in Bezug auf die Irrationalzahlen dagegen lässt sich keine Behauptung aufstellen (§ 113).

3. Wenn ferner $\varphi(y)$ zwischen -1 und 1 stets endlich und continuirlich ist und für alle von Null verschiedenen Werthe von y auch eine bestimmte Derivirte hat, die numerisch stets kleiner als eine endliche gegebene Zahl ist, für $y = 0$ jedoch keine bestimmte Derivirte hat, weil das Verhältniss $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ für $\delta = 0$ keinen von dem Vorzeichen von δ unabhängigen Grenzwerth oder weil es wenigstens auf der einen Seite keinen bestimmten Grenzwerth hat, alsdann hat die Function $f(x)$ für $s > 2$ in allen Irrationalpunkten eines beliebigen Intervalls wieder eine endliche und bestimmte Derivirte, welche die Summe der Reihe der Derivirten der Glieder der $f(x)$ ist; und wenn s nicht nur grösser als 2, sondern überhaupt hinreichend gross ist, so hat sie in keinem Punkt dieses Intervalls eine bestimmte Derivirte und das Verhältniss

$$\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu} + \delta\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$$

zeigt im Vergleich mit dem Verhältniss $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ in einem jeden dieser Punkte die im § 112 angegebenen Singularitäten. Und wenn die Derivirte der $\varphi(y)$, obgleich sie für alle von Null verschiedenen Werthe von y wieder endlich und bestimmt ist, doch schliesslich bei der Annäherung der y an Null auch Werthe annimmt, die numerisch grösser, als eine beliebige

gegebene Zahl sind, wenn die $\varphi(y)$ dagegen im Uebrigen allen andern eben angegebenen Bedingungen genügt, alsdann ist es gewiss, dass die Function $f(x)$ in den rationalen Punkten dieselben Eigenthümlichkeiten wie vorher zeigt, dass man aber in Bezug auf die irrationalen Punkte keine Behauptung aufstellen kann (§ 113).

4. Wenn ferner $\varphi(y)$ zwischen -1 und 1 stets endlich und continuirlich ist und für alle von Null verschiedenen Werthe von y auch eine bestimmte Derivirte hat, welche, obgleich für jeden dieser Werthe von y stets endlich, doch schliesslich bei der Annäherung der y an Null auch Werthe annimmt, die numerisch grösser als eine beliebige gegebene Zahl sind und wenn $\varphi(y)$ im Punkt Null eine unendlich grosse Derivirte hat, alsdann lässt sich über die Derivirte der $f(x)$ in den irrationalen Punkten, vorausgesetzt $s > 2$, keine Behauptung aufstellen und in Bezug auf die rationalen Punkte kann man sagen: Wenn die Derivirte der $\varphi(y)$ für $y = 0$ unendlich gross aber von unbestimmtem Vorzeichen ist (das heisst der Art (§ 72, 3), dass das Verhältniss $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ auf einer Seite des Punktes $\delta = 0$ $+\infty$ und auf der andern $-\infty$ zum Grenzwerth hat), so ist dasselbe auch bei der Derivirten der $f(x)$ in allen rationalen Punkten der Fall; und wenn die Derivirte der $\varphi(y)$ für $y = 0$ unendlich gross und von bestimmtem Vorzeichen ist, alsdann ist wieder dasselbe bei der Derivirten der $f(x)$ in allen rationalen Punkten $\frac{\nu}{\mu}$ mit geradem ν der Fall und in Bezug auf die rationalen Punkte $\frac{\nu}{\mu}$ mit ungeradem ν lässt sich keine Behauptung aufstellen (§ 113).

5. Und wenn schliesslich $\varphi(y)$ für $y = 0$ keine bestimmte Derivirte hat, weil das Verhältniss $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ auf der einen Seite des Punktes $\delta = 0$ $+\infty$ oder $-\infty$ zum Grenzwerth und auf der andern einen bestimmten und endlichen Grenzwerth hat oder zwischen endlichen Grenzen hin- und herschwankt, wenn im Uebrigen aber $\varphi(y)$ allen andern im vorigen Lehrsatz enthaltenen Bedingungen genügt, alsdann besitzt die

Function $f(x)$, wenn $s > 2$, in allen rationalen Punkten $\frac{\nu}{\mu}$ mit ungeradem ν eine unendlich grosse Derivirte von unbestimmtem Vorzeichen; und wenn s nicht nur grösser als 2, sondern überhaupt hinreichend gross ist, so hat $f(x)$ in den rationalen Punkten $\frac{\nu}{\mu}$ mit geradem ν keine bestimmte Derivirte, weil das Verhältniss

$$\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu} + \delta\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$$

in diesen Punkten dieselben Singularitäten, wie das Verhältniss $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ zeigt. In Bezug auf die irrationalen Punkte kann man auch in diesem Fall keine Behauptung aufstellen (§ 113).[1]

§ **115.** Mit Rücksicht auf die Ausführungen in § 109 kann man noch hinzufügen: Wenn $\varphi(y)$ für $y = 0$ wenigstens auf einer Seite eine Discontinuität der zweiten Art hat, so macht die Function $f(x)$, wenn s hinreichend gross ist, in den Umgebungen jedes rationalen Punktes und daher auch jedes irrationalen Punktes eine unendlich grosse Anzahl von Schwankungen. Und wenn $\varphi(y)$ auch für $y = 0$ continuirlich ist und in jeder Umgebung dieses Punktes wenigstens auf der

---

1) Wir erwähnen, dass ähnliche oder doch nur wenig abweichende Resultate sich ergeben würden, wenn man statt der durch die Gleichung (7) gegebenen Function $f(x)$ eine Function $f(x)$, wie die folgende, der Betrachtung zu Grunde legte:

$$f(x) = \sum a_n \varphi[\psi_n(x)],$$

worin die a_n reelle Constanten sind, für welche die Reihe $\Sigma a_n'$ ihrer Absolutwerthe convergirt und die $\psi_n(x)$ endliche und stetige Functionen von x sind, die nur zwischen -1 und 1 variiren u. s. f. und für unendlich viele rationale Werthe von x verschwinden u. s. f., wie zum Beispiel:

$$\psi_n(x) = \sin \operatorname{am} (2nxK),$$

falls $4K$ die reelle Periode einer elliptischen Function $\sin \operatorname{am} z$ bedeutet, deren Modul kleiner als 1 ist u. s. f.

einen Seite eine unendlich grosse Anzahl von Schwankungen macht, alsdann macht offenbar die Function $f(x)$ in den Umgebungen eines jeden rationalen und daher auch eines jeden irrationalen Punktes ebenfalls jedesmal dann eine unendlich grosse Anzahl von Schwankungen, wenn für jeden rationalen Punkt bei abnehmendem δ die Aenderungen des letzten Gliedes der Gleichung

$$f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)=\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{\varphi\left[\sin n\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)\pi\right]-\varphi\left(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^{s}}+$$

$$+\frac{1}{\mu^{s}}\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi(\pm\sin n\mu\delta\pi)}{n^{s}}$$

im Vergleich mit den entsprechenden Aenderungen des ersten Gliedes der rechten Seite hinreichend gross sind.

Man kann insbesondere noch sagen: Wenn die Function $\varphi(y)$ den in dem Satz 4 des vorigen Paragraphen gegebenen Bedingungen genügt und im Punkt $y=0$ eine unendlich grosse Derivirte von unbestimmtem Vorzeichen hat, so besitzt die Function $f(x)$ in jedem rationalen Punkt ein Maximum oder ein Minimum und macht deshalb in der Umgebung eines jeden Punktes eine unendlich grosse Anzahl von Schwankungen.

---

§ 116. Mit Hülfe des Princips der Verdichtung der Singularitäten lassen sich nun mit grösster Leichtigkeit analytische Ausdrücke für Functionen bilden, die in jedem endlichen Intervall eine unendlich grosse Anzahl von Singularitäten in Bezug auf die Continuität, die Derivirte oder die Maxima und Minima besitzen.

1. Zu dem Zweck wollen wir zunächst zur $\varphi(y)$ eine Function wählen, die für positive y gleich y und für negative y gleich $-y$ ist. Diese Function kann als der Werth der Quadratwurzel $\sqrt{y^2}$ angesehen werden, wenn das Vorzeichen der Quadratwurzel stets positiv genommen wird. Die entsprechende Function $f(x)$ ist daher:

$$f(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}\sqrt{\sin^{2}nx\pi}\ .$$

Sie ist nach Satz 3 des § 114 in allen Punkten endlich und stetig und hat in allen irrationalen Punkten x eine endliche und bestimmte Derivirte; dagegen hat sie für keinen rationalen Punkt eine bestimmte Derivirte und das Verhältniss

$$\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$$

strebt für jeden dieser Punkte $\frac{\nu}{\mu}$, wenn δ sich durch positive Werthe der Null nähert, einem endlichen und bestimmten Grenzwerth zu, der aber von demjenigen verschieden ist, den man erhält, wenn man sich δ der Null durch negative Werthe nähern lässt.

2. Wir wollen an zweiter Stelle die

$$\varphi(y)=y\sin(\log y^2)$$

nehmen. Die entsprechende Function $f(x)$ ist dann:

$$f(x)=\sum_1^\infty\frac{\sin nx\pi\,[\log(\sin^2 nx\pi)]}{n^s}.$$

Sie ist nach Satz 3 des § 114 in einem beliebigen Intervall endlich und continuirlich und hat in allen irrationalen Punkten eine bestimmte und endliche Derivirte; dagegen hat sie, wenigstens wenn s hinreichend gross ist, in keinem rationalen Punkt eine bestimmte Derivirte und das Verhältniss

$$\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$$

schwankt für jeden dieser Punkte $\frac{\nu}{\mu}$, wenn δ sowohl rechts als auch links von diesem Punkt $\frac{\nu}{\mu}$ immer kleiner wird, zwischen endlichen Grenzen hin und her, ohne irgend einem bestimmten Grenzwerth zuzustreben.

3. Man setze nun

$$\varphi(y)=y\sin\frac{1}{y}\ \text{mit}\ \varphi(0)=0.$$

Die entsprechende Function $f(x)$ ist dann

$$f(x)=\sum_1^\infty\frac{\sin nx\pi\sin\frac{1}{nx\pi}}{n^s}.$$

Während man von ihr noch behaupten kann (Satz 3 des § 114), dass sie stets endlich und continuirlich ist und in den rationalen Punkten keine bestimmte Derivirte hat, lässt sich dagegen über ihre Derivirte in den irrationalen Punkten keine Behauptung aufstellen, weil in diesem Fall die Derivirte der $\varphi(y)$ bei unbeschränkt abnehmendem y, obgleich immer bestimmt und endlich, doch schliesslich auch Werthe annimmt, die numerisch grösser als eine beliebige gegebene Zahl sind.

4. Man setze

$$\varphi(y) = (y^2)^{\frac{p}{q}},$$

worin p und q ganze positive Zahlen sind und $2p < q$ und als Wurzelwerth werde der reelle und positive Werth genommen. Die entsprechende $f(x)$ ist dann:

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{(\sin^2 nx\pi)^{\frac{p}{q}}}{n^s}.$$

Sie ist immer endlich und continuirlich und hat in allen rationalen Punkten (Satz 4 § 114) eine unendlich grosse Derivirte von unbestimmtem Vorzeichen, also ein Maximum oder Minimum, und macht daher in jedem beliebigen endlichen Intervall eine unendlich grosse Anzahl von Schwankungen (§ 115). Ueber die Derivirte dieser Function in den irrationalen Punkten kann man keine Behauptung aufstellen.

5. Man setze

$$\varphi(y) = (y^2)^{\frac{1-\alpha}{2}} \sin \frac{1}{y},$$

unter α eine positive Zahl, die kleiner als 1 ist, verstanden und definire $\varphi(0) = 0$.

In diesem Fall ist die Function $f(x)$:

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\left(\sin^2 nx\pi\right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \sin\left(\frac{1}{\sin nx\pi}\right)}{n^s}.$$

Da jetzt das Verhältniss $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$, wenn y sich ohne Ende der Null nähert, nicht immer zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen bleibt und auch nicht ∞ zum Grenzwerth hat, so ist bei Anwendung der Sätze des § 114 nur die Behaup-

tung gestattet, dass diese Function $f(x)$ stets endlich und continuirlich ist.

Man bemerkt aber, dass auch in diesem Falle (§ 113) die Gl. (4) gilt und man also schreiben kann

$$\sum_{n=1}^{r} \frac{\varphi(\pm \sin n\mu\delta\pi)}{n^s} = (\mu\delta\pi)^{1-\alpha} \sum_{1}^{m} \frac{(\sin^2 n\mu\delta\pi)^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(n\mu\delta\pi)^{1-\alpha}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{\sin n\mu\delta\pi}\right)}{n^{s-1+\alpha}}$$

$$+ \sum_{m+1}^{r} (\sin^2 n\mu\delta\pi)^{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sin n\mu\delta\pi}\right) \cdot \frac{1}{n^s}.$$

Darin bedeutet m eine Zahl, die auf die im § 113 angegebene Art zu bestimmen ist. Es reicht folglich aus

$$s > 2 - \alpha$$

zu setzen und die Gleichung (2) anzuwenden, um sofort zu der folgenden Beziehung zu gelangen:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi(\pm \sin n\mu\delta\pi)}{n^s} = (\mu\delta\pi)^{1-\alpha}\left[\sin\left(\frac{1}{\sin \mu\delta\pi}\right) + \frac{h}{2^{s-2+\alpha}}\right] +$$

$$+ k\delta^{3-3\alpha} + h'\delta^{s-1/\mu},$$

in welcher die Grössen h, h' und k numerisch kleiner als die Einheit sind. Aus ihr schliesst man ohne Weiteres (§ 115), dass die vorliegende Function $f(x)$ bei hinreichend grossem s in einem beliebigen Intervall eine unendlich grosse Anzahl von Schwankungen macht und in den rationalen Punkten keine bestimmte Derivirte hat und dass das Verhältniss

$$\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

in den nämlichen Punkten mit kleiner werdendem δ beständig zwischen unendlich grossen positiven und negativen Grenzen hin- und herschwankt, ohne jedoch ∞ zum Grenzwerth zu haben.

6. Man setze

$$\varphi(y) = \sin\frac{1}{y} \text{ und } \varphi(0) = 0.$$

Die Function $f(x)$ ist dann

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sin nx\pi}\right)}{n^s},$$

worin bei rationalem $x = \frac{\nu}{\mu}$ die Glieder, für welche n ein Vielfaches von μ ist, auszulassen sind. Dieselbe ist stets numerisch kleiner als die endliche Zahl

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$$

und ist in jedem beliebigen endlichen Intervall, wenigstens wenn s grösser als 2 ist, eine punktirt discontinuirliche Function, welche in demselben Intervall nur eine endliche Anzahl von Sprüngen macht, die grösser als eine gegebene noch so kleine Zahl σ sind. Ueberdies besitzt diese Function, welche in allen irrationalen Punkten continuirlich und auf beiden Seiten aller rationalen Punkte discontinuirlich ist, nur Discontinuitäten der zweiten Art (Satz 1 § 114).

7. $\varphi(y)$ sei nun eine Function, die zwischen 0 und $+1$ (0 ausgeschlossen) den Werth 1 und zwischen 0 und -1 (0 wieder ausgeschlossen) den Werth -1 hat und für $y = 0$ verschwindet. Eine solche Function $\varphi(y)$ stellt zum Beispiel, wie aus der Theorie der Fourier'schen Reihen bekannt ist, die trigonometrische Reihe

$$\frac{4}{\pi} \sum_0^\infty \frac{\sin (2n+1) \frac{y\pi}{a}}{2n+1}$$

dar, in der a positiv und > 1 ist.

Die entsprechende Function $f(x)$ ist deshalb

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \left[\sum_{p=0}^\infty \frac{1}{2p+1} \sin \left\{ (2p+1) \frac{\pi}{a} \sin nx\pi \right\} \right].$$

Sie ist nach dem ersten Satze von § 114 für irrationale Punkte stetig, dagegen für rationale Punkte $\frac{\nu}{\mu}$ discontinuirlich und ihre Discontinuitäten sind auf beiden Seiten des entsprechenden Punktes sämmtlich gewöhnliche Discontinuitäten. Ausserdem ist diese Function in jedem Discontinuitätspunkt $\frac{\nu}{\mu}$ dem arithmetischen Mittel zwischen den beiden

$$f\left(\frac{\nu}{\mu} + 0\right) \text{ und } f\left(\frac{\nu}{\mu} - 0\right)$$

gleich und die Sprünge, welche sie auf beiden Seiten dieser

Punkte macht, sind

$$= \frac{1}{\mu^\nu} \sum_1^r \frac{1}{n^\nu},$$

wenn ν gerade, und

$$= \frac{1}{\mu^\nu}\left(1 - \frac{1}{2^{\nu-1}}\right) \sum_1^r \frac{1}{n^\nu},$$

wenn ν ungerade ist (§ 109); und die Anzahl der Punkte, in welchen diese Sprünge grösser als eine beliebig gegebene noch so kleine Zahl σ sind, ist in jedem endlichen Intervall immer endlich.

8. Nimmt man jetzt für $\varphi(y)$ das Quadrat der eben benützten Function, so entsteht eine Function $f(x)$, die in allen irrationalen Punkten stetig ist und immer denselben Werth

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^\nu}$$

hat, in den irrationalen Punkten dagegen unstetig ist. Ihre Discontinuitäten sind alle hebbare, die sich durch Abänderung des Functionswerthes im Unstetigkeitspunkt aufheben lassen und die Sprünge sind gleich

$$\frac{1}{\mu^\nu} \sum_1^r \frac{1}{n^\nu}$$

(§ 109).

§ 107*. Eine andere Methode der Condensation der Singularitäten wurde von Cantor[1]) gegeben. Sie hat vor der Hankel'schen die Vortheile voraus, dass sie übersichtlicher ist und dass man mit ihrer Hülfe Functionen bilden kann, welche in den Punkten von beliebigen abzählbaren Punktmengen Singularitäten haben. Indem wir diese Methode jetzt noch auseinandersetzen, bemerken wir, dass einige der folgenden Untersuchungen für ganz beliebige abzählbare Mengen gelten, andere dagegen, von § 109* an, nur für die Menge der rationalen Zahlen durchgeführt sind.

Es sei $\varphi(y)$ eine Function von y, die für alle Werthe dieser Variabeln, den Werth $y = 0$ ausgenommen, stetig ist

---

1) Math. Ann. Bd. 19 S. 588.

und für $y = 0$ den Werth Null hat. Es sei ferner G eine unendliche abzählbare Menge von Zahlen, deren Individuen

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \dots$$

seien. Wir wollen annehmen, es sei möglich, die positiven Constanten

$$c_1, c_2, c_3 \dots$$

so zu bestimmen, dass sie eine convergente Reihe bilden und dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi(x - \omega_n) \tag{1}$$

für alle x unbedingt und in jedem endlichen Intervall auch gleichmässig convergent sei. Dann wird sie eine Function $f(x)$ von x darstellen, die für jeden Werth von x definirt ist.

Gehört nun x_0 nicht zu G, so ist $f(x)$ bei diesem Werth x_0 stetig. Denn bezeichnet man (wie in § 91) den Rest vom $(m + 1)^{\text{ten}}$ Gliede an mit $R_m(x)$, so wird

$$f(x_0 + \delta) - f(x_0) = \sum_{n=1}^{m} c_n [\varphi(x_0 + \delta - \omega_n) - \varphi(x_0 - \omega_n)]$$
$$+ R_m(x_0 + \delta) - R_m(x_0).$$

Wegen der gleichmässigen Convergenz kann man zu einer beliebig kleinen Zahl σ' eine andere m' finden so, dass für

$$m > m'$$

$|R_m(x)|$ für jedes x zwischen $x_0 - \varepsilon$ und $x_0 + \varepsilon$ kleiner als $\frac{\sigma}{3}$ ist.

Und dann kann man weiter $\varepsilon_1 < \varepsilon$ so finden, dass auch der absolute Werth der ersten Summe in obiger Gleichung $< \frac{\sigma}{3}$ ist, weil ja keine der Differenzen $x_0 - \omega_n$ gleich Null und deshalb die sämmtlichen vorkommenden Functionen φ stetig sind. Dann ist für

$$|\delta| < \varepsilon_1 \quad \text{auch} \quad |f(x_0 + \delta) - f(x_0)| < \sigma,$$

also $f(x)$ stetig.

Gehört aber x_0 zur Menge G, ist etwa $= \omega_\lambda$, so trennt man von der Reihe (1) das Glied $c_\lambda \varphi(x - \omega_\lambda)$ ab. Die übrige unendliche Reihe besteht aus lauter Gliedern, deren Argumente für $x = \omega_\lambda$ nicht verschwinden und stellt also nach dem Bewiesenen eine stetige Function von x dar. Somit wird im

Punkte $x = \omega_\lambda$ die Function $f(x)$ sich ebenso unstetig verhalten wie $c_\lambda \varphi(x - \omega_\lambda)$. Ist der Sprung der Function $\varphi(y)$ bei $y = 0$ gleich S, so ist der von $f(x)$ bei $x = \omega_\lambda$ hiernach gleich $c_\lambda S$. Soll er grösser als eine beliebig gewählte Zahl ϱ sein, so muss

$$c_\lambda > \frac{\varrho}{S}$$

sein, eine Ungleichung, die wegen der Convergenz der Reihe Σc_n nur für eine endliche Zahl von Werthen λ erfüllt ist. Daher ist bei unserer Function $f(x)$ die Anzahl der Sprünge, die einen gegebenen Werth überschreiten, stets endlich.

§ **108*.** Nehmen wir nun weiter an, die Function $\varphi(y)$ habe für alle Werthe von y, höchstens den Werth $y = 0$ ausgenommen, eine Ableitung, die bestimmt und ihrem absoluten Werthe nach $< g'$ sei. Dann ist die Reihe

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi'(x - \omega_n)$$

für jedes nicht zu G gehörige x unbedingt und gleichmässig convergent, da die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

convergent ist. Hat nun $\varphi(y)$ auch für $y = 0$ eine bestimmte und endliche Ableitung, so folgt aus § 105, dass $f(x)$ für alle Werthe von x eine bestimmte und endliche Derivirte besitzt, die durch die Summe der Reihe (2) gegeben ist.

Wenn wir aber jetzt voraussetzen, dass die Function $\varphi(y)$ zwar für alle von Null verschiedenen y eine Ableitung $\varphi'(y)$ habe, die absolut genommen $< g'$ sei, dagegen für $y = 0$ eine Ableitung nicht existire, sondern nur

$$\left|\frac{\varphi(\delta)}{\delta}\right| < g''$$

sei, wenn $|\delta| < \delta_1$ ist, so folgt aus § 72 (7), dass für beliebige Werthe y_1 und y_2, deren Differenz numerisch kleiner als δ_1,

$$\left|\frac{\varphi(y_2) - \varphi(y_1)}{y_2 - y_1}\right| < A$$

ist, wobei A die grösste der Zahlen g' und g'' ist.

Wenn dann x_0 nicht zu G gehört, also keine der Differenzen $x_0 - \omega_n$ gleich Null ist, so hat die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\varphi(x_0 - \omega_n + \delta) - \varphi(x_0 - \omega_n)}{\delta} \tag{3}$$

eine Bedeutung und es ist, für $|\delta| < \delta_1$,

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} c_n \left| \frac{\varphi(x_0 - \omega_n + \delta) - \varphi(x_0 - \omega_n)}{\delta} \right| < A \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n ,$$

d. h. die Reihe (3) ist für alle δ, die numerisch kleiner als δ_1 sind, gleichmässig convergent und folglich ist nach § 100 die Ableitung $f'(x_0)$ gegeben durch

$$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi'(x_0 - \omega_n) .$$

Ist aber x_0 eine Zahl w_λ aus G, so trennt man wieder das Glied $c_\lambda \varphi(x - \omega_\lambda)$ ab. Die übrig bleibende Reihe sei $F(x)$. Dann ist, wie eben bewiesen,

$$\lim \frac{F(\omega_\lambda + \delta) - F(\omega_\lambda)}{\delta}$$

ein bestimmter endlicher Werth $= G(\omega_\lambda)$ und daher ist

$$\frac{f(\omega_\lambda + \delta) - f(\omega_\lambda)}{\delta} = c_\lambda \frac{\varphi(\delta)}{\delta} + G(\omega_\lambda) + \zeta,$$

wo ζ sich mit δ der Null nähert. Somit hat jetzt $f(x)$ für $x = \omega_\lambda$ keine bestimmte Ableitung, sondern das Verhalten des Differenzenquotienten ist wesentlich durch das von $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ bedingt.

---

§ 109*. Wenn die Function $\varphi(y)$ für jedes y, höchstens $y = 0$ ausgenommen, eine endliche und bestimmte Ableitung hat, die aber mit der Annäherung von y an Null ihrem absoluten Werth nach jede Grenze überschreitet, so ist es, wie es scheint, nicht mehr möglich, die Untersuchung in derselben Allgemeinheit wie bisher auszuführen. Wir wollen daher annehmen, die Menge G sei jetzt die R der rationalen Zahlen. Dass die sämmtlichen Rationalzahlen in der That eine abzähl-

bare Menge bilden, kann man nach Cantor[1]) so beweisen. Sei, in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, mit positivem Nenner, $\frac{a}{b}$ ein solche Zahl, so werde

$$|a| + b = N$$

die Höhe der Zahl genannt. Dann giebt es nur eine endliche Zahl von rationalen Zahlen, die eine gegebene Höhe haben, nämlich höchstens $2N-2$, wenn man Null nicht mitrechnet, oder um auch den Fall $N = 1$ mit zu umfassen, der nur Null liefert, höchstens $2N-1$. Man ordne nun die Rationalzahlen zuerst in Gruppen zusammen nach ihrer Höhe und in der einzelnen Gruppe ordne man sie weiter nach ihrer Grösse[2]). Auf diese Art erhält jede rationale Zahl offenbar einen ganz bestimmten Platz in der Reihe und eine ganz bestimmte Nummer. Es möge dafür gesorgt werden, dass jede Zahl nur einmal in der Reihe auftrete. Weil zu jedem $N > 1$ mindestens zwei Zahlen (N und $-N$) gehören müssen, so ist die Nummer n einer Zahl von der Höhe N sicher

$$\geqq 1 + 2(N-2) + 1 = 2N-2,$$

daher umgekehrt $N \leqq \frac{n+2}{2}$, und da der Nenner der Zahl höchstens gleich der Höhe sein kann, der Nenner auch $< \frac{n+2}{2}$. Die Zahl selbst ist numerisch $\leqq N-1$, also $\leqq \frac{n}{2}$. Für unsere Zwecke reicht es aus zu wissen, dass sowohl $|\omega_n|$ als der Nenner von ω_n beide $\leqq n$ sind.

---

§ 110*. Ueber die Function $\varphi(y)$ machen wir nun folgende Annahmen. Sie sei für jedes y endlich, wachse aber mit wachsendem y über alle Grenzen, jedoch so, dass $\left|\frac{\varphi(y)}{y^\beta}\right|$, wo β positiv, beständig kleiner als g_1 bleibe, wenn $|y| > 1$ ist, während für $|y| \leqq 1$ die Ungleichung $|\varphi(y)| < g_2$ gelte. Für jedes von Null verschiedene y sei die Function $\varphi(y)$

---

1) Journ. f. Math. Bd. 77 S. 258.

2) Der Anfang der Reihe ist dann

$0;\ -1,\ +1;\ -2,\ -\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2},\ 2;\ -3,\ -\frac{1}{3},\ +\frac{1}{3},\ +3;\ \ldots$

stetig und habe eine endliche und bestimmte Ableitung. Diese nähere sich mit abnehmendem y dem Unendlich, aber so dass $|y^\beta \varphi'(y)|$, wo β positiv, kleiner als g'' bleibe, wenn $|y| < 1$ sei, während für Werthe von y, die numerisch grösser als 1 sind,

$$|\varphi'(y)| < |y|^\gamma g'''$$

bleibe. Das Verhalten von $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ für abnehmende δ sei ganz unbestimmt gelassen.

Dann sind im Rest der Reihe (1) § 107* diejenigen Glieder, für welche

$$|x - \omega_n| > 1,$$

ihrem numerischen Werth nach $< g_2 c_n$; diejenigen aber, für welche

$$|x - \omega_n| < 1,$$

sind absolut genommen

$$< g_1 |x - \omega_n|^\alpha c_n .$$

Bezeichnet man $|x|$ mit ξ, so ist

$$|x - \omega_n| < \xi + n,$$

daher die letztgenannten Glieder

$$< g_1 (\xi + n)^\alpha c_n$$

sind. Der Rest $R_m(x)$ ist folglich, da

$$(\xi + n)^\alpha > 1,$$

numerisch genommen kleiner als

$$g \sum_{n=m+1}^{\infty} (\xi + n)^\alpha c_n ,$$

wenn g die grössere der beiden Zahlen g_1 und g_2 ist. Man kann Convergenz herstellen, wenn man

$$c_n = n^{-t-\alpha}, \quad \text{mit} \quad t > 1,$$

setzt. Dann wird

$$c_n (\xi + n)^\alpha = n^{-t} \left(1 + \frac{\xi}{n}\right)^\alpha .$$

Nimmt man also m so gross, dass $\frac{\xi}{m+1} < \frac{1}{2}$, so wird

$$R_m(x) < g \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha \sum_{n=m+1}^{\infty} n^{-t} < g \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha \frac{1}{m^{t-1}},$$

wenn $t > 2$ ist. Somit ist die Reihe (1) für jeden endlichen Bereich von x auch gleichmässig convergent.

Betrachten wir nun die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' c_n \varphi'(\omega_\lambda - \omega_n) = g(\omega_\lambda), \tag{4}$$

wo der Accent am Summenzeichen hier wie im Folgenden andeutet, dass der Werth $n = \lambda$ in der Summe nicht zu nehmen sei.

Für diejenigen ω_n, für welche

$$|\omega_\lambda - \omega_n| > 1,$$

ist der numerische Werth eines Gliedes der Summe

$$< c_n |\omega_\lambda - \omega_n|^\gamma \cdot g''' \quad \text{oder} \quad < c_n |\lambda + n|^\gamma \cdot g''';$$

für die anderen, für die

$$|\omega_\lambda - \omega_n| \leq 1, \text{ wird } |\varphi'(\omega_\lambda - \omega_n)| < \frac{g''}{|\omega_\lambda - \omega_n|^\beta}.$$

Sei nun

$$\omega_\lambda = \frac{\nu}{\mu}, \ \omega_n = \frac{p}{q}, \text{ so ist } |\omega_\lambda - \omega_n| \geqq \frac{1}{\mu q}$$

und, da

$$\mu < \lambda, \ q < n \text{ ist, } |\omega_\lambda - \omega_n| > \frac{1}{\lambda n}.$$

Daher ist endlich für die n dieser letzteren Kategorie

$$|\varphi'(\omega_\lambda - \omega_n)| < g'' \lambda^\beta n^\beta.$$

Bezeichnet man mit g' die grösste der Zahlen g'', g''' und mit $\varkappa$ die grösste der Zahlen β, γ, so kann man, da

$$2\lambda n \geqq \lambda + n$$

ist, sagen

$$|\varphi'(\omega_\lambda - \omega_n)| < g' \lambda^\varkappa n^\varkappa \cdot 2^\varkappa.$$

Der Rest

$$R_m'(\omega_\lambda) = \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n \varphi'(\omega_\lambda - \omega_n)$$

ist also numerisch kleiner als

$$g' 2^\varkappa \lambda^\varkappa \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n n^\varkappa.$$

Für $c_n = n^{-\tau-\varkappa}$, mit $\tau > 2$, wird die Reihe (4) also convergent und

$$|R_m'(\omega_\lambda)| < g' \lambda^\varkappa \frac{2^\varkappa}{m^{\tau-1}}.$$

Wenn man also zusammenfassend setzt

$$c_n = n^{-s-\alpha-n}, \ s \geqq 3,$$

so wird sicher

$$|R_m(x)| < g\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha} \frac{1}{m^{s-1}}; \quad |R_m'(\omega_\lambda)| < g' \frac{\lambda^{\varkappa} \cdot 2^{\varkappa}}{m^{s-1}}.$$

---

§ 111*. Mit den Bezeichnungen

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' c^n \varphi(x - \omega_n)$$

$$D_n = \frac{\varphi(\omega_\lambda - \omega_n + \delta) - \varphi(\omega_\lambda - \omega_n)}{\delta} - \varphi'(\omega_\lambda - \omega_n)$$

wird nun

$$\frac{f(\omega_\lambda + \delta) - f(\omega_\lambda)}{\delta} = c_\lambda \frac{\varphi(\delta)}{\delta} + \frac{F(\omega_\lambda + \delta) - F(\omega_\lambda)}{\delta} \tag{5}$$

und

$$\frac{F(\omega_\lambda + \delta) - F(\omega_\lambda)}{\delta} = g(\omega_\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty}{}' c_n D_n.$$

Sei nun k eine positive ganze Zahl, l eine zweite $> k$ und $> \lambda$; man theile die Summe rechts in der letzten Gleichung in die 3 Theile

$$\sum_{n=1}^{k}{}' \qquad \sum_{n=k+1}^{l}{}' \qquad \sum_{n=l+1}^{\infty}.$$

In der ersten kann man zu einer gegebenen, beliebig kleinen positiven Zahl σ eine andere ε so finden, dass, wenn

$$|\delta| = d < \varepsilon \text{ ist, } \left|\sum_{n=1}^{k}{}' c_n D_n\right| < \sigma$$

wird. In der zweiten Summe ist

$$\omega_\lambda - \omega_n > \frac{1}{\lambda n} \text{ und, weil } n < l, \text{ auch } > \frac{1}{\lambda l}.$$

Wenn man also

$$d < \frac{1}{2\lambda l}$$

nimmt, so ist es, wenn n die Werthe $k + 1 \ldots l$ durchläuft, auch

$$< \frac{1}{2\lambda n}, \text{ und } |\omega_\lambda - \omega_n + \delta|$$

kann nie Null werden, sondern bleibt stets

$$> \frac{1}{2\lambda n}\,.$$

Bezeichnet nun Θ_n einen echten Bruch, so ist weiter

$$\left|\frac{\varphi(\omega_\lambda - \omega_n + \delta) - \varphi(\omega_\lambda - \omega_n)}{\delta}\right| = \left|\varphi'(\omega_\lambda - \omega_n + \Theta_n \delta)\right|$$

und auch hier ist das Argument der Function φ' auf der rechten Seite sicher numerisch grösser als $\frac{1}{2\lambda n}$. Die im vorigen Paragraphen angestellte Ueberlegung zeigt dann, dass die rechte Seite obiger Gleichung

$$< 2^\varkappa g' \lambda^\varkappa n^\varkappa$$

ist, unter welcher Grenze auch

$$\varphi'(\omega_\lambda - \omega_n)$$

liegt. Somit wird

$$\left|\sum_{n=k+1}^{l}{}' c_n D_n\right| < \sum_{n=k+1}^{l} 2 \cdot 2^\varkappa g' \lambda^\varkappa n^\varkappa c_n < 2^{\varkappa+1} g' \lambda^\varkappa \sum_{n=k+1}^{l} n^{-s}.$$

Setzt man also

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} n^{-s} = C_m\,,$$

so wird

(6) $$\left|\sum_{n=k+1}^{l}{}' c_n D_n\right| < 2^{\varkappa+1} g' \lambda^\varkappa (C_k - C_l)\,.$$

Endlich ist

$$\left|\sum_{n=l+1}^{\infty} c_n D_n\right| < \frac{1}{d}\left|R_l(\omega_\lambda + \delta)\right| + \frac{1}{d}\left|R_l(\omega_\lambda)\right| + \left|R'_l(\omega_\lambda)\right|$$

oder wenn man l so gross nimmt, dass

(7) $$\frac{|\omega_\lambda| + d}{l+1} < \frac{1}{2}\,,$$

$$\left|\sum_{n=l+1}^{\infty} c_n D_n\right| < \frac{2g}{d}\left(\frac{3}{2}\right)^\alpha C_l + g' \lambda^\varkappa 2^\varkappa \cdot C_l\,.$$

Damit wird nun

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' c_n D_n = \xi\sigma + \vartheta \cdot 2^{\varkappa+1} g' \lambda^\varkappa (C_k - C_l)$$
$$+ \eta\left[2\left(\frac{3}{2}\right)^\alpha \frac{g}{d} + g' 2^\varkappa \lambda^\varkappa\right] C_l\,,$$

wo ζ, ϑ, η positive oder negative echte Brüche sind, oder, wenn man für die hier vorkommenden von k und l unabhängigen Grössen einfachere Zeichen einführt,

$$\sum_{n=1}^{r}{}' c_n D_n = \zeta\sigma + \vartheta \cdot A \cdot C_k + \left(\vartheta B + \eta \frac{C}{d}\right) C_l$$

und weiter

$$= \zeta\sigma + \frac{\vartheta' A}{k^{s-1}} + \frac{\vartheta' B}{l^{s-1}} + \frac{\eta' C}{d l^{s-1}}, \tag{8}$$

wo ϑ', η' wieder positive oder negative echte Brüche sind.

Nun muss

$$d < \frac{1}{2\lambda l}, \quad \text{also} \quad l < \frac{1}{2\lambda d}$$

sein. Nimmt man für l die nächst kleinere ganze Zahl, so wird

$$l > \frac{1}{2\lambda d} - 1\,.$$

Da $|\omega_\lambda| < \lambda$, so ist die Bedingung (7) erfüllt, wenn

$$\frac{\lambda + d}{l + 1} < \xi, \text{ also hier } 2\lambda d(\lambda + d) < \frac{1}{2},$$

was sich stets durch gehörig kleine Annahme von d erreichen lässt. Weiter wird

$$d l^{s-1} > d^{2-s}\left(\frac{1}{2\lambda} - d\right)^{s-1}$$

mit gegen Null abnehmendem d über alle Grenzen wachsen, wenn, wie wir voraussetzten, $s > 2$ ist.

Nimmt man also ε gehörig klein an, so wird für $d < \varepsilon$ die Summe der zwei letzten Glieder in (8) numerisch kleiner als σ gemacht werden können, so dass aus (5) nun folgt

$$\frac{F(\omega_\lambda + \delta) - F(\omega_\lambda)}{\delta} = g(\omega_\lambda) + 2\zeta'\sigma + \frac{\vartheta' A}{k^{s-1}},$$

wo ζ' wieder ein echter Bruch ist. Da hier k noch ganz beliebig ist und k^{s-1} mit wachsendem k über alle Grenzen wächst, so ergibt sich

$$\lim \frac{F(\omega_\lambda + \delta) - F(\omega_\lambda)}{\delta} = g(\omega_\lambda)$$

und aus (5)

$$\frac{f(\omega_\lambda + \delta) - f(\omega_\lambda)}{\delta} = c_\lambda \frac{\varphi(\delta)}{\delta} + g(\omega_\lambda) + \eta,$$

wo η mit δ unendlich klein wird. Auch hier ist also das Ver-

halten des Differenzenquotienten von $f(x)$ wesentlich durch das des Quotienten $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ bestimmt.

Wie man sieht, stützt sich diese ganze Untersuchung wesentlich auf den Umstand, dass

$$\omega_\lambda - \omega_n > \frac{1}{\lambda n}$$

ist. Da sich bei irrationalem x eine solche untere Grenze, die von $x - \omega_n$ numerisch stets überschritten wird, nicht angeben lässt, scheitert der Versuch, eine der eben absolvirten Untersuchung ähnliche für irrationale x zu führen.

---

§ 112*. 1. Die Function des ersten Beispiels aus § 116 würde nach dem eben vorgetragenen Verfahren eine Function $f(x)$ liefern, die für jedes x endlich und stetig ist, in allen Punkten, die nicht zu der Menge G gehören, eine endliche und bestimmte Derivirte hat, während für den Werth ω_λ aus G die Ableitung links um $\frac{2}{\lambda^s}$ kleiner ist, als die rechts, während sie beide bestimmt sind (§ 108*).

2. Da die Reihe

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y\,|y|}{1+y^2} \left(\frac{1}{1+y^2}\right)^n$$

eine Function darstellt, die für $y = 0$ selbst $= 0$ ist, für $y < 0$ den Werth -1 und für $y > 0$ den Werth $+1$ hat, so erhält man aus ihr eine Function $f(x)$, die nach §§ 107* und 109* für die irrationalen Punkte stetig ist, für die rationalen unstetig. Die Discontinuitäten auf beiden Seiten von ω_λ sind sämmtlich gewöhnliche und $f(\omega_\lambda)$ ist das Mittel aus

$$f(\omega_\lambda - 0) \quad \text{und} \quad f(\omega_\lambda + 0);$$

die Sprünge sind beiderseits $= \frac{1}{\lambda^s}$. Für die rationalen Punkte hat $f(x)$ eine bestimmte Ableitung $= +\infty$.

3. Die Reihe

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^2}{1+y^2} \left(\frac{1}{1+y^2}\right)^n$$

(§ 31 Fussnote) stellt eine Function dar, die für $y = 0$ selbst verschwindet, während für alle andern y ihr Werth $= 1$ ist. Die aus ihr entstehende Function $f(x)$[1]) ist für alle irrationalen x stetig und

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Dagegen ist sie für $x = \omega_\lambda$ unstetig und ihr Werth

$$= \sum \frac{1}{n^s} - \frac{1}{\lambda^s},$$

so dass die Unstetigkeiten alle hebbar sind. Aus § 109* folgt, dass die Ableitung der Function für alle rationalen x unendlich, und zwar rechts $+\infty$, links $-\infty$ ist. Mit Hilfe von Kettenbrüchen[2]) kann man zeigen, dass die Ableitung von $f(x)$ für unendlich viele irrationale x gleich Null und für andere unendlich viele irrationale x unbestimmt ist.

4. Nimmt man $\varphi(y) = y^{\frac{1}{3}}$, so erhält man nach § 109* eine Function $f(x)$, die für alle x endlich und stetig ist, aber für jedes rationale x eine Ableitung $= +\infty$ besitzt. Man kann dies auch leicht direct nachweisen. Denn, weil

$$\frac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\sqrt[3]{\beta^2} + \sqrt[3]{\beta} \cdot \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\alpha^2}} = \psi(\beta, \alpha)$$

für alle α und β positiv ist, wächst φ mit wachsendem y und dies überträgt sich, weil die c_n positiv sind, auf die $f(x)$. Ferner ist

$$\frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi(x_0 + \delta - \omega_n, x_0 - \omega_n) > 0$$

und folglich $f'(x_0)$, wenn es existirt, ≥ 0. Ist $x_0 = \omega_\lambda$, so wird

$$\frac{f(\omega_\lambda + \delta) - f(\omega_\lambda)}{\delta} = c_\lambda \frac{1}{\sqrt[3]{\delta^2}} + \sum_{n=1}^{\infty}{}' c_n \psi(\omega_\lambda - \omega_n + \delta, \omega_\lambda - \omega_n)$$

und dies liefert

$$\lim \frac{f(\omega_\lambda + \delta) - f(\omega_\lambda)}{\delta} = +\infty.$$

---

1) Lerch. Giorn. d. Mat. Bd. 26 S. 375.

2) Hankel. In d. ob. Seite 157 ang. Abh. S. 47. — Darboux. In d. ob. Seite 157 ang. Abh. S. 100.

Auch hier kann man bezüglich der Ableitung mit Hilfe von Kettenbrüchen zeigen, dass für unendlich viele irrationale x die Ableitung $f'(x)$ existirt und

$$=\sum c_n \varphi'(x-\omega_n)$$

ist, und dass für andere unendlich viele irrationale x die Ableitung positiv unendlich gross ist.

5. Die Function

$$\varphi(y)=y-\frac{1}{2}y\sin\left(\frac{1}{2}\log(y^2)\right),\ \text{mit}\ \varphi(0)=0,$$

liefert
$$\varphi'(y)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log(y^2)\right).$$

Daher ist nach § 108* die entstehende Function $f(x)$ überall endlich und stetig und hat für jedes nicht zu G gehörige x_0 eine Ableitung, die ebenfalls endlich ist; für Werthe ω_λ dagegen schwankt

$$\frac{f(\omega_\lambda+\delta)-f(\omega_\lambda)}{\delta}$$

mit abnehmendem δ zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ hin und her und kann, wie klein man auch die obere Grenze für den absoluten Werth von δ festsetzen möge, jeden in dem Intervalle $\frac{1}{2}\cdots\frac{3}{2}$ enthaltenen Werth annehmen. Die Function $f(x)$ hat also für die sämmtlichen zu G gehörigen Werthe von x gar keine bestimmte Derivirte, obgleich das Zuwachsverhältniss stets zwischen endlichen Grenzen bleibt.

—

§ 117. Wir machen nun darauf aufmerksam, dass es noch viele andere punktirt discontinuirliche Functionen gibt, von denen man den analytischen Ausdruck kennt. Unter ihnen ist eine der bemerkungswerthesten die Riemann'sche Function[1]):

$$G(x)=\sum_1^\infty\frac{(nx)}{n^s},$$

in welcher s positiv und grösser als 1 ist und das Symbol (nx) Null bedeutet, wenn das Product nx eine ganze Zahl ist

1) In der Seite 60 angef. Abh.

oder in der Mitte zwischen zwei ganzen Zahlen liegt, dagegen in den andern Fällen die positive oder negative Differenz zwischen diesem Product nx und der ihm zunächst gelegenen ganzen Zahl bedeutet, derart, dass man, wie aus der Theorie der Fourier'schen Reihen hervorgeht, schreiben kann:

$$(nx) = \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{\sin 2mnx\pi}{m}.$$

Wenn man in der That beachtet, dass die Reihe, welche die Function $G(x)$ darstellt, in jedem beliebigen Intervall gleichmässig convergirt (§ 93) und dass die Function (nx) für irrationale Werthe von x und für solche rationale $\frac{\nu}{2\mu+1}$, deren Nenner ungerade ist, stets, n mag eine Zahl sein, welche es will, continuirlich ist, so sieht man sofort (§ 97), dass diese Function $G(x)$ stets endlich und in allen irrationalen Punkten und in solchen rationalen $\frac{\nu}{2\mu+1}$, deren Nenner ungerade ist, auch continuirlich ist. Dagegen ist diese Function, wie man leicht findet, in allen rationalen Punkten $\frac{\nu}{2\mu}$, deren Nenner gerade ist, auf beiden Seiten discontinuirlich und ihre Discontinuitäten sind gewöhnliche Discontinuitäten.

Denn beachtet man, dass für jeden dieser Punkte:

$$G\left(\frac{\nu}{2\mu}\right) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{\left(n\frac{\nu}{2\mu}\right)}{n^s},$$

worin die Summe auf der rechten Seite über alle ganzen Zahlen, die keine Vielfachen von μ sind, zu erstrecken ist, so erhält man:

$$G\left(\frac{\nu}{2\mu}+\delta\right) - G\left(\frac{\nu}{2\mu}\right) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{\left[n\left(\frac{\nu}{2\mu}+\delta\right)\right] - \left(n\frac{\nu}{2\mu}\right)}{n^s} +$$

$$+ \frac{1}{2^s\mu^s}\sum_{1}^{\infty}\frac{(2n\mu\delta)}{n^s} + \frac{1}{\mu^s}\sum_{0}^{\infty}\frac{\left[(2n+1)\left(\frac{\nu}{2\mu}+\delta\right)\mu\right]}{(2n+1)^s}.$$

Da die hier auftretenden Reihen gleichmässig convergent sind, so streben die erste und zweite mit kleiner werdendem

δ offenbar der Null zu (§ 94) und die dritte nähert sich immer mehr der Summe der Reihe

$$\pm \frac{1}{2\mu^s} \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^s},$$

weil ihre Glieder

$$\left[(2n+1)\left(\frac{\nu}{2\mu}+\delta\right)\mu\right]$$

bei unbeschränkt abnehmendem δ für positive δ offenbar dem Werth $-\frac{1}{2}$, dagegen für negative δ dem Werth $\frac{1}{2}$ zustreben Man kann daher ohne Weiteres schliessen:

$$G\left(\frac{\nu}{2\mu}+0\right) - G\left(\frac{\nu}{2\mu}\right) = -\frac{1}{2\mu^s} \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^s}$$

$$G\left(\frac{\nu}{2\mu}-0\right) - G\left(\frac{\nu}{2\mu}\right) = +\frac{1}{2\mu^s} \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^s}.$$

Dieses beweist offenbar unsere obige Behauptung und beweist überdies, dass der Werth dieser Function $G(x)$ in den Discontinuitätspunkten $\frac{\nu}{2\mu}$ das arithmetische Mittel aus

$$G\left(\frac{\nu}{2\mu}+0\right) \quad \text{und} \quad G\left(\frac{\nu}{2\mu}-0\right)$$

ist und dass die Sprünge, welche $G(x)$ in diesen Punkten auf beiden Seiten macht, gleich

$$\frac{1}{2\mu^s} \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^s}$$

und der Art sind, dass in jedem endlichen Intervall nur eine endliche Anzahl von Punkten existirt, in denen sie Sprünge macht, die grösser als eine gegebene Zahl σ sind.

Da die Function (nx) in allen irrationalen Punkten x und in den rationalen Punkten $\frac{\nu}{2\mu+1}$ mit ungeradem Nenner für jeden beliebigen Werth von n eine bestimmte Derivirte hat, die gleich n ist, so erkennt man leicht, dass, wenn $s > 2$ angenommen wird und man über die Function

$$\sum_0^\infty (nx) \quad \text{für} \quad x = \frac{\nu}{2\mu+1}$$

ähnliche Betrachtungen anstellte, wie im § 112, dass die

Function $G(x)$ in allen rationalen Punkten $\frac{\nu}{2\mu+1}$ mit ungeradem Nenner ebenfalls eine endliche und bestimmte Derivirte hat, welche die Summe der Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^{s-1}}$$

ist und deshalb in allen diesen Punkten einen und denselben Werth hat. In Bezug auf die irrationalen Punkte bleibt es ungewiss, ob die Function $G(x)$ in ihnen eine bestimmte und endliche Derivirte hat oder nicht.

---

§ 118. Ich halte es für angemessen, noch ein von Hankel mitgetheiltes Beispiel zu Functionen hinzuzufügen, die in jedem beliebigen Intervall total discontinuirlich sind und für welche es einen analytischen Ausdruck giebt.

Zu dem Ende nehmen wir die Function $\varphi(y)$, welche für $y = 0$ Null ist und für zwischen 0 und $+1$ liegende y den Werth $+1$, zwischen 0 und -1 liegende y dagegen den Werth -1 hat und deren analytischer Ausdruck, wie aus der Theorie der Fourier'schen Reihen bekannt ist,

$$\varphi(y) = \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty \frac{\sin(2n+1)y\frac{\pi}{a}}{2n+1}$$

ist, wenn a positiv und grösser als die Einheit vorausgesetzt wird. Unter der Annahme, dass $s > 1$ sei, bilden wir dann die Reihe:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^s[\varphi(\sin nx\pi)]^2}.$$

Diese Reihe ist bei irrationalen Werthen von x, weil dann für kein n der Werth nx ganzzahlig ist, stets gleich

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^s},$$

während sie für die rationalen Werthe von $x = \frac{p}{q}$ unendlich gross wird, weil alsdann diejenigen ihrer Glieder, für die n ein Vielfaches von q ist, unendlich gross und alle offenbar

positiv sind; daher ist die Function

$$f(x) = \frac{\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^2}}{\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^2 [\varphi(\sin n x \pi)]^2}}$$

in jedem beliebigen Intervall eine total discontinuirliche Function, welche für die irrationalen Werthe von x der Einheit und für die rationalen Werthe der Null gleich ist[1]).

Es ist ferner klar: Wenn man als $\varphi(y)$ andere Functionen nimmt, die auch noch der Bedingung genügen, dass sie für $y = 0$ verschwinden, so würden die der vorigen analogen Formeln, die man alsdann erhielte und diejenigen, die sich ergeben würden, wenn man der rechten Seite eine beliebige continuirliche Function $f_1(x)$ hinzufügt, uns weitere Beispiele von analytischen Ausdrücken von Functionen liefern, die in jedem beliebigen Intervall total discontinuirlich sind.

Wir unterlassen nicht, noch zu bemerken, dass dieses letzte Beispiel von Functionen, die total discontinuirlich und analytisch darstellbar sind, und das im vorigen Paragraphen behandelte Beispiel der Riemann'schen Function als Folge einer Erweiterung des Princips der Verdichtung der Singularitäten aufgefasst werden können; wie man denn dieses Princip offenbar derart ausdehnen kann, dass man auch nach andern Methoden als den oben entwickelten, sei es nun mit Hülfe von unendlichen Reihen, wie vorher, oder von unendlichen Producten oder unendlichen Kettenbrüchen u. s. w. im Stande ist, analytische Ausdrücke von Functionen zu bilden, die unendlich viele Singularitäten besitzen[2]).

---

1) Thomae, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 24 S. 64.

2) Für weitere Beispiele von Functionen, die in unendlich vielen Punkten keine Ableitung haben vgl. Schwarz, Archives des scienc. nat. 1873 Septemb. S. 33—38, Ges. Math. Abhandl. Bd. II S. 269; Darboux in d. oben angef. Abh.; Lerch, Journ. f. Math. Bd. 103 S. 126.

Zehntes Kapitel.

Functionen ohne bestimmte und endliche Derivirte.

§ 119. Das Princip der Verdichtung der Singularitäten hat uns mit einer unendlich grossen Anzahl von Functionen bekannt gemacht, die, obgleich mit starken Singularitäten behaftet, trotzdem eine analytische Darstellung zulassen und von Functionen, die, obgleich stets endlich, continuirlich und analytisch darstellbar, doch in einer unendlich grossen Anzahl von Punkten jedes beliebigen endlichen Intervalls entweder keine oder eine unendlich grosse Derivirte besitzen. Weitere Functionen der letzten Art werden wir in der Folge kennen lernen, wenn wir die gliedweise Integration auf Reihen anwenden, welche wir mittelst des Princips der Verdichtung der Singularitäten gefunden haben und welche Functionen darstellen, die in jedem beliebigen Intervall eine unendlich grosse Anzahl von Discontinuitäten haben. Die bisherigen Resultate lassen also allein schon erkennen, wie es keinem Zweifel mehr unterworfen sein kann, dass die Continuität einer Function in einem ganzen Intervall für sich allein nicht einmal im Allgemeinen eine ausreichende Bedingung für die Existenz der Derivirten dieser Function ist.

Aber mehr als das: Während wir bisher nur mit Functionen zu thun hatten, die, obwohl sie in einer unendlich grossen Anzahl von Punkten jedes beliebigen Intervalls keine oder eine unendlich grosse Derivirte haben, doch in den andern Punkten (deren Anzahl ebenfalls unendlich gross ist) noch eine endliche und bestimmte Derivirte besitzen oder doch wenigstens die Existenz oder Nichtexistenz dieser Derivirten ungewiss lassen, können wir auch andere Functionen bilden, die, wenn auch stets endlich und continuirlich, doch in keinem Punkt eines beliebigen Intervalls jemals eine bestimmte und endliche Derivirte besitzen oder höchstens eine Derivirte haben, die in gewissen Punkten unendlich gross und von bestimmtem Vorzeichen, in den unendlich vielen übrigen Punkten aber unendlich gross und von unbestimmtem Vorzeichen ist.

§ 120. Zu diesem Zweck ziehen wir eine Reihe $\Sigma u_n(x)$ in Betracht, in welcher $u_n(x)$ Functionen sind, die nicht nur in einem ganzen Intervall (a, b) endlich und continuirlich sind, sondern auch stets für ein bestimmtes n eine bestimmte und endliche Derivirte besitzen, während die Reihe $\Sigma u_n(x)$ für alle Werthe von x zwischen a und b convergirt und eine endliche und continuirliche Function von x $f(x)$ darstellt. Ueberdies besitze jede dieser Functionen $u_n(x)$ in dem Intervall (a, b) Maxima und Minima, deren stets endliche Anzahl doch mit wachsendem n ins Unendliche wächst, derart, dass sie von einem gewissen Werth von n an in dem ganzen Intervall (a, b) in Zwischenräumen aufeinander folgen, die kleiner als eine beliebige gegebene Grösse sind. Man sieht dann leicht ein, dass die Reihe $\Sigma u_n(x)$, wenn gewisse andere einfache Bedingungen erfüllt sind, eine Function von x darstellt, die, obwohl endlich und continuirlich, doch in dem ganzen Intervall (a, b) niemals eine endliche und bestimmte Derivirte hat.

Bezeichnet man nämlich mit $R_m(x)$ den Rest $\sum_{m+1}^{\infty} u_n(x)$ der gegebenen Reihe für den Werth x der Variablen und mit u_n' den absoluten Maximalwerth der Derivirten $u_n'(x)$ der $u_n(x)$ in dem Intervall (a, b) oder den oberen Grenzwerth ihrer absoluten Werthe, so erhält man für einen beliebigen Punkt x' zwischen a und b:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h} = \sum_1^{m-1} \frac{u_n(x'+h)-u_n(x')}{h} + \frac{u_m(x'+h)-u_m(x')}{h}$$
$$+ \frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{h}$$

oder auch:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h} = \eta_m \sum_1^{m-1} u_n' + \frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{h} +$$
$$+ \frac{u_m(x'+h)-u_m(x')}{h},$$

wenn h eine positive oder negative hinreichend kleine Zahl und η_m eine zwischen -1 und 1 liegende Zahl ist, die von m, x' und h abhängt.

Betrachten wir nun eine kleine Umgebung

$$(x' - h_1, \quad x' + h_2)$$

des Punktes x'. In diese Umgebung fallen, wenn m hinreichend gross ist, immer einige Maxima und Minima von $u_m(x)$; lässt man daher h sich so ändern, dass $x' + h$ in dieser Umgebung (rechts oder links von x') bleibt, so macht auch die Differenz

$$u_m(x' + h) - u_m(x')$$

einige Schwankungen. Lässt man nun, bei positivem h, $x' + h$ dem ersten Maximum von $u_m(x)$, oder erforderlichen Falls dem ersten Minimum rechts von x' entsprechen und, bei negativem h, dem ersten Maximum oder Minimum links von x', so kann jene Differenz ihrem Absolutwerth nach niemals kleiner als $\frac{D_m}{2}$ sein, vorausgesetzt, dass man unter D_m die kleinste der verschiedenen Schwankungen von $u_m(x)$ in dem Intervall (a, b) versteht.

Man wähle nun h der Art, dass $x' + h$ rechts oder links von x' mit diesem ersten auf x' folgenden Punkt, in dem $u_m(x)$ ein Maximum oder Minimum hat, zusammenfällt. Man hat dann dem Absolutwerth nach

$$u_m(x' + h) - u_m(x') \geq \frac{D_m}{2}.$$

Wenn ferner δ_m die grösste Entfernung zwischen einem Maximum und darauf folgendem Minimum der $u_m(x)$ ist, so ist numerisch $h < 2\delta_m$ und h ist daher bei hinreichend grossem m so klein, wie man nur will und $x' + h$ fällt in die in Betracht gezogene Umgebung von x' und man hat zudem:

$$u_m(x' + h) - u_m(x') = \alpha_m \gamma_m \frac{D_m}{2},$$

wenn $\alpha_m = \pm 1$ abhängig von m, der Lage von x' und manchmal auch vom Vorzeichen von h ist und wenn γ_m abhängig von m, x' und h stets positiv und nicht kleiner als 1 ist. Man kann daher setzen:

$$\frac{f(x' + h) - f(x')}{h} = \alpha_m \gamma_m \frac{D_m}{2h} \left\{ \alpha_m \eta_m' \frac{2h}{D_m} \sum_1^{m-1} u_n' + \right.$$

$$\left. + \frac{2\alpha_m}{\gamma_m} \frac{R_m(x' + h) - R_m(x')}{D_m} + 1 \right\},$$

unter η_m' eine neue zwischen -1 und 1 liegende Grösse verstanden. Da ferner dem Absolutwerth nach $2h < 4\delta_m$, so kann man schliesslich auch setzen:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h} = \alpha_m \gamma_m \frac{D_m}{2h} \Big\{ 4\eta_m'' \frac{\delta_m}{D_m} \sum_1^{m-1} u_n' + \\ + 2\alpha_m \varepsilon_m \frac{R_m(x'+h) - R_m(x')}{D_m} + 1 \Big\}$$

unter η_m'' eine neue zwischen -1 und 1 und unter ε_m eine zwischen 0 und 1 gelegene Grösse verstanden.

Wir nehmen nun an, dass die Maxima und Minima von $u_m(x)$ in dem Intervall (a, b) so schnell auf einander folgen, dass die Grösse $\frac{\delta_m}{D_m}$ und daher auch $\frac{h}{D_m}$ bei unendlich wachsendem m die Null zur Grenze haben.

Bezeichnet man mit x_1 und x_2 zwei Punkte des Maximums und darauf folgenden Minimums oder umgekehrt der $u_m(x)$, für welche die zugehörige Schwankung ihren kleinsten Werth D_m hat, mit d_m ihren Abstand $x_2 - x_1$ oder $x_1 - x_2$ und mit x_0 einen passenden Zwischenwerth, so hat man

$$d_m < \delta_m$$

und wenn ε_m' zwischen 0 und 1 liegt:

$$D_m = u_m(x_1) - u_m(x_2) = \pm d_m u_m'(x_0) = \varepsilon_m' \delta_m u_m'$$

oder:

$$\frac{D_m}{\delta_m} = \varepsilon_m' u_m'.$$

Wenn daher $\frac{\delta_m}{D_m}$ mit unbegrenzt wachsendem m der Null zustrebt oder allgemeiner nicht ∞ zum Grenzwerth hat, so strebt u_m' nicht der Null zu und die Reihe $\Sigma u_n'$ ist divergent[1]).

1) Will man mit Hülfe von Reihen Functionen $\Sigma u_n(x)$ bilden, die in einem ganzen endlichen Intervall niemals eine Derivirte haben, so muss man nothwendiger Weise die Bedingung stellen, dass die Reihe $\Sigma u_n'$ divergent sei, weil die Reihe $\Sigma u_n'(x)$ sonst zwischen a und b gleichmässig convergent wäre und der Satz in § 105 Anwendung fände.

Aus diesem Grund wächst der Factor $\sum_1^{m-1} u_n'$, der in dem ersten Glied der in Klammern stehenden Grösse in den beiden obigen Gleichungen auftritt, mit m ins Unendliche; das Product

$$\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u_n'$$

und folglich um so mehr das andere

$$\frac{2h}{D_m}\sum_1^{m-1} u_n'$$

können jedoch sehr wohl eine endliche Grösse zum Grenzwerth haben oder wenigstens keine Werthe annehmen, die grösser als eine gegebene endliche Grösse sind.

Wenn nun dieses Product

$$\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u_n'$$

oder wenigstens der Absolutwerth des andern

$$\frac{2h}{D_m}\sum_1^{m-1} u_n'$$

sich immer um mehr als eine endliche Grösse unter der Einheit hält und α_m, welches auch x' und das Vorzeichen von h sei, für alle oder für gewisse Werthe von m, die grösser als eine gegebene, beliebig grosse Zahl sind, immer dasselbe Vorzeichen wie

$$R_m(x'+h)-R_m(x')$$

hat; oder wenn wenigstens, vorausgesetzt dass eine obere endliche Grenze der Werthe von

$$R_m(x'+h)-R_m(x')$$

für die verschiedenen Werthe von x' und ein auf obige Art ausgewähltes h existirt und $2R_m'$ dieser obere Grenzwerth

---

Hier ist diese Bedingung, wie wir gesehen haben, in der andern enthalten, dass die Grösse $\frac{\delta_m}{D_m}$ Null zur Grenze oder allgemeiner nicht Unendlich zur Grenze habe.

oder eine grössere Zahl ist, die Grösse

$$\frac{4\,\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u_n' + \frac{4\,R_m'}{D_m}$$

oder auch nur, unter h' den Absolutwerth von h verstanden,

$$\frac{2\,h'}{D_m}\sum_1^{m-1} u_n' + \frac{4\,R_m'}{D_m}$$

sich immer um mehr als eine endliche Grösse unter der Einheit hält, alsdann kann offenbar

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}$$

für $h = \pm 0$ niemals einen bestimmten und endlichen Grenzwerth haben. Vielmehr hat das Verhältniss

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h},$$

sobald das Vorzeichen von α_m nicht von demjenigen von h abhängt, entweder gar keinen Grenzwerth oder auf der einen Seite $+\infty$ und auf der andern $-\infty$ zum Grenzwerth; und wenn das Vorzeichen von α_m von h abhängt, alsdann kann das Verhältniss in gewissen Punkten Unendlich mit demselben Vorzeichen rechts sowohl wie links zum Grenzwerth haben, in unendlich vielen andern Punkten aber muss es (da

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

niemals einen bestimmten und endlichen Grenzwerth haben kann) überhaupt (§ 71) keinem Grenzwerth zustreben, ohne auch nur auf der einen Seite $+\infty$, auf der andern $-\infty$ zum Grenzwerth haben zu können.

---

§ 121. Wir sind hierdurch berechtigt, folgenden Satz aufzustellen: Wenn die Glieder $u_n(x)$ der Reihe $\Sigma u_n(x)$ in dem Intervall (a, b) nicht nur endliche und continuirliche Functionen sind und für jedes n eine bestimmte und endliche erste Derivirte besitzen, sondern auch der Art sind, dass die Summe der Reihe in demselben Intervall eine endliche und continuirliche Function $f(x)$ von x ist, so hat diese Function

trotz ihrer Endlichkeit und Stetigkeit unter gewissen Bedingungen niemals eine bestimmte und endliche Derivirte und diese Derivirte kann höchstens in gewissen Punkten unendlich gross und von bestimmtem Vorzeichen und in unendlich vielen andern Punkten unendlich gross und von unbestimmtem Vorzeichen sein. Diese Bedingungen sind die folgenden:

1. Die Glieder $u_n(x)$ müssen in dem Intervall (a, b) Maxima und Minima besitzen, deren stets endliche Anzahl mit wachsendem n ins Unendliche wächst der Art, dass diese Maxima und Minima von einem passenden Werth von n ab in dem ganzen Intervall (a, b) stets in Abständen aufeinander folgen, die kleiner sind als jede beliebige gegebene Grösse.

2. Wenn δ_m der grösste Abstand zwischen einem Maximum und darauf folgendem Minimum (oder umgekehrt) der $u_m(x)$, und D_m die geringste der verschiedenen Schwankungen ist, die $u_m(x)$ in dem Intervall (a, b) macht, so muss die Grösse $\frac{\delta_m}{D_m}$ für $m = \infty$ Null zum Grenzwerth haben.

3. Das Product

$$\frac{4\,\delta_m}{D_m} \sum_{1}^{m-1} u_n',$$

in welchem die u_n' die Maxima der Absolutwerthe der Derivirten der $u_n(x)$ in dem Intervall (a, b) oder die oberen Grenzen dieser Werthe sind, muss sich bei unbeschränkt wachsendem m immer um eine endliche Grösse unter der Einheit halten. Zu gleicher Zeit muss die Differenz

$$u_m(x' + h) - u_m(x')$$

für alle oder für gewisse Werthe von m, die grösser als eine beliebig grosse gegebene Zahl m' sind und für jedes beliebige x' dasselbe Vorzeichen wie

$$R_m(x' + h) - R_m(x')$$

haben, wenn h so gewählt wird, dass $x' + h$ in den ersten auf x' rechts oder links folgenden Punkt eines

Maximums oder Minimums der $u_m(x)$ fällt, für welche dem Absolutwerth nach

$$u_m(x' + h) - u_m(x') > \frac{D_m}{2}$$

ist. Wenn diese letztere Eigenthümlichkeit nicht vorhanden ist oder wenn man bezüglich ihrer im Ungewissen ist, so muss wenigstens eine *endliche* obere Grenze für die absoluten Werthe von

$$R_m(x' + h) - R_m(x')$$

existiren, welche den verschiedenen Werthen von x' und dem auf die angegebene Art gewählten h entsprechen, und wenn $2R_m'$ dieser obere Grenzwerth oder eine grössere Zahl ist, so muss sich die Grösse

$$\frac{4\,\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u_n' + \frac{4\,R_m}{D_m}$$

numerisch stets um eine endliche Grösse unter der Einheit halten.

In der letzten dieser drei Bedingungen kann man die Grösse

$$\frac{4\,\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u_n'$$

durch die andere

$$\frac{2\,h'}{D_m}\sum_1^{m-1} u_n'$$

ersetzen, in welcher h' den Absolutwerth der Grösse h bedeutet, die oft kleiner als $2\,\delta_m$ gewählt werden kann. Wenn insbesondere das arithmetische Mittel zwischen jedem Maximum und darauf folgendem Minimum der $u_n(x)$ in den Mittelpunkt des diesem Maximum und Minimum entsprechenden Intervalles fällt, so kann man h' immer durch $\frac{3}{2}\delta_m$ ersetzen und daher in der vorstehenden Bedingung statt

$$\frac{4\,\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u_n'$$

auch

$$\frac{3\,\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u_n'$$

schreiben.

In speciellen Fällen ändert sich diese Bedingung manchmal derart, dass sie noch weniger einschränkende Wirkung hat.

§ 122. Ausserdem lässt sich bemerken: Wenn die eben angegebenen Bedingungen erfüllt sind und wenn (wie es zum Beispiel der Fall ist, wenn die Maxima der $u_n(x)$ sämmtlich einander gleich sind und ebenso auch die Minima) das Vorzeichen von

$$u_m(x'+h) - u_m(x'),$$

nachdem h auf die obige Art gewählt worden, nicht von h abhängt, so kann die Derivirte unserer Function $f(x)$ niemals auch nur unendlich gross mit bestimmtem Vorzeichen sein, sondern existirt entweder überhaupt nicht, weil das Verhältniss

$$\frac{f(x'+h) - f(x')}{h}$$

beständig positive und negative Werthe annimmt oder wenigstens sowohl für positive, als für negative h beständig hin und her schwankt, oder kann doch höchstens auf der einen Seite $+\infty$ und auf der andern $-\infty$ sein. Und wenn für jeden Werth von x' solche Werthe von m existiren, für welche α_m oder

$$u_m(x'+h) - u_m(x')$$

positiv ist und andere, für welche diese Grössen bei demselben positiven oder negativen Vorzeichen von h negativ sind, alsdann schwankt das Verhältniss

$$\frac{f(x'+h) - f(x')}{h}$$

bei abnehmendem positivem sowohl als negativem h beständig zwischen beliebig grossen positiven und negativen Grenzen hin und her und die Derivirte der $f(x)$ kann niemals auch nur für unendlich gross mit bestimmtem oder unbestimmtem Vorzeichen gelten, sondern muss als thatsächlich nicht existirend angesehen werden.

§ 123. Wir geben alsbald specielle Beispiele von Functionen, die in Folge der obigen Ausführungen niemals eine bestimmte und endliche Derivirte in einem beliebigen Punkt eines gegebenen Intervalls besitzen.

Zuvor jedoch wollen wir noch ein anderes Theorem von derselben Art, wie der oben aufgestellte Lehrsatz, mittheilen, welches zum Theil in letzterem enthalten ist, zum Theil nicht.

Wir nehmen zu dem Ende an, die Functionen $u_n(x)$, die in der Reihe $\Sigma u_n(x)$ auftreten, genügten nicht nur den im Anfang des § 120 aufgestellten Bedingungen, sondern besässen auch in dem ganzen Intervall (a, b) für jedes n eine endliche und bestimmte zweite Derivirte. Versteht man dann unter Θ_n eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl, welche von n, x' und h abhängt, so ist:

$$\frac{u_n(x'+h)-u_n(x')}{h}=u_n'(x')+\frac{h}{2}u_n''(x'+\Theta_n h)$$

und daher:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}=\sum_1^{m-1}u_n'(x')+\frac{h}{2}\sum_1^{m-1}u_n''(x'+\Theta_n h)+$$
$$+\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{h}+\frac{u_m(x'+h)-u_m(x')}{h}$$

und wenn u_n'' den absoluten Maximalwerth oder die obere Grenze der absoluten Werthe der $u_n''(x)$ in dem Intervall (a, b) bedeutet, so kann man auch setzen:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}=\sum_1^{m-1}u_n'(x')+\eta_m\frac{h}{2}\sum_1^{m-1}u_n''+\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{h}$$
$$+\frac{u_m(x'+h)-u_m(x')}{h},$$

worin η_m eine zwischen -1 und 1 liegende Zahl ist.

Aehnlich erhält man für einen andern Werth h_1 von h:

$$\frac{f(x'+h_1)-f(x')}{h_1}=\sum_1^{m-1}u_n'(x')+\eta_m'\frac{h_1}{2}\sum_1^{m-1}u_n''+$$
$$+\frac{R_m(x'+h_1)-R_m(x')}{h_1}+\frac{u_m(x'+h_1)-u_m(x')}{h_1},$$

worin η_m' eine andere zwischen -1 und 1 gelegene Grösse ist. Es ist daher:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h} - \frac{f(x'+h_1)-f(x')}{h_1} = \eta_m \frac{h}{2}\sum_1^{m-1} u_n'' +$$

$$+ \frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{h} - \eta_m' \frac{h_1}{2}\sum_1^{m-1} u_n'' - \frac{R_m(x'+h_1)-R_m(x')}{h_1}$$

$$+ \frac{u_m(x'+h)-u_m(x')}{h} - \frac{u_m(x'+h_1)-u_m(x')}{h_1}.$$

Man nehme nun an, die Maxima von $u_m(x)$, denen man, wenn x den Weg von a nach b zurücklegt $(a < b)$, nach einander begegnet, seien sämmtlich gleich oder verminderten sich doch wenigstens nicht und die Minima seien andererseits ebenfalls gleich oder wüchsen doch wenigstens nicht.

Wenn man alsdann, wie im § 120, als h einen positiven Werth wählt, für welchen das erste Maximum oder Minimum der $u_m(x)$, welches auf x' folgt, in den Punkt $x'+h$ fällt, als h_1 dagegen den grösseren Werth von h nimmt, für welchen das Minimum oder Maximum, welches auf $x'+h$ folgt, in den Punkt $x'+h_1$ fällt, so ist die Differenz

$$u_m(x'+h_1) - u_m(x')$$

gleich Null oder von entgegengesetztem Vorzeichen, wie die Differenz

$$u_m(x'+h) - u_m(x').$$

Bezeichnet man daher mit D_m' die grösste der Schwankungen, welche $u_m(x)$ in dem Intervall (a, b) macht, so ist:

$$\frac{u_m(x'+h)-u_m(x')}{h} + \frac{u_m(x'+h_1)-u_m(x')}{h_1}$$

$$= \alpha_m\gamma_m \frac{D_m}{2h} + \alpha_m\varepsilon_m \frac{2h}{h_1}\frac{D_m'}{2h} = \alpha_m\gamma_m \frac{D_m}{2h}\left(1 + 2\varepsilon_m' \frac{D_m'}{D_m}\right),$$

worin ε_m und ε_m' positive zwischen 0 und 1 liegende Grössen sind und α_m und γ_m dieselbe Bedeutung, wie in dem vorigen Paragraphen haben. Man kann daher auch schreiben:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}-\frac{f(x'+h_1)-f(x')}{h_1}=\frac{\alpha_m\gamma_m D_m}{2h}\left\{\frac{\alpha_m\eta_m}{\gamma_m}\frac{h^2}{D_m}\sum_1^{m-1}u_n''+\right.$$

$$(1)\qquad +\frac{2\alpha_m}{\gamma_m}\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{D_m}-\frac{\alpha_m\eta_m' hh_1}{D_m\,D_m}\sum_1^{m-1}u_n''-$$

$$\left.-\frac{2\alpha_m}{\gamma_m}\frac{h}{h_1}\cdot\frac{R_m(x'+h_1)-R_m(x')}{D_m}+1+2\varepsilon_m'\frac{D_m'}{D_m}\right\}$$

und da $h<h_1$, so hat man auch:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}-\frac{f(x'+h_1)-f(x')}{h_1}=\frac{\alpha_m\gamma_m D_m}{2h}\left\{\eta_m''\frac{h(h+h_1)}{D_m}\sum_1^{m-1}u_n''\right.$$

$$+2\alpha_m\varepsilon_m''\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{D_m}-2\alpha_m\varepsilon_m'''\frac{R_m(x'+h_1)-R_m(x')}{D_m}$$

$$\left.+1+2\varepsilon_m'\frac{D_m'}{D_m}\right\},$$

worin η_m'' zwischen -1 und 1, ε_m'' und ε_m''' dagegen zwischen 0 und 1 liegende Grössen sind.

Wir wollen nun annehmen, die Maxima und Minima der $u_m(x)$ genügten nicht allein der oben hinsichtlich ihrer Werthe gestellten Bedingung, sondern folgten auch mit solcher Geschwindigkeit aufeinander, dass das Verhältniss $\frac{\delta_m}{D_m}$ mit wachsendem m nur Werthe annimmt, die nicht über eine endliche Zahl hinausgehen und beachten, dass, was wir von positiven h und h_1 gesagt haben, auch für negative h und h_1 gilt. Wenn dann (wie in den in den vorigen Paragraphen betrachteten Fällen) unter dieser Voraussetzung die ausgewählten Werthe von h und h_1 für alle oder für gewisse Werthe von m, die grösser als eine beliebig grosse Zahl sind, den Differenzen

$$R_m(x'+h)-R_m(x')$$

und

$$R_m(x'+h_1)-R_m(x')$$

gleiche Vorzeichen verschaffen, die demjenigen von

$$u_m(x'+h)-u_m(x')$$

oder von α_m entgegengesetzt sind, alsdann genügt es, dass das Product

$$\frac{h(h+h_1)}{D_m}\sum_1^{m-1} u_n''$$

sich um mehr als eine endliche Grösse unter der Einheit halte, damit die Differenz

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h} - \frac{f(x'+h_1)-f(x')}{h_1}$$

ihrem Absolutwerth nach nicht unter eine gewisse Grenze herabsinke. Weil nun $x'+h$ und $x'+h_1$ bei hinreichend grossem m in eine beliebig kleine Umgebung von x' fallen, so genügt es, sich von dem Vorhandensein dieser Verhältnisse zu überzeugen (§ 22), um den Schluss ziehen zu können, dass $f(x)$ in jedem beliebigen Punkt x' keine bestimmte und endliche Derivirte besitzt. Dasselbe ist auch dann der Fall, wenn die eben erwähnten Bedingungen in Bezug auf die Vorzeichen der einen oder der beiden Differenzen

$$R_m(x'+h) - R_m(x')$$

und

$$R_m(x'+h_1) - R_m(x'),$$

nachdem h und h_1 auf die bekannte Art bestimmt worden, nicht erfüllt sind; es muss dann nur eine *endliche* obere Grenze der Absolutwerthe dieser Differenzen für die verschiedenen Werthe von x', h und h_1 existiren, und wenn $2R_m'$ dieser obere Grenzwerth oder eine grössere Zahl ist, so muss sich die Grösse

$$\frac{h(h+h_1)}{D_m}\sum_1^{m-1} u_n'' + 2t\frac{R_m'}{D_m},$$

wenn $t=2$ oder $=4$ ist, um eine endliche Grösse unter der Eins halten. In allen diesen Fällen kann also die Derivirte der $f(x)$, da sie niemals endlich und bestimmt ist, in gewissen Punkten unendlich gross mit bestimmtem Vorzeichen sein, in unendlich vielen andern dagegen muss sie überhaupt nicht existiren oder doch höchstens unendlich gross mit unbestimmtem Vorzeichen sein.

Wir bemerken weiter: Für die Nichtexistenz einer bestimmten und endlichen Derivirten der $f(x)$ genügt es, dass die oben erwähnten Bedingungen in Bezug auf die Grössen

$$\frac{h(h+h_1)}{D_m}\sum_1^{m-1} u_n''$$

oder

$$\frac{h(h+h_1)}{D_m}\sum_1^{m-1} u_n'' + 2l\frac{R_m'}{D_m}$$

erfüllt werden, wenn man in ihnen $2\delta_m$ statt h und $3\delta_m$ statt h_1 setzt; und wenn, wie am Schluss des § 121 gesagt wurde, der Mittelwerth zwischen jedem Maximum und darauf folgendem Minimum der $u_m(x)$ in die Mitte des demselben Maximum und Minimum entsprechenden Intervalls fällt, so kann man $\frac{3}{2}\delta_m$ statt h und $\frac{5}{2}\delta_m$ statt h_1 setzen und auf diese Weise jene Grössen auf

$$\frac{6\delta_m^2}{D_m}\sum_1^{m-1} u_n''$$

und

$$\frac{6\delta_m^2}{D_m}\sum_1^{m-1} u_n'' + 2l\frac{R_m'}{D_m}$$

zurückführen.

Auch hier ändert sich diese Bedingung manchmal derart, dass sie noch weniger einschränkende Wirkung hat.

---

§ 124. Wir geben jetzt einige Anwendungen der gewonnenen Resultate.

Es sei

$$u_n(x) = a_n v_n(b_n x).$$

Dabei sind die a_n solche Constanten, dass die Reihe $\Sigma a_n'$ ihrer Absolutwerthe a' convergent ist, die b_n ferner positive Grössen, die mit n unbeschränkt der Art wachsen, dass das Product $a_n b_n$ für $n = \infty$ zum Grenzwerth nicht Null hat und die $v_n(y)$ sind endliche Functionen der Art, dass ihre Derivirten $v_n'(y)$, $v_n''(y)$ für alle Werthe von y dem Absolutwerth nach niemals eine endliche Grösse A überschreiten und dass ihre Maxima und Minima den Werth 1 und -1 haben und in festen Abständen d_n aufeinander folgen, die für jeden ganz

beliebigen Werth von n stets kleiner als eine gegebene endliche Grösse sind.

Alsdann haben die Functionen $u_n(x)$ ihre Maxima und Minima in Abständen $\frac{d_n}{b_n}$ und nach den Ausführungen der vorigen Paragraphen ist

$$\delta_m = \frac{d_m}{b_m}, \quad D_m = 2a_m'$$

und die Reihe

$$\Sigma u_n(x) = \Sigma a_n v_n(b_n x)$$

ist in jedem beliebigen Intervall gleichmässig convergent und stellt daher eine endliche und continuirliche Function von x für jeden beliebigen Werth von x vor (§ 98).

Für diese Reihe ist ferner

$$| R_m(x') | \leqq R_m',$$

$$| R_m(x' + h) - R_m(x') | \leqq 2R_m',$$

wenn R_m' der Rest $\sum_{m+1}^{\infty} a_n'$ der Reihe $\Sigma a_n'$ ist. Man ist daher nach den vorigen Paragraphen zu der Behauptung berechtigt, dass die Function $\Sigma a_n v_n(b_n x)$ niemals eine bestimmte und endliche Derivirte hat und dass diese Derivirte höchstens unendlich gross, aber immer mit unbestimmtem Vorzeichen (§ 122) jedesmal dann ist, wenn

$$\lim a_m' b_m = \infty$$

und für jeden beliebigen Werth von m und auch in der Grenze für $m = \infty$ die Ungleichung

$$\frac{2Ad_m}{a_m' b_m} \sum_{1}^{m-1} a_n' b_n + \frac{2R_m'}{a_m'} < 1 \tag{2}$$

besteht. Ebenso hat dieselbe Function niemals eine bestimmte und endliche Derivirte, wenn das Product $a_m b_m$ beliebig ist, ohne zum Grenzwerth Null zu haben und wenn ausserdem:

$$\frac{5Ad_m^2}{a_m' b_m^2} \sum_{1}^{m-1} a_n' b_n^2 + \frac{4R_m'}{a_m'} < 1 \tag{3}$$

ist. Wenn die Mittelwerthe zwischen den Maxima und folgenden Minima der $v_n(y)$ in die Mitte des entsprechenden Inter-

valls d_n fallen, so kann man diese Bedingungen durch die folgenden ersetzen:

$$\text{(4)} \qquad \frac{3Ad_m}{2a_m'b_m}\sum_1^{m-1} a_n'b_n + \frac{2R_m'}{a_m'} < 1,$$

$$\text{(5)} \qquad \frac{3Ad_m^2}{a_m'b_m^2}\sum_1^{m-1} a_n'b_n^2 + \frac{4R_m'}{a_m'} < 1.$$

Dabei muss bei Ungleichung (4) das Product $a_m'b_m$ für $m=\infty$ Unendlich zum Grenzwerth haben und kann bei Ungleichung (5) dasselbe Product $a_m'b_m$ beliebig sein, wenn nur sein Grenzwerth, wenn er existirt, von Null verschieden ist. In diesem zweiten Fall kann man sich mit Hülfe der Relation (1) leicht überzeugen, dass die Ungleichung (5) auch auf die weniger beschränkende Bedingung

$$\text{(6)} \qquad \frac{3Ad_m^2}{a_m'b_m^2}\sum_1^{m-1} a_n'b_n^2 + \frac{16}{5}\frac{R_m'}{a_m'} < 1$$

zurückgeführt werden kann.

Da

$$b_{m+s}(x'+h) = \frac{b_{m+s}}{b_m} b_m(x'+h)$$

ist, so bemerken wir schliesslich noch: Wenn von einem gewissen Werth von n an die Grössen d_n constant $= d$ sind und die Verhältnisse $\frac{b_{n+s}}{b_n}$ für $s > 0$ ganze ungerade Zahlen sind und alle Functionen $v_n(x)$ ihre Maxima und Minima in den Punkten

$$0, \pm d, \pm 2d, \pm 3d, \cdots$$

haben, so braucht nur $b_m(x'+h)$ einem Maximum oder Minimum von $v_n(y)$ zu entsprechen, damit auch $b_{m+s}(x'+h)$ einem Maximum bezüglich Minimum von $v_{m+s}(y)$ entspreche. Wenn man alsdann noch voraussetzt, dass die Grössen a_n von einem gewissen Werth von n an sämmtlich positiv sind, so wird die Differenz:

$$R_m(x'+h) - R_m(x') = \sum_{m+1}^{\infty} a_n \left\{ v_n[b_n(x'+h)] - v_n(b_n x') \right\}$$

entweder gleich Null oder hat dasselbe Vorzeichen wie

$$u_m(x'+h)-u_m(x'),$$

während die andere Differenz, welche im § 123 untersucht wurde,

$$R_m(x'+h_1)-R_m(x'),$$

das entgegengesetzte Vorzeichen hat. In dem Fall also, in welchem, wenigstens von einem gewissen Werth von n an, die a_n positiv und die Quotienten $\frac{b_{n+s}}{b_n}$ ganze ungerade Zahlen und die d_n constant und gleich d sind, reduziren sich die Bedingungen (2) und (3) auf die einfacheren:

$$\frac{2Ad}{a_m b_m}\sum_1^{m-1} a_n' b_n < 1, \quad \frac{5Ad^2}{a_m b_m^2}\sum_1^{m-1} a_n' b_n^2 < 1$$

und (4) und (5) auf:

$$\frac{3}{2}\frac{Ad}{a_m b_m}\sum_1^{m-1} a_n' b_n < 1, \quad \frac{3Ad^2}{a_m b_m^2}\sum_1^{m-1} a_n' b_n^2 < 1.$$

Dieselben Bedingungen würden sich auch ergeben, wenn die Maxima und Minima der $v_n(y)$ in die Punkte

$$\pm\frac{1}{2}d,\ \pm\frac{3}{2}d,\ \pm\frac{5}{2}d,\cdots$$

fallen, wenn nur alsdann die Verhältnisse $\frac{b_{n+s}}{b_n}$ nicht allein ganze ungerade Zahlen, sondern auch von der Form $4p_s+1$, unter p_s eine ganze Zahl verstanden, sind.

---

§ **125.** Wir wollen so speciell annehmen, es sei

$$a_n=\pm a^n, \quad b_n=b^n$$

und a positiv und kleiner als 1, b dagegen positiv und grösser als 1. Wenn dann die Functionen $v_n(y)$ ihre Maxima und Minima in den Punkten

$$0,\ \pm d,\ \pm 2d,\ \pm 3d,\cdots$$

haben, die Mittelwerthe der $v_n(y)$ zwischen diesen Maxima und darauf folgenden Minima in den Punkten

$$\pm\frac{1}{2}d,\ \pm\frac{3}{2}d,\ \pm\frac{5}{2}d,\cdots$$

liegen, wenn überdies b eine ganze ungerade Zahl ist, und

$$(7) \qquad ab > 1 + \frac{3}{2}Ad \quad \text{oder} \quad ab^2 > 1 + 3Ad^2$$

ist, wobei im ersten Fall $ab > 1$, im zweiten $ab > 1$ ist, so kann man behaupten, dass die Reihe $\Sigma a^n v_n(b^n x)$ eine endliche und continuirliche Function von x darstellt, welche niemals in irgend einem Punkt eine bestimmte und endliche Derivirte hat und dass diese Derivirte im ersten Fall (7) niemals auch nur unendlich gross mit bestimmtem Vorzeichen sein kann. Unter derselben Voraussetzung ist das Gleiche der Fall, wenn die Maxima und Minima der $v_n(y)$ in den Punkten

$$\pm \frac{1}{2}d, \ \pm \frac{3}{2}d, \ \pm \frac{5}{2}d, \cdots$$

und die Mittelwerthe in den Punkten

$$0, \ \pm d, \ \pm 2d, \ \pm 3d, \cdots$$

liegen und wenn ferner b nicht nur eine ungerade Zahl, sondern auch von der Form $4p + 1$ ist.

Beachtet man dann, dass, wenn

$$a_n = \pm a^n, \quad R_m' = \frac{a^{m+1}}{1 - a}$$

ist, so kann man auch behaupten: Im Fall eines positiven aber beliebigen b, wie auch falls bei ungeradem b die Maxima und Minima der $v_n(y)$ nicht in den Punkten

$$0, \ \pm d, \ \pm 2d, \cdots$$

oder in den Punkten

$$\pm \frac{1}{2}d, \ \pm \frac{3}{2}d, \ \pm \frac{5}{2}d \cdots$$

liegen oder wenn man sich überhaupt nicht in einem der vorigen Fälle befindet, so stellt die Reihe $\Sigma \pm a^n v_n(b^n x)$ immer noch eine Function von x dar, die, obgleich stets endlich und continuirlich, niemals eine bestimmte und endliche Derivirte hat, sobald die eine oder die andere der folgenden Bedingungen:

$$(8) \qquad \frac{2Ad}{ab - 1} + \frac{2a}{1 - a} < 1, \quad \frac{5Ad^2}{ab^2 - 1} + \frac{4a}{1 - a} < 1$$

erfüllt ist, wobei in der ersten $ab > 1$, in der zweiten $ab > 1$ ist. Wenn die bekannten Mittelwerthe von $v_n(y)$ in die Mittelpunkte der zwischen einem Maximum und darauf folgendem

Minimum liegenden Intervalle fallen, dann kann man diese Bedingungen auch durch die Ungleichungen:

$$\frac{3}{2}\frac{Ad}{ab-1}+\frac{2a}{1-a}<1, \quad \frac{3Ad^2}{ab^2-1}+\frac{16}{5}\frac{a}{1-a}<1 \qquad (9)$$

ersetzen. Wenn ferner die erste dieser beiden letzten Bedingungen oder die erste der vorigen (8) erfüllt ist, so kann man auch behaupten, dass unsere Reihe niemals auch nur eine unendlich grosse Derivirte mit bestimmtem Vorzeichen in irgend einem Punkt haben kann.

Dabei lässt sich noch bemerken, dass offenbar nach den Bedingungen (7), weil $a<1$ ist,

$$b>1+\frac{3}{2}Ad \quad \text{oder} \quad b^2>1+3Ad^2$$

und nach den ersten der Bedingungen (8) oder (9) $a<\frac{1}{3}$ sein muss, während nach der zweiten in (8) $a<\frac{1}{5}$, nach der zweiten in (9) dagegen $a<\frac{5}{21}$ sein muss.

§ 126. Setzt man noch specieller $v_n(y)=\cos y$ oder $v_n(y)=\sin y$, so ergiebt sich die schon von Weierstrass[1]) untersuchte Reihe $\Sigma a^n \cos b^n x$. Diese Function von x hat, obgleich sie stets endlich und continuirlich ist, niemals eine bestimmte und endliche Derivirte, sobald b eine ungerade ganze Zahl ist und

$$ab>1+\frac{3}{2}\pi \quad \text{oder} \quad ab^2>1+3\pi^2,$$

wobei im ersten Fall $ab>1$ und im zweiten $ab\geqq 1$ ist. Das Gleiche gilt unter derselben Voraussetzung für die Reihe $\Sigma a^n \sin b^n x$, wenn b nicht nur eine ungerade Zahl, sondern auch von der Form $4p+1$ ist. Ueberdies kann die Derivirte unserer Function in dem ersten dieser Fälle (das heisst, wenn $ab>1+\frac{3}{2}\pi$ ist) niemals auch nur eine unendlich grosse Derivirte von bestimmtem Vorzeichen haben, sondern muss in jedem Punkt entweder unendlich gross mit unbestimmtem Vorzeichen sein oder überhaupt nicht existiren.

1) Journ. f. Math. Bd. 79 S. 29.

Auch wenn keine dieser Voraussetzungen zutrifft, haben die Reihen

$$\Sigma \pm a^n \cos b^n x, \quad \Sigma \pm a^n \sin b^n x,$$

obwohl sie endliche und continuirliche Functionen von x darstellen, doch jedesmal dann niemals eine bestimmte und endliche Derivirte, wenn

$$\frac{3\pi}{2(ab-1)} + \frac{2a}{1-a} < 1, \quad \text{oder} \quad b > \frac{1}{a}\left[1 + \frac{3\pi}{2}\,\frac{1-a}{1-3a}\right] \quad \text{und} \quad ab > 1$$

oder:

$$\frac{3\pi^2}{ab^2-1} + \frac{16}{5}\,\frac{a}{1-a} < 1, \quad \text{oder} \quad b > \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{1 + 15\pi^2\,\frac{1-a}{5-21a}}$$

$$\text{und} \quad ab > 1$$

ist, was bedingt, dass im ersten Fall $a < \frac{1}{3}$, im zweiten dagegen $a < \frac{5}{21}$ sei.

Setzt man noch specieller zum Beispiel

$$b = 7 \quad \text{und} \quad a > \frac{1}{7}\left(1 + \frac{3}{2}\pi\right),$$

das heisst $a > 0{,}82$ oder setzt man $b = 9$ und das dazu gehörige

$$a > \frac{1}{9}\left(1 + \frac{3}{2}\pi\right),$$

das heisst $a \geqq 0{,}64$, so liefern die Reihen

$$\sum_1^\infty a^n \cos 7^n x, \quad \sum_1^\infty a^n \cos 9^n x, \quad \sum_1^\infty a^n \sin 9^n x$$

Functionen von x, die, obgleich stets endlich und continuirlich, niemals eine bestimmte und endliche oder unendlich grosse Derivirte mit bestimmtem Vorzeichen haben.

Man setze $b = 31$ oder $= 33$ und $a = \frac{1}{b}$. Weil alsdann der Bedingung $ab^2 > 1 + 3\pi^2$ und $ab = 1$ genügt ist, so folgt, dass die Reihen

$$\sum \frac{1}{31^n}\cos(31^n x), \quad \sum \frac{1}{33^n}\cos(33^n x), \quad \sum \frac{1}{33^n}\sin(33^n x)\cdots$$

niemals eine bestimmte und endliche Derivirte haben etc.[1])

---

1) Vgl. auch Wiener, Journ. f. Math. Bd. 90 S. 221.

Aehnliche Bedingungen müssten erfüllt sein, wenn für die Functionen

$$\sum a_n \cos^{2p_n+1} b_n x, \qquad \sum a_n \sin^{2p_n+1} b_n x,$$
$$\sum a_n \left[\sin\operatorname{am}(b_n x)\right]^{2p_n+1}, \quad \sum a^n \left[\cos\operatorname{am}(b_n x)\right]^{2p_n+1},$$

worin der Modul der elliptischen Functionen reell und kleiner als 1 ist, keine Derivirten existiren sollen etc.

---

§ 127. Wir kehren jetzt zur Untersuchung der allgemeinen Reihe $\Sigma a_n v_n(b_n x)$ zurück, beschränken uns aber der Einfachheit wegen auf den Fall, dass die a_n sämmtlich positiv sind, die Maxima und Minima der $v_n(y)$ in die Punkte

$$0, \pm d, \pm 2d, \cdots$$

oder in die Punkte

$$\pm \tfrac{1}{2}d, \pm \tfrac{3}{2}d, \pm \tfrac{5}{2}d, \cdots$$

und die bekannten Mittelwerthe in die Punkte

$$\pm \tfrac{1}{2}d, \pm \tfrac{3}{2}d, \cdots$$

oder in die Punkte

$$0, \pm d, \pm 2d, \cdots$$

fallen und die Verhältnisse $\frac{b_{n+s}}{b_n}$ von einem gewissen Werth von n an aufwärts beliebige ungerade Zahlen oder von der Form $4p_s + 1$ sind.

Wenn alsdann unter der Voraussetzung, dass $q = 1$ oder $= 2$ ist,

$$\frac{\sum_1^{m-1} a_n b_n^q}{a_m b_m^q} = \frac{1}{c_m}$$

gesetzt wird und dabei von einem gewissen Werth von m an c_m für $q = 1$ grösser als $\frac{3}{2}Ad$ und für $q = 2$ grösser als $3Ad^2$ wird, so hat die Function $\Sigma a_n v_n(b_n x)$ für $q = 2$ niemals eine bestimmte und endliche Derivirte und diese letztere ist für $q = 1$ nicht nur niemals bestimmt und endlich, son-

dern kann nicht einmal unendlich gross mit bestimmtem Vorzeichen sein.

Man hat nun aus der obigen Gleichung, wenn $m > 2$:

$$a_1 b_1^q + a_2 b_2^q + \cdots + a_{m-2} b_{m-2}^q + a_{m-1} b_{m-1}^q = \frac{a_m b_m^q}{c_m}$$

$$a_1 b_1^q + a_2 b_2^q + \cdots + a_{m-2} b_{m-2}^q = \frac{a_{m-1} b_{m-1}^q}{c_{m-1}}$$

und deshalb:

$$a_{m-1} b_{m-1}^q \left(1 + \frac{1}{c_{m-1}}\right) = \frac{a_m b_m^q}{c_m}$$

und daraus erhält man, wenn man m mit $m-1$, $m-2, \ldots 2$ vertauscht und dann multiplicirt, die folgende Gleichung:

$$(10) \qquad a_m b_m^q = (1 + c_1)(1 + c_2) \cdots (1 + c_{m-1}) \frac{c_m}{c_1} a_1 b_1^q,$$

die auch für $m = 1$ Geltung hat, wenn man statt des Productes

$$(1 + c_1)(1 + c_2) \cdots (1 + c_{m-1})$$

die Einheit setzt.

Da man aber aus der vorletzten Gleichung erhält:

$$\frac{a_m}{a_{m-1}} = \left(c_m + \frac{c_m}{c_{m-1}}\right) \frac{b_{m-1}^q}{b_m^q},$$

so darf man sich bei der Auswahl der c_m und b_m keine so grosse Willkür gestatten, dass dadurch die Grösse

$$\left(c_m + \frac{c_m}{c_{m-1}}\right) \frac{b_{m-1}^q}{b_m^q}$$

einen grösseren Grenzwerth als die Einheit für $m = \infty$ erhielte, weil sonst die Reihe Σa_n divergent würde. Wir wollen, um keinen Zweifel über die Convergenz dieser Reihe aufkommen zu lassen, ohne Weiteres annehmen, dass für alle Werthe von m und auch in der Grenze für $m = \infty$

$$c_m + \frac{c_m}{c_{m-1}} < \frac{b_m^q}{b_{m-1}^q}$$

sein muss. Dies bedingt, dass für alle Werthe von m und auch in der Grenze $\frac{b_m}{b_{m-1}}$ grösser als $\frac{3}{2} A d$ oder andererseits das Verhältniss $\frac{b_m^2}{b_{m-1}^2}$ grösser als $3 A d^2$ sein muss.

Nehmen wir jetzt an, die c_n seien gegeben und grösser als $\frac{3}{2}Ad$ oder $3Ad^2$ und seien stets endlich, so ist es immer möglich, die b_n derart zu bestimmen, dass die obige Bedingung erfüllt wird und dass von einem bestimmtem Werth von n an aufwärts die Verhältnisse $\frac{b_{n+s}}{b_n}$ für ganzzahlige s beliebige ganze ungerade Zahlen oder auch von der Form $4p_s+1$ sind. Alsdann sind vermöge der Gleichung (10) auch die Werthe a_n bestimmt und nur, falls $q=2$ ist, muss man noch dafür Sorge tragen, dass $\lim a_n b_n$ nicht gleich Null wird. Wenn statt dessen die b_n gegeben sind und diese mit n unbeschränkt in der Art wachsen, dass $\frac{b_m}{b_{m-1}}$ hinreichend grösser als $\frac{3}{2}Ad$ oder $\frac{b_m^{\,2}}{b_{m-1}^2}$ hinreichend grösser als $3Ad^2$ ist, so kann man stets die c_m so wählen, dass die obige Bedingung erfüllt ist und damit sind auch die a_n vermöge (10) bestimmt und nur wenn $q=2$, muss man noch dafür sorgen, dass $\lim a_n b_n$ nicht gleich Null wird. Auf solche Art kann man also leicht unendlich viele sehr einfache Reihen $\Sigma a_n v_n(b_n x)$ bilden, die, obwohl sie immer endlich und stetig sind, niemals eine bestimmte endliche Derivirte haben.

---

§ 128. Setzt man beispielsweise die c_n als constant und gleich $\frac{3}{2}\gamma Ad$ oder $3\gamma Ad^2$ $(\gamma>1)$ voraus, so kann man

$$b_n=(2p_1+1)(2p_2+1)\cdots(2p_n+1)$$

nehmen, wenn nur von einem gewissen Werth von n an aufwärts im ersten Fall

$$p_n>\frac{3}{4}\gamma Ad$$

und im zweiten

$$2p_n+1>\sqrt{1+3\gamma Ad^2}$$

ist, und weil man in diesen Fällen aus Gleichung (10) erhält

$$(11)\qquad a_n=\frac{k\left(1+\frac{3\gamma}{2}Ad\right)^n}{(2p_1+1)(2p_2+1)\cdots(2p_n+1)}$$

$$a_n=\frac{k(1+3\gamma Ad^2)^n}{(2p_1+1)^2(2p_2+1)^2\cdots(2p_n+1)^2},$$

unter k eine Constante verstanden, so zieht man den Schluss: Wenn die Maxima und Minima von $v_n(y)$ in den Punkten

$$0, \pm d, \pm 2d, \ldots$$

und die bekannten Mittelwerthe in den Punkten

$$\pm \frac{1}{2}d, \pm \frac{3}{2}d, \ldots$$

liegen, wenn ferner in der Reihe $\Sigma a_n v_n(b_n x)$ a_n und b_n die angegebenen Werthe (11) haben und von einem gewissen Werth von n an aufwärts im ersten Fall

$$p_n > \frac{3}{4}\gamma A d$$

und im zweiten

$$2p_n + 1 > \sqrt{1 + 3\gamma A d^2}$$

ist und

$$\lim \frac{(1 + 3\gamma A d^2)^n}{(2p_1 + 1)(2p_2 + 1) \cdots (2p_n + 1)} > 0,$$

so stellt diese Reihe $\Sigma a_n v_n(b_n x)$ eine Function von x dar, die niemals eine bestimmte und endliche Derivirte hat, obwohl sie stets endlich und stetig ist, und welche im ersten Fall nicht einmal eine unendlich grosse Derivirte mit bestimmtem Vorzeichen haben kann.

Dasselbe ist auch der Fall, wenn die Maxima und Minima der $v_n(y)$ in den Punkten

$$\pm \frac{1}{2}d, \pm \frac{3}{2}d, \pm \frac{5}{2}d, \ldots$$

und die bekannten Mittelwerthe in den Punkten

$$0, \pm d, \pm 2d, \ldots$$

liegen, wenn dann nur die p_n von einem gewissen Werth von n an aufwärts gerade Zahlen sind.

---

§ 129. Nimmt man wieder

$$v_n(y) = \cos y \quad \text{oder} \quad v_n(y) = \sin y,$$

so reduciren sich diese Reihen auf die beiden

$$\Sigma a_n \cos b_n x \quad \text{und} \quad \Sigma a_n \sin b_n x,$$

welche, wenn a_n und b_n den eben besprochenen Bedingungen genügen, niemals eine bestimmte und endliche Derivirte haben.

Setzt man speciell

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \ldots p_n = n,$$

so findet man, dass die Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \cos [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)x],$$

in welcher

$$\alpha > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

ist, eine solche Function von x ist, welche niemals eine bestimmte und endliche Derivirte hat, obgleich sie immer endlich und stetig ist.

Dasselbe ist der Fall bei der Reihe:

$$\sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n+1)} \sin [1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n+1)x],$$

in welcher $\alpha > 1 + \frac{3}{2}\pi$ etc.[1])

Elftes Kapitel.

Weitere allgemeine Untersuchungen über Zuwachsverhältnisse und Derivirte.

§ 130. Die seitherigen Untersuchungen über die Derivirten endlicher und stetiger Functionen in einem gegebenen Intervall lassen sich auf die folgende Art noch erweitern.

$f(x)$ sei eine endliche und stetige Function von x in einem ganzen Intervall (a, b) (die Endpunkte eingeschlossen), in welchem sie stets eine bestimmte und endliche Derivirte $f'(x)$ besitzt. Gehört ein Punkt im Innern dieses Intervalls einem Invariabilitätszug der $f(x)$ an oder hat die Function in einem solchen Punkt ein Maximum oder Minimum, so muss ihre Derivirte $f'(x)$ in diesem Punkt (weil sie bestimmt und endlich

1) Die allgemeinen Untersuchungen, die in den §§ 119—125 gegeben sind, rühren von Dini her (Annali di Mat. Ser. 2. Bd. 8 S. 121). Vgl. auch Darboux' S. 107 der oben a. Abh. u. Ann. Ec. Norm. Sér. 2. Bd. 8 S. 195; Lerch, Journ. f. Math. Bd. 103 S. 126.

ist) gleich Null sein. Wenn deshalb die Function $f(x)$ in jedem beliebigen Theil des Intervalls (a, b), ohne immer constant zu sein, immer Invariabilitätszüge oder Maxima und Minima hat, so muss ihre Derivirte $f'(x)$ in unendlich vielen Punkten eines jeden noch so kleinen Theiles desselben Intervalls Null sein. Daraus folgt (§ 45): Wenn die Derivirte $f'(x)$ einer solchen Function $f(x)$ nicht nur in dem ganzen Intervall bestimmt und endlich ist, sondern auch in einem Punkt x' continuirlich ist, so muss sie auch in diesem Punkt gleich Null sein, und wenn sie in dem ganzen Intervall continuirlich ist, so ist sie stets $= 0$ und $f(x)$ ist alsdann stets constant. Man kann also offenbar behaupten:

1. Wenn eine Function $f(x)$, ohne immer constant zu sein, Invariabilitätszüge oder Maxima und Minima in einem Intervall hat, in welchem $f(x)$ eine stets endliche und stetige Derivirte besitzt, so müssen in jedem beliebigen Theil des Intervalls, welcher nicht einem Invariabilitätszug entspricht, Gebiete vorhanden sein, in denen die Function keine Schwankungen macht und stets zunimmt oder stets abnimmt.

2. Wenn eine Function $f(x)$ in jedem beliebigen Theil eines Intervalls (a, b), in dem sie nicht stets constant ist, stets Invariabilitätszüge oder Maxima und Minima hat, so kann ihre Derivirte nicht in jedem Punkt bestimmt und endlich sein, es sei denn, sie wäre unendlich oft discontinuirlich (§ 26); und diese Unstetigkeiten der Derivirten $f'(x)$ müssen alsdann (§ 78) sämmtlich von der zweiten Art sein und in den Punkten, in denen diese Derivirte continuirlich ist, muss sie gleich Null sein.

Daraus kann man dann auch offenbar schliessen, dass bei endlichen und stetigen Functionen, die in einem gegebenen Intervall nicht immer denselben Werth, sondern in jedem beliebigen Theil dieses Intervalls stets Invariabilitätszüge oder Maxima und Minima haben, niemals von einer zweiten Derivirten, in den meisten Fällen sogar nicht einmal von einer ersten Derivirten die Rede sein kann. Daher kann man bei solchen Functionen niemals die Differenzialrechnung anwenden,

wenigstens dann nicht, wenn man Ableitungen von einer höheren Ordnung als der ersten in Betracht ziehen will.

---

§ 131. Es sei nun $f(x)$ eine Function von x, die in einem ganzen Intervall (a, b) (die Enden eingeschlossen) endlich und stetig ist, und in den Punkten dieses Intervalls eine Derivirte besitzt, die numerisch kleiner als eine gegebene positive Zahl A ist, oder die wenigstens von der Beschaffenheit ist, dass das Verhältniss

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

für jeden Punkt x mit unbeschränkt durch positive oder negative Werthe hindurch abnehmendem h sich schliesslich numerisch immer kleiner als eine gegebene positive Zahl A hält, obwohl dieses Verhältniss nicht irgend einem bestimmten Grenzwerth zuzustreben braucht[1]).

Diese Function $f(x)$ kann in der Nähe gewisser Punkte oder in dem ganzen Intervall (a, b) unendlich viele Maxima und Minima haben oder Invariabilitätszüge aufweisen. Unter allen Umständen aber kann man aus ihr stets eine andere Function ableiten, bei welcher keine Schwankungen oder Invariabilitätszüge auftreten, während die Eigenthümlichkeiten in Bezug auf die Derivirte oder das Verhältniss

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

dieselben bleiben.

Man bilde in der That die Function

$$F(x) = \mp f(x) + A\varphi(x)$$

und es sei darin $\varphi(x)$ die Function ersten Grades $x + \frac{B}{A}$ (mit constantem B) oder allgemeiner eine zwischen a und b liegende Function von x, die, wenn zum Beispiel $a < b$ ist,

---

1) Hierher gehören offenbar auch die Functionen, bei denen das Intervall (a, b) sich in solche Unterabtheilungen zerlegen lässt, dass in jedem in diesen gelegenen Theilintervall das Verhältniss der Schwankung der Function zu dem entsprechenden Intervall stets kleiner als eine endliche Zahl ist.

nicht nur stets endlich und stetig ist, sondern auch immer von a bis b wächst und immer eine positive und nicht unter die Einheit sinkende Derivirte besitzt, oder die wenigstens von der Beschaffenheit ist, dass das Verhältniss

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

für alle Werthe von x zwischen a und b, wenn h durch positive oder durch negative Werthe hindurch der Null zustrebt, schliesslich niemals kleiner als die positive Einheit wird.

Man hat bezüglich der Function $F(x)$

$$\frac{F(x\pm h)-F(x)}{\pm h}=\pm\frac{f(x\pm h)-f(x)}{\pm h}+A\frac{\varphi(x\pm h)-\varphi(x)}{\pm h}$$

und daher für jeden Werth von x zwischen a und b, wenn h positiv und hinreichend klein ist, offenbar stets:

$$F(x+h)-F(x)>0,\; F(x-h)-F(x)<0.$$

Deshalb kann diese Function $F(x)$ im Innern des Intervalls (a, b) keine Invariabilitätszüge oder Maxima und Minima haben und wächst zwischen a und b somit stets.

Ebenso findet man, dass die Function

$$\pm f(x)-A\varphi(x)$$

zwischen a und b stets abnimmt. Beachtet man dann noch, dass, wenn man

$$F_1(x)=f(x)+A\varphi(x),\; F_2(x)=-f(x)+A\varphi(x),$$
$$F_3(x)=f(x)-A\varphi(x),\; F_4(x)=-f(x)-A\varphi(x)$$

setzt, auch

$$f(x)=\frac{F_1+F_3}{2}=-\frac{F_2+F_4}{2}=\frac{F_1-F_2}{2}=\frac{F_3-F_4}{2}$$

und

$$f(x)=F_1(x)-A\varphi(x),\; \ldots .$$

ist, so folgt daraus ohne Weiteres: Wenn $f(x)$ eine Function von x ist, die in einem ganzen Intervall (a, b) endlich und stetig ist und in demselben stets eine bestimmte und numerisch unter einer endlichen Zahl A bleibende Derivirte hat, oder die doch wenigstens von der Beschaffenheit ist, dass das Verhältniss

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

für jeden Werth von x, wenn h durch positive oder durch negative Werthe hindurch abnimmt, sich schliesslich numerisch immer unter einer gegebenen endlichen Zahl A hält, obwohl dieses Verhältniss nicht irgend einem bestimmten Grenzwerth zuzustreben braucht, so lässt sich sagen: Auch wenn diese Function in der Nähe specieller Punkte oder in dem ganzen Intervall (a, b) Maxima oder Minima hat oder Invariabilitätszüge aufweist, so kann man doch stets dadurch, dass man, wenn man will, ihr Vorzeichen ändert und die Function ersten Grades

$$\pm Ax + B,$$

oder auch eine allgemeinere auf obige Art bestimmte Function

$$\pm A\varphi(x)$$

zu ihr addirt, eine Function

$$F(x) = + f(x) + A\varphi(x)$$

bilden, welche zwischen a und b keine Schwankungen mehr macht und entweder stets wächst oder stets abnimmt. In diesem Fall kann die gegebene Function $f(x)$, auch wenn sie, wie gesagt, unendlich viele Invariabilitätszüge oder unendlich viele Maxima und Minima aufweist, immer als die Summe zweier Functionen betrachtet werden, von denen die eine immer wächst und die andere immer abnimmt, oder als die Differenz zweier Functionen, welche beide wachsen oder beide abnehmen.

§ 132. Die stets wachsende Function $\varphi(x)$, welche mit der positiven Constanten A multiplicirt und zu $f(x)$ addirt oder von $f(x)$ abgezogen wird, damit letztere ihre Maxima und Minima oder ihre Invariabilitätszüge verliert, und welche so mit $f(x)$ eine Function $F(x)$ bildet, die zwischen a und b keine Schwankungen hat und stets wächst oder stets abnimmt, kann, wie gesagt, eine Function ersten Grades oder allgemeiner eine Function sein, welche eine bestimmte, stets endliche Derivirte hat, die nicht kleiner als die Einheit ist.

Alsdann verhält sich die neue Function:

$$F(x) = \pm f(x) \pm A\varphi(x)$$

in Bezug auf die Derivirte so wie die ursprüngliche Function $f(x)$, und das Verhältniss

$$\frac{F(x \pm h) - F(x)}{\pm h}$$

liegt immer zwischen zwei Zahlen α und β, die entweder beide positiv oder beide negativ und von Null verschieden sind. Geht man also, wie schon oben erwähnt, von einer Function $f(x)$ aus, welche in Bezug auf das Verhältniss

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

die genannten Eigenschaften besitzt, nämlich, dass ihr in allen oder gewissen Punkten des Intervalls (a, b) die Derivirte fehlt und dass sie Invariabilitätszüge oder in der Nähe gewisser specieller Punkte oder in dem ganzen Intervall Maxima oder Minima hat, so kann man immer eine Function

$$\pm f(x) \pm Ax$$

oder allgemeiner

$$\pm f(x) \pm A\varphi(x)$$

bilden, welche keine Schwankungen macht und immer wächst oder immer abnimmt und nur in den nämlichen Punkten wieder keine Derivirte besitzt.

Nimmt man also speciell die aus den Beispielen 1 und 2 des § 116 bekannten Functionen

$$f_1(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s} \sqrt{\sin^2 nx\pi}\,,\ f_2(x) = \sum_1^\infty \frac{\sin nx\pi \sin [\log \sin^2 nx\pi]}{n^s}$$

als $f(x)$, so kann man behaupten: Wenn A eine positive hinreichend grosse Constante ist, so machen die aus $f_1(x)$ und $f_2(x)$ abgeleiteten Functionen

$$\pm f_1(x) \pm Ax,\ \pm f_2(x) \pm Ax$$

keine Schwankungen, wachsen stets oder nehmen stets ab und entbehren wieder in allen rationalen Punkten die Derivirte und zwar in der Art, dass bei der ersten Function die Derivirten rechts und links von den einzelnen Rationalpunkten existiren, aber von einander verschieden sind, während bei der zweiten sowohl die Derivirten rechts als die links thatsächlich nicht vorhanden sind.

Bezeichnet man mit

$$i_1, \; i_2, \; \ldots \; i_m$$

Irrationalzahlen, deren Verhältnisse zu einander wieder irrational sind und stellen

$$a_0, \; a_1, \; a_2, \; \ldots \; a_m \quad \text{und} \quad b_0, \; b_1 \; \ldots \; b_m$$

von Null verschiedene Constanten vor und ist A eine weitere positive und hinreichend grosse Constante, so wachsen die Functionen:

$$F(x) = a_0 f_1(x) + a_1 f_1\left(\frac{x}{i_1}\right) + a_2 f_1\left(\frac{x}{i_2}\right) + \cdots + a_m f_1\left(\frac{x}{i_m}\right) \pm Ax$$

$$F(x) = b_0 f_2(x) + b_1 f_2\left(\frac{x}{i_1}\right) + b_2 f_2\left(\frac{x}{i_2}\right) + \cdots + b_m f_2\left(\frac{x}{i_m}\right) \pm Ax$$

stets oder nehmen stets ab und besitzen in allen Rationalpunkten, sowie in denjenigen Irrationalpunkten keine Derivirte, die bei beliebigem rationalem α Werthen von x von der Form:

$$x = i_1 \alpha, \quad x = i_2 \alpha, \quad \ldots \; x = i_m \alpha$$

entsprechen. Daraus geht denn klar hervor, dass das Fehlen der Derivirten bei gewissen Functionen selbst in einer unendlich grossen Anzahl von Punkten jedes beliebigen noch so kleinen Intervalls nicht, wenigstens nicht in allen Fällen, dem Vorhandensein unendlich vieler Maxima und Minima oder unendlich vieler Invariabilitätszüge in diesen Functionen zugeschrieben werden kann[1]).

Es wäre noch zu bemerken: Wenn man als $\varphi(x)$ eine Function nimmt, für welche das Verhältniss

$$\frac{\varphi(x+h) - (x)}{h},$$

wenn h durch positive oder negative Werthe hindurch kleiner wird, sich stets über der positiven Einheit oder sich derselben gleich hält und wenigstens für gewisse Werthe von x schliesslich auch beliebig grosse positive Werthe annimmt, alsdann wächst die

---

1) Köpke (Math. Ann. Bd. 29 S. 123, Bd. 34 S. 162 und Bd. 35 S. 104) construirt eine Function, die in einem jeden Intervalle Maxima und Minima und doch eine Ableitung für jeden Punkt hat.

$$F(x) = \pm f(x) \pm A\varphi(x)$$

wieder stets oder nimmt stets ab, und das Verhältniss

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

schwankt wenigstens für gewisse Werthe von x bei kleiner werdendem h zwischen 0 und ∞, bezüglich zwischen 0 und $-\infty$ hin und her.

§ 133. Wir wollen nun voraussetzen, unsere Function $f(x)$ hielte sich in dem Intervall (a, b) wieder endlich und continuirlich und sei der Art, dass das Verhältniss

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

wenigstens für gewisse Werthe von x zwischen a und b, wenn h durch positive oder negative Werthe hindurch, zum Beispiel durch positive, kleiner wird, schliesslich auch Werthe annehmen kann, die grösser als beliebig grosse gegebene Grössen sind. Wenn dies aber der Fall ist, so seien die Vorzeichen dieser grössten Werthe für jeden der Werthe von x (in endlicher oder unendlich grosser Anzahl), für welche sich diese Eigenschaft zeigt, stets dieselben und zwar derart, dass alsdann das Verhältniss

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

für jeden Werth von x zwischen a und b bei abnehmendem positivem h schliesslich nur zwischen c und $+\infty$ oder zwischen c und $-\infty$ liegen könne, wenn man unter c eine endliche positive oder negative Zahl versteht. (Diese Bedingungen erfordern übrigens keineswegs, dass für gewisse Werthe von x nothwendiger Weise

$$\lim_{h=+0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = +\infty \text{ oder } = -\infty$$

sein muss.)

Nimmt man alsdann zunächst an, für alle Werthe von x zwischen a und b befände sich das Verhältniss

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

wenn h sich unbeschränkt durch die positiven Werthe hindurch der Null nähert, schliesslich stets zwischen c und β, unter c eine endliche und positive Zahl verstanden und unter β eine andere ebenfalls positive Zahl, die aber $+\infty$ sein kann, so muss für jeden Punkt x innerhalb des Intervalls (a, b) und für $x = a$ bei hinreichend kleinem positiven h stets

$$f(x+h) - f(x) > 0$$

sein. Daraus ist ersichtlich, dass die Function $f(x)$ in den Punkten innerhalb des Intervalls (a, b) keine Invariabilitätszüge oder Maxima, ja nicht einmal Minima haben kann, weil sie sonst, hätte sie zum Beispiel in einem inneren Punkt α ein Minimum, in einem andern Punkt α_1 innerhalb des Intervalls (a, α) ein Maximum haben müsste, was nicht möglich ist. Die Function $f(x)$ wächst daher in dem vorliegenden Fall stets zwischen a und b, und das Verhältniss

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

liegt auch für negative h zwischen c und β oder wenigstens zwischen 0 und ∞.

Ist dagegen c negativ, während β noch positiv bleibt und $+\infty$ sein kann, so hat die Function $f(x)$ zwischen a und b Maxima und Minima und kann auch Invariabilitätszüge besitzen. Bezeichnet man dann mit A eine positive Zahl, die grösser als der Absolutwerth von c ist und betrachtet die Function

$$F(x) = f(x) + A\,\varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ auf die in den beiden vorigen Paragraphen angegebene Art ausgewählt worden ist, so kommt man wieder auf den eben besprochenen Fall zurück. Diese Function $F(x)$ wächst also auch stets, und wenn man A hinreichend gross wählt, so liegt das entsprechende Verhältniss

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

für die verschiedenen Werthe von x bei kleiner werdendem positivem sowohl als negativem h stets zwischen α und β', wenn α von Null verschieden und positiv und β' positiv ist und auch $+\infty$ sein kann.

Wenn aber β negativ ist und auch $-\infty$ sein kann und c positiv oder negativ, aber endlich und grösser als β ist, so nimmt die Function $f(x)$ entweder von vorn herein stets ab, oder sie wird doch eine solche abnehmende Function, wenn man sie dadurch, dass man die bekannte Function $\varphi(x)$ von ihr abzieht, auf die $F(x)$ reducirt. Setzt man von jetzt an $\varphi(x)$ stets

$$= x + \frac{B}{A}$$

oder wählt man $\varphi(x)$ wenigstens so, dass sie zwischen a und b stets eine bestimmte und endliche Derivirte hat, die positiv ist und nicht kleiner als die Einheit und beachtet, dass immer dann und nur dann die Function $F(x)$ eine Derivirte hat, wenn $f(x)$ sie hat und umgekehrt, so kann man jetzt behaupten: In denjenigen Fällen, in denen das Verhältniss

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

wenn man es in Betracht zieht, während h durch stets positive Werthe (oder stets negative) der Null zustrebt, für alle Werthe von x zwischen a und b sich stets zwischen zwei Grenzwerthen hält, von denen wenigstens der eine endlich ist, lässt die Function $f(x)$, falls sie zwischen a und b Schwankungen oder Invariabilitätszüge hat, immer eine andere Function

$$F(x) = f(x) + A\,\varphi(x)$$

zu, welche immer wächst oder immer abnimmt und immer dann und nur dann eine Derivirte hat, wenn $f(x)$ sie hat und umgekehrt. Für diese Function $F(x)$ variirt das Verhältniss

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

für die verschiedenen Werthe von x, wenn h sowohl durch die positiven, als durch die negativen Werthe hindurch kleiner wird, nur zwischen α und β, oder zwischen $-\alpha$ und $-\beta$, vorausgesetzt dass man unter α und β positive, von Null verschiedene Grössen versteht, von denen die zweite auch unendlich gross sein kann.

Wenn umgekehrt eine endliche und continuirliche Function $f(x)$ in einem gegebenen Intervall (a, b) keine Maxima oder

Minima hat oder sie doch sämmtlich verliert, wenn gewisse lineare Functionen $Ax + B$ (oder allgemeiner Functionen von der Form $A\varphi(x)$, worin A eine positive hinreichend grosse Zahl ist und $\varphi(x)$ auf die mehrfach angegebene Art ausgewählt ist) ihr zugefügt oder von ihr abgezogen werden, so hält sich für jeden Werth von x zwischen a und b das Verhältniss

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

wenn h durch stets positive Werthe hindurch der Null zustrebt, schliesslich immer zwischen zwei Grenzwerthen, von denen wenigstens der eine immer kleiner als eine gewisse endliche Zahl ist.

Diese Resultate verallgemeinern diejenigen der vorigen Paragraphen und zeigen insbesondere, dass, wenn das Verhältniss

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

die oben erwähnte Eigenschaft besitzt, das heisst sich schliesslich immer zwischen zwei Grenzwerthen hält, von denen wenigstens einer endlich ist, die Function $f(x)$ sich doch immer, obgleich sie unendlich viele Maxima und Minima oder unendlich viele Invariabilitätszüge haben kann, als Summe oder Differenz zweier Functionen betrachten lässt, von denen die eine stets wächst und die andere stets abnimmt oder beide abnehmen etc.

Ferner zeigen uns die eben angestellten Betrachtungen: Wenn h stets dasselbe Vorzeichen hat, zum Beispiel stets positiv ist und das Verhältniss

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

bei abnehmendem h sich schliesslich immer zwischen zwei Grenzwerthen α und β hält, von denen wenigstens der eine seinem Absolutwerth nach niemals über eine endliche Grösse hinausgeht, so ist dasselbe auch dann der Fall, wenn h das entgegengesetzte Vorzeichen hat, also hier durch negative Werthe hindurch sich der Null nähert, und als Grenzwerthe kann man in beiden Fällen dieselben Zahlen α und β annehmen. Wenn ferner h sich beispielsweise durch positive Werthe der

Null nähert und dasselbe Verhältniss für gewisse Werthe von x auch beliebig grosse positive und negative Werthe annimmt, so dass man sagen muss, es variire zwischen $+\infty$ und $-\infty$, so tritt das Gleiche auch ein, wenn h die negativen Werthe nach Null zu durchläuft. Es wird dies übrigens weiter unten noch deutlicher hervortreten.

---

§ 134. Die eben gemachten Ausführungen führen uns dann weiter zu dem Folgenden.

Wir wollen die verschiedenen in einem gegebenen Intervall (a, b) endlichen und continuirlichen Functionen getrennt ins Auge fassen, je nachdem das Verhältniss

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

wenigstens für gewisse Werthe von x bei sich verringerndem positivem oder negativem h schliesslich auch beliebig grosse positive und beliebig grosse negative Werthe annimmt, oder aber diese Singularität nicht vorhanden ist und vielmehr das Verhältniss

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

mit abnehmendem positivem oder negativem zum Beispiel positivem h schliesslich stets, welches auch x sei, zwischen zwei Grenzwerthen variirt, von denen wenigstens der eine seinem Absolutwerth nach nicht über eine gewisse, endliche Zahl hinausgeht. Im ersten Fall werden die betreffenden Functionen, was für Ausdrücke man auch ihnen zufügen oder von ihnen wegnehmen mag, beständig fortfahren, Schwankungen zu machen, falls die additiven Functionen beständig eine bestimmte und endliche Deriv irte haben. Im zweiten Fall werden sie, auch wenn sie unendlich viele Schwankungen machen oder unendlich viele Invariabilitätszüge zwischen a und b aufweisen, durch Hinzufügen passender Functionen, zu welchen sich auch die Linearfunction $Ax+B$ eignet, stets alle Invariabilitätszüge und alle Maxima und Minima verlieren. Die auf diese Art hergestellten neuen Functionen $F(x)$ weisen alsdann nicht allein keine Schwankungen mehr auf und wachsen stets oder

nehmen stets ab, sondern verhalten sich auch in Bezug auf die Existenz der Derivirten genau wie die ursprüngliche $f(x)$ und das entsprechende Verhältniss

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

variirt, welches auch x sei, h mag durch die positiven oder durch die negativen Werthe hindurch gegen 0 abnehmen, nur zwischen zwei Grenzwerthen α und β, die das nämliche Vorzeichen haben und von denen der eine von Null verschieden ist und der andere auch unendlich gross sein kann.

Offenbar kann eine Function, welche in einem gegebenen Intervall zum Beispiel der ersten dieser beiden Kategorien angehört, niemals dadurch in eine solche der zweiten Gattung übergeführt werden oder umgekehrt, dass man ihr eine Function $\omega(x)$ zufügt oder von ihr wegnimmt, welche immer eine bestimmte und endliche Derivirte hat, weil bei ihr stets

$$\frac{\omega(x+h)-\omega(x)}{h}=\omega'(x+\Theta h) \quad \text{ist} \quad (0<\Theta<1).$$

Es ist deshalb für das Studium der endlichen und continuirlichen Functionen, wenn man ihre Maxima und Minima und die Invariabilitätszüge, die sie aufweisen können, berücksichtigen muss, manchmal zweckmässig, den Unterschied, auf den uns diese Betrachtungen geführt haben, zu machen und es sollen demnach im Bedürfnissfall die erstgenannten Functionen stetige Functionen der zweiten Art oder irreducibel oscillirende Functionen, die andern dagegen stetige Functionen der ersten Art genannt werden. Es gehören danach zu den in einem gegebenen Intervall stetigen Functionen der ersten Art solche Functionen, welche in jedem Punkt rechts (oder links) stets eine bestimmte und unter einer endlichen Zahl bleibende Derivirte besitzen und allgemeiner solche, für welche bei beliebigem x das Verhältniss

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

wenn h auch nur durch die positiven Werthe hindurch gegen Null abnimmt, schliesslich stets zwischen zwei Grenzwerthen liegt, von denen wenigstens einer endlich ist. Zu den Functionen der zweiten Art gehören dagegen solche (wie zum

Beispiel einige oder vielleicht auch alle Functionen des vorigen Kapitels), für welche dieses nämliche Verhältniss nothwendiger Weise als zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegend angesehen werden muss.

Bei diesem Unterschied werden die continuirlichen Functionen der ersten Art, auch wenn sie unendlich viele Maxima und Minima oder unendlich viele Invariabilitätszüge haben, diese sämmtlich verlieren und sich auf stets wachsende oder stets abnehmende Functionen reduciren, wenn man zu ihnen solche passende Functionen addirt oder von ihnen subtrahirt, welche stets eine bestimmte, endliche, von Null verschiedene Derivirte haben und für welche sich auch immer eine Linearfunction $Ax + B$ eignet. Diese Functionen können überdies immer als Summe oder Differenz stets wachsender oder stets abnehmender Functionen angesehen werden. Die Functionen der zweiten Art dagegen haben in dem gegebenen Intervall immer Maxima und Minima, die man nicht auf die bei den vorigen angewendete Art verschwinden lassen kann, und wenn eine Function in j e d e m b e l i e b i g e n Theil des Intervalls, in dem sie in Betracht gezogen wird, von der zweiten Art ist, so hat sie in jedem dieser Theile unendlich viele Maxima und Minima.

In jedem der Punkte ferner, in welchen die Functionen erster Art eine unendlich grosse Derivirte haben, hat diese Derivirte ein bestimmtes Vorzeichen und dieses Vorzeichen ist für alle jene Punkte dasselbe, während bei den Functionen zweiter Art die Derivirte, wo sie existirt und unendlich gross ist, auch ein unbestimmtes Vorzeichen haben kann etc.

Manchmal kann es auch bei Functionen der zweiten Art vorkommen, dass sie, wenn man aus dem ganzen Intervall gewisse specielle Punkte mittelst ihrer Umgebung herausnimmt (wie es zum Beispiel bei der Function $x \sin \frac{1}{x}$ der Fall ist, wenn man den Punkt $x = 0$ wegnimmt), in den noch übrigen Intervallen eine Function erster Art ist etc.

§ 135. Nimmt man nun an, es wäre möglich, dass eine zwischen a und b stets endliche und continuirliche Function $f(x)$ rechts oder links von jedem Punkt, zum Beispiel rechts, eine stets unendlich grosse Derivirte von constantem Vorzeichen hätte, so würden die Functionen, welche man aus $f(x)$ durch Addition oder Subtraction einer beliebigen Linearfunction $Ax + B$ ableitet, sich ebenso verhalten wie $f(x)$ und würden daher zwischen a und b sämmtlich stets wachsen oder sämmtlich stets abnehmen. Man weiss aber, dass beispielsweise (§ 71) die Function

$$f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)]$$

entweder immer gleich Null ist oder in einem Punkt im Innern des Intervalls (a, b) nothwendiger Weise ein Maximum oder ein Minimum hat. Man kann also jetzt die Ergebnisse der §§ 71 und 79 vervollständigen und die Behauptung aufstellen: Eine stets endliche und continuirliche Function $f(x)$ kann rechts (oder links) von jedem Punkt eines gegebenen Intervalls nicht stets eine unendlich grosse Derivirte von constantem Vorzeichen haben. Andrerseits kann man aber auch behaupten: Die Functionen (falls sie überhaupt existiren), deren Derivirte auf der nämlichen Seite eines jeden Punktes eines gegebenen Intervalls immer unendlich gross ist, müssen so beschaffen sein, dass die Vorzeichen dieser Derivirten in gewissen Punkten eines beliebigen noch so kleinen Theils dieses Intervalls entgegengesetzt sind und können nur Functionen von der zweiten Art sein.

§ 136. Da man in den Punkten oder Intervallen, in welchen die Derivirte einer Function $f(x)$ nicht existirt oder man wenigstens über ihre Existenz im Ungewissen ist, die Grenzwerthe des Verhältnisses

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

für die beiden Fälle, dass h durch die positiven Werthe oder dass h durch die negativen Werthe hindurch sich Null nähert, nicht zusammen untersuchen kann, ja manchmal auch nicht

getrennt, so scheint es angezeigt, den Werth dieses Verhältnisses unmittelbar für jedes specielle x zwischen a und b zu bestimmen oder doch wenigstens die Grenzwerthe aufzufinden, zwischen denen dieses Verhältniss bei unbeschränkt abnehmendem h hin und her schwankt. Dies hat dann so zu geschehen, dass der dem positiven h entsprechende Werth getrennt von demjenigen untersucht wird, der dem negativen h entspricht. Wir gelangen dann zu sehr allgemeinen Resultaten, von denen einige eine grosse Anzahl der früher gefundenen Ergebnisse als Specialfälle in sich schliessen.

Wir wollen zu dem Ende, der Kürze wegen, den Quotienten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

das Zuwachsverhältniss nennen, und zwar das rechtsseitige Zuwachsverhältniss, wenn es den positiven h, und das linksseitige Zuwachsverhältniss, wenn es den negativen h entspricht.

Ist nun $f(x)$ eine beliebige Function von x, die zwischen a und b (a und b eingeschlossen) endlich und continuirlich ist, so kann das rechtsseitige Zuwachsverhältniss

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

für jeden speciellen Werth, den man x in diesem Intervall (b ausgeschlossen, wenn $b>a$) beilegt, als eine endliche und continuirliche Function von h für alle Werthe von h angesehen werden, die >0 und $<b-x$ sind. Dieses Verhältniss kann, obwohl immer endlich, doch zur oberen Grenze seiner absoluten Werthe Unendlich haben und ist stets zwischen zwei Zahlen α und β enthalten, von denen die eine, oder auch alle beide, unendlich gross sein kann; doch ist in diesem letzteren Fall die eine der Zahlen gleich $+\infty$, die andere gleich $-\infty$.

Dieses rechtsseitige Zuwachsverhältniss besitzt also, wenn es auf jeden besonderen Werth von x zwischen a und b (b ausgeschlossen) bezogen wird und wenn es für alle Werthe von h zwischen 0 und $b-x$ (0 ausgeschlossen) untersucht wird, einen unteren endlichen oder unendlich grossen Grenzwerth l_x und einen oberen ebenfalls endlichen oder unendlich grossen Grenzwerth L_x (§ 15); und der Continuität wegen nimmt das genannte Ver-

hältniss, wenn l_x endlich ist, für unendlich viele Werthe von h Werthe an, die so nahe an l_x liegen, wie man will und nimmt in gewissen Fällen auch ein- oder mehreremal den Werth l_x selbst an, und ebenso nimmt es, wenn L_x endlich ist, für unendlich viele Werthe von h beliebig nahe an L_x gelegene Werthe und manchmal auch den Werth L_x selbst an. Wenn dagegen der eine oder andere der beiden Grenzwerthe l_x und L_x unendlich gross ist, so besitzt das Zuwachsverhältniss für unendlich viele Werthe von h Werthe, die grösser als jede beliebige Zahl sind und dasselbe Vorzeichen wie l_x bezüglich L_x haben.

Diese unteren und oberen Grenzwerthe l_x und L_x sind nun natürlich für jeden Werth von x zwischen a und b (b ausgeschlossen, weil wir $b > a$ annehmen) continuirliche oder discontinuirliche, endliche oder unendlich grosse Functionen von x in jedem Theil des Intervalls (a, b), der nicht im Punkt b endigt. Sie können offenbar auch für jeden speciellen Werth, den man x zwischen a und b beilegt, als Functionen von b für alle Werthe von b betrachtet werden, welche den Punkten eines jeden Theils des Intervalls (x, b) entsprechen, der nicht im Punkt x endigt.

Beschränken wir uns zunächst darauf l_x und L_x nur als Functionen von x für alle Werthe von x zwischen a und b (b ausgeschlossen) zu betrachten, so erhält man für die verschiedenen l_x einen unteren endlichen oder unendlich grossen Grenzwerth l und für die L_x einen oberen endlichen oder unendlich grossen Grenzwerth L. So kommt man also auf zwei bestimmte Zahlen l und L, zwischen denen das rechtsseitige Zuwachsverhältniss

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

für jeden Werth von x zwischen a und b (b ausgeschlossen) und für die Werthe von h zwischen 0 und $b-x$ (0 ausgeschlossen) immer enthalten ist. Man kann dann noch, um l_x und L_x zu wahren und eigentlichen Functionen von x in dem ganzen Intervall (a, b) zu machen, gleichviel ob sie endlich sind oder unendlich gross, festsetzen, dass l_x und L_x auch für $x = b$ zwei beliebige zwischen l und L (l und L zum Beispiel

ausgeschlossen) liegende Werthe beigelegt werden. Alsdann kann man nach dem Lehrsatz von Weierstrass (§ 36) behaupten: Wenn l endlich ist, so existiren immer zwischen a und b (a und b eingeschlossen) ein oder mehrere Punkte x_0 der Art, dass in ihrer ganzen Umgebung die untere Grenze der Werthe von l_x immer noch l ist; das heisst so, dass für unendlich viele Werthe h_1 von h das rechtsseitige Zuwachsverhältniss

$$\frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1}$$

in gewissen Punkten x dieser Umgebungen bei positivem ε Werthe $l+\varepsilon$ annimmt, die l beliebig nahe liegen. Ebenso existiren, wenn L endlich ist, Punkte x_0', in deren Umgebung die obere Grenze der Werthe von L_x immer noch L ist, der Art also, dass für unendlich viele Werthe h_1' von h das rechtsseitige Zuwachsverhältniss

$$\frac{f(x'+h_1')-f(x')}{h_1'}$$

in gewissen Punkten x' dieser Umgebungen Werthe $L-\varepsilon'$ (wenn ε' positiv ist) annimmt, die L beliebig nahe liegen. Wenn schliesslich noch l oder L oder beide Grenzwerthe unendlich gross sind, so existiren derartige Punkte x_0'', dass das Verhältniss

$$\frac{f(x''+h_1'')-f(x'')}{h_1''}$$

in gewissen Punkten x'' ihrer Umgebungen für unendlich viele Werthe h_1'' von h auch Werthe annimmt, die so gross sind wie man will und dasselbe Vorzeichen haben wie l bezüglich L.

---

§ 137. Man bezeichne ferner mit l' und L' die entsprechenden Werthe, zwischen welchen das linksseitige Zuwachsverhältniss

$$\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

stets enthalten ist, wenn x zwischen a und b (a ausgeschlossen) liegt und h positiv ist und alle Werthe zwischen 0 und $x-a$ (mit Ausnahme von 0) annimmt. Nimmt man dann an, diese Werthe l' und L' seien auf dieselbe Art wie es bei den ana-

logen Werthen l und L für das rechtsseitige Zuwachsverhältniss geschah, bestimmt worden (das heisst nach vorgängiger Bestimmung der den l_x und L_x entsprechenden Functionen l_x' und L_x' für das linksseitige Zuwachsverhältniss $\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$), so erkennt man leicht, dass $l' = l$ und $L' = L$ sein muss.

Denn nehmen wir an, es könne entweder getrennt oder gleichzeitig l' von l und L' von L verschieden sein und bezeichnen wir mit α eine zwischen l und l' und mit β eine zwischen L und L' liegende Zahl.

Betrachtet man dann die Functionen

$$\varphi(x) = f(x) - \alpha x, \quad \psi(x) = f(x) - \beta x,$$

so sieht man aus der Bedeutung der Grössen l und L, l' und L', dass für jedes zwischen a und b liegende x, wenn $l' < l$, stets

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} > 0,$$

und wenn $l' > l$, stets

$$\frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{-h} > 0$$

sein muss, während für $L' < L$ stets

$$\frac{\psi(x-h) - \psi(x)}{-h} < 0,$$

und für $L' > L$ stets

$$\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} < 0$$

sein muss, wenn h positiv vorausgesetzt wird. Jedenfalls muss also $\varphi(x)$ zwischen a und b immer wachsen und $\psi(x)$ immer abnehmen.

Auf der andern Seite aber müssen nach der am Ende des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung stets Werthe von x und h vorkommen, für welche

$$\frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{-h} < 0 \text{ wenn } l' < l,$$

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} < 0 \text{ wenn } l' > l,$$

und

$$\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} > 0 \text{ wenn } L' < L,$$

$$\frac{\psi(x-h) - \psi(x)}{-h} > 0 \text{ wenn } L' > L$$

ist. Dies ist aber offenbar ein Widerspruch, der auch dann noch besteht, wenn eine der Grössen l, l', L, L' unendlich gross ist. Es kann daher, wie oben behauptet, nur $l' = l$ und $L' = L$ sein.

Ich bemerke noch, dass diese Eigenschaft, falls $l = -\infty$, $L = \infty$ ist, schon aus dem am Ende des § 133 Gesagten hervorgeht.

---

§ 138. Wenn man also die Functionen l_x und L_x der unteren und oberen Grenzwerthe des rechtsseitigen Zuwachsverhältnisses der $f(x)$ zwischen a und b bestimmt hat und dann ebenso die entsprechenden Functionen l_x' und L_x' für das linksseitige Zuwachsverhältniss, so sind die untern Grenzwerthe der l_x und l_x' und ebenso die obern Grenzwerthe der L_x und L_x' dieselben. Man kann daher jetzt in Ergänzung dessen, was die vorigen Paragraphen gelehrt haben, behaupten: Für jede beliebige endliche und continuirliche Function $f(x)$ bestehen zwei fest bestimmte Zahlen l und L, zwischen welchen die rechts- und linksseitigen Zuwachsverhältnisse

$$\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h}$$

stets enthalten sind, und nach dem oben erwähnten Satz von Weierstrass besitzen diese Zahlen l und L die Eigenschaft, dass stets specielle Werthe x_l und x_L von x zwischen a und b (a und b eingeschlossen) existiren von der Art, dass in jeder Umgebung von ihnen die Grenzwerthe l bezüglich L immer noch dieselben sind. Es findet dies dergestalt statt, dass, wenn diese Zahlen l und L endlich sind, das rechtsseitige Zuwachsverhältniss

$$\frac{f(x' + h) - f(x')}{h}$$

in gewissen Punkten x' einer jeden Umgebung von x_l oder x_L für unendlich viele passende Werthe von h (doch muss der Punkt $x' + h$ noch zwischen a und b liegen) so nahe an l bezüglich an L liegt wie man nur will, und dass das linksseitige Zuwachsverhältniss

$$\frac{f(x'' - h) - f(x'')}{-h}$$

in gewissen Punkten x'' derselben Umgebungen ebenfalls so nahe an ihnen ist, wie man nur will. Und ähnlich: Wenn eine der Zahlen l und L oder beide unendlich gross sind, so sind für die in jeder Umgebung derselben Punkte x_l und x_L ausgewählten Werthe x' von x die nämlichen Zuwachsverhältnisse

$$\frac{f(x' \pm h) - f(x')}{\pm h}$$

für unendlich viele passende Werthe von h grösser als jede noch so grosse Zahl und haben dasselbe Vorzeichen wie l bezüglich L.

§ 139. Untersucht man nun insbesondere die Functionen l_x und L_x, l_x' und L_x' für jede beliebige endliche und stetige Function $f(x)$, so ist leicht ersichtlich, dass, wenn die beiden Functionen l_x und l_x' in einem Punkt x endlich und continuirlich sind, $l_x = l_x'$ sein muss und ebenso, wenn L_x und L_x' beide endlich und stetig sind, so muss $L_x = L_x'$ sein.

Denn nimmt man im ersten Fall eine kleine Umgebung des Punktes x und lässt sie unbeschränkt kleiner werden, so differirt der gemeinsame untere Grenzwerth l_1 der l_x und l_x' in dieser Umgebung schliesslich so wenig, wie man nur will, von l_x und l_x', und im zweiten Fall differirt der gemeinsame obere Grenzwerth L_1 der L_x und L_x' schliesslich so wenig, wie man nur will, von L_x und L_x' und man erhält also, wie behauptet, $l_x = l_x'$ und $L_x = L_x'$. Folglich sind insbesondere auch noch die Functionen l_x und l_x', das heisst die untern Grenzwerthe der rechts- und linksseitigen Zuwachsverhältnisse der $f(x)$ im Punkt x in den Intervallen, in welchen sie endlich und continuirlich sind, einander gleich. Dasselbe gilt für die Functionen L_x und L_x', das heisst die oberen Grenzwerthe derselben Verhältnisse, für die Punkte x derjenigen Intervalle, in welchen sie endlich und continuirlich sind.

---

§ 140. Die Untersuchung der Zahlen l und L führt auf eine sehr bemerkenswerthe Eigenschaft der endlichen und continuirlichen Functionen. Doch bevor wir diese Eigenschaft

nachweisen, ist es von Vortheil, einige Bemerkungen über die Zuwachsverhältnisse vorauszuschicken.

Es sei zu dem Ende $f(x)$ die bekannte Function, die in dem Intervall (a, b) endlich und continuirlich ist. Greifen wir aus diesem Intervall einen ganz beliebigen Theil (α, β) heraus und betrachten in ihm die Function

$$\varphi(x) = f(x) - f(\alpha) - \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}[f(\beta) - f(\alpha)].$$

Beachtet man, dass diese Function entweder immer gleich Null sein muss oder in einem bestimmten Punkt x_1 im Innern des Intervalls (α, β) ein Maximum oder ein Minimum haben muss (§ 71), so sieht man sofort, dass zwischen α und β immer wenigstens ein innerer bestimmter Punkt x_1 vorhanden sein muss der Art, dass für alle positiven Werthe von h, die kleiner als ein gegebener Grenzwerth sind, stets

$$\varphi(x_1 \pm h) - \varphi(x_1) \leq 0 \quad \text{oder stets} \quad \varphi(x_1 \pm h) - \varphi(x_1) \geq 0$$

ist. Es ist daher entweder:

$$(1) \quad \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \leq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \text{ und } \frac{f(x_1 - h) - f(x_1)}{-h} \geq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

oder

$$(2) \quad \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \geq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \text{ und } \frac{f(x_1 - h) - f(x_1)}{-h} \leq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Wenn dann die Function $\varphi(x)$ zwischen α und β entweder nur dieses eine Maximum oder Minimum hat oder nur eine endliche Anzahl derselben besitzt, alsdann kann man das Intervall (α, β) in Theilintervalle von endlicher Ausdehnung zerlegen, so dass diese Function $\varphi(x)$ in jedem von diesen Theilintervallen stets nur wächst oder nur abnimmt. Man erhält dann für jeden Punkt x dieser Intervalle (die Endpunkte ausgeschlossen) und für alle Werthe von h, die kleiner als gegebene Grenzwerthe sind, stets:

$$\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h} \leq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

oder stets

$$\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h} \geq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Wenn dagegen die Function $\varphi(x)$ zwischen α und β eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hat, alsdann existiren gleichzeitig mit unendlich vielen Punkten x_1, für welche die Bedingungen (1) gelten, auch unendlich viele Punkte x, für welche umgekehrt die Bedingungen (2) gelten. Wenn man also jetzt zusammenfasst und beachtet, dass die rechts- und linksseitigen Zuwachsverhältnisse ebenso wie

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

stets zwischen l und L liegen, so hat man offenbar: In jedem Theil (α, β) des Intervalls (a, b), in welchem $f(x)$ endlich und continuirlich ist und welchem die Grenzzahlen l und L entsprechen, existiren immer:

1. unendlich viele Punkte x_1, für welche das rechtsseitige Zuwachsverhältniss

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h},$$

sobald h hinreichend klein genommen wird, sich stets zwischen l und $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ hält.

2. unendlich viele Punkte x_1, für welche das Gleiche in Bezug auf das linksseitige Zuwachsverhältniss

$$\frac{f(x_1 - h) - f(x_1)}{-h}$$

gilt.

3. unendlich viele Punkte x_1, für welche das rechtsseitige Zuwachsverhältniss

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h},$$

sobald h hinreichend klein genommen wird, stets zwischen $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ und L liegt.

4. unendlich viele Punkte x_1, für welche das Gleiche in Bezug auf das linksseitige Zuwachsverhältniss gilt.

Und wenn die Function

$$\varphi(x) = f(x) - f(\alpha) - \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}[f(\beta) - f(\alpha)]$$

zwischen α und β nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, alsdann existiren zwischen α und β auch Intervalle von endlicher Ausdehnung und so beschaffen, dass in jedem Punkt x derselben die rechtsseitigen und linksseitigen Zuwachsverhältnisse

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

mit abnehmendem h beide schliesslich immer zwischen l und $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ liegen, und es existiren auch Intervalle von endlicher Ausdehnung und so beschaffen, dass in jedem Punkt x derselben die nämlichen Zuwachsverhätnisse schliesslich immer zwischen $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ und L liegen. Diese Theilintervalle der einen wie der andern Art sind in endlicher Anzahl vorhanden und füllen, sich abwechselnd folgend, das totale Intervall (α, β) vollständig aus.

---

§ 141. Nachdem wir diese allgemeinen Bemerkungen über die Zuwachsverhältnisse vorausgeschickt haben, können wir nun leicht jene Eigenschaft nachweisen, von der im Anfang des vorigen Paragraphen die Rede war.

Wenn l und L die bekannten dem Intervall (a, b) entsprechenden Grenzzahlen sind und wenn l endlich ist, so existirt (§ 138) ein Punkt x_l zwischen a und b derart, dass in gewissen Punkten x' jeder beliebigen Umgebung von x_l das rechtsseitige Zuwachsverhältniss

$$\frac{f(x'+h_1)-f(x')}{h_1}$$

für unendlich viele positive Werthe von h_1 von l um weniger als eine beliebig kleine gegebene Grösse ε_1 abweicht; oder mit andern Worten, es existiren zwischen a und b unendlich viele Punktpaare α und β, zwischen denen der Punkt x_l entweder enthalten ist oder nicht, von denen aber wenigstens Eines so nahe bei x_l liegt, wie man will, der Art, dass das Verhältniss

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

einen Werth $l + \varepsilon$ (ε positiv und kleiner als ε_1 vorausgesetzt) hat, der von l um eine beliebig kleine Grösse differirt. Ebenso existiren, wenn L endlich ist, unendlich viele Punktpaare α und β von der Beschaffenheit, dass dasselbe Verhältniss

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

einen Werth $L - \varepsilon$ (ε positiv vorausgesetzt) hat, der von L nur um eine beliebig kleine gegebene Grösse ε abweicht. Wenn schliesslich l oder L unendlich gross sind, so existiren wieder unendlich viele Punktpaare α und β, für die dasselbe Verhältniss absolut genommen grösser als jede beliebige Grösse c ist und dasselbe Vorzeichen hat wie l bezüglich L.[1])

Daraus lässt sich schliessen, dass man sich die im vorigen Paragraphen besprochenen Theile (α, β) des Intervalls (a, b) immer der Art ausgewählt denken kann, dass bei endlichem und L

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = l + \varepsilon \quad \text{oder} \quad \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = L - \varepsilon$$

ist. Und wenn eine der Grössen l und L oder beide unendlich gross sind, kann man sich das Theilintervall (α, β) so ausgewählt denken, dass

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

dasselbe Vorzeichen wie l oder L hat und absolut genommen grösser als eine gegebene positive und beliebig grosse Zahl c ist. Zieht man dann ausserdem noch neben der gegebenen Function $f(x)$ die unendlich vielen Functionen

$$\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$$

in Betracht, die sich aus der $f(x)$ durch Subtraction (oder Addition) der Linearfunctionen $\mu x + \nu$ ergeben und behandelt nur diejenigen von diesen Functionen als verschieden, welche im Werth von μ von einander abweichen, so kann es vorkommen, dass unter diesen Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ keine oder höchstens nur eine endliche Anzahl vorhanden ist,

---

1) Harnack, Math. Ann. Bd. 23 S. 244.

die zwischen a und b unendlich viele Maxima und Minima hat. In diesem Fall kann man sich dann offenbar die Punkte α und β so gewählt denken, dass sie nicht nur den obigen Bedingungen, sondern auch der Bedingung genügen, dass die Function

$$f(x) - f(\alpha) - \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}[f(\beta) - f(\alpha)]$$

zwischen a und b keine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima habe. Wendet man dann auf die so bestimmten Theilintervalle (α, β) die Resultate des vorigen Paragraphen an und beachtet ferner, dass man, statt von dem Totalintervall (a, b) auszugehen, auch von einem beliebigen Theil desselben (a', b') ausgehen kann, vorausgesetzt nur, dass man dann statt l und L die diesem Theil entsprechenden Werthe einführt, so kann man jetzt ohne Weiteres folgern:

Wenn die Function $f(x)$ in dem Intervall (a, b) endlich und continuirlich ist und wenn l und L für einen beliebigen Theil (a', b') dieses Intervalls (a, b) die unteren und oberen Grenzzahlen ihrer Zuwachsverhältnisse sind, so folgt daraus für dieses Theilintervall (a', b'):

1. Wenn l endlich ist, existiren in ihm immer unendlich viele Punkte x_1, für welche das rechtsseitige Zuwachsverhältniss

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x)}{h}$$

und unendlich viele Punkte x_2, für welche das linksseitige Zuwachsverhältniss

$$\frac{f(x_2 - h) - f(x)}{-h}$$

bei unbegrenzt abnehmendem positivem h entweder einem bestimmten Grenzwerth zustrebt (was die Existenz einer Derivirten rechts oder links in den Punkten x_1 oder x_2 bedeuten würde) oder doch zwischen den Grenzwerthen l und $l + \varepsilon$ hin- und herschwankt, die von einander und von l nur um eine Grösse ε entfernt sind, welche kleiner ist als eine beliebig kleine im Voraus gegebene Grösse ε_1.

2. Wenn auch L endlich ist, existiren in ihm ebenso unendlich viele andere Punkte x_1, für welche das rechtsseitige Zuwachsverhältniss und unendlich viele Punkte x_2, für welche das linksseitige Zuwachsverhältniss bei der unbeschränkten Annäherung von h an Null entweder einem bestimmten Grenzwerth zustrebt oder doch zwischen Grenzen $L - \varepsilon$ und L hin- und herschwankt, die von einander und von L um eine Grösse ε entfernt sind, welche kleiner ist als eine beliebig kleine vorher gegebene Gröse ε_1.

3. Wenn l oder L oder diese beiden Grenzwerthe unendlich gross sind, so existiren in ihm unendlich viele Punkte x_1, für welche das rechtsseitige Zuwachsverhältniss und unendlich viele Punkte x_2, für welche das linksseitige Zuwachsverhältniss entweder zur Grenze $\pm \infty$ hat, oder doch zwischen Zahlen hin- und herschwankt, die dasselbe Vorzeichen haben wie l bezüglich L und absolut genommen grösser sind als eine beliebig grosse zuvor gegebene Grösse c. In diesen drei Fällen können die Punkte x_1 manchmal mit den Punkten x_2 zusammenfallen.

4. Wenn schliesslich die Function $f(x)$ zwischen a' und b' niemals eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hat, und sie auch niemals durch Subtraction (oder Addition) einer beliebigen Linearfunction $\mu x + \nu$ erlangt, oder auch, wenn unter den unendlich vielen Functionen $f(x) - \mu x - \nu$, welche sich so ergeben ($f(x)$ eingeschlossen), nur eine endliche Anzahl (die sich durch den Werth von μ von einander unterscheiden) zwischen a' und b' eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hat, alsdann existiren in dem Theilintervall (a', b') auch Intervalle von endlicher Ausdehnung der Art, dass in jedem Punkt derselben die genannten Eigenthümlichkeiten gleichzeitig bei dem rechtsseitigen wie bei dem linksseitigen Zuwachsverhältniss auftreten.

§ 142. Der bewiesene Satz ist, wie mir scheint, von besonderer Wichtigkeit. Es tritt dies noch mehr hervor, wenn man, wie im § 134 gezeigt wurde, die Functionen in solche der ersten und solche der zweiten Art unterscheidet. In Bezug auf die Functionen der ersten Art lässt uns der vorige Satz freilich im Zweifel, ob endliche und continuirliche Functionen der ersten Art denkbar sind, welche niemals rechts oder links von den Punkten des Intervalls (a, b), in welchem sie in Betracht gezogen werden, eine bestimmte und endliche Derivirte haben. Derselbe Satz lehrt uns aber, dass in jedem beliebigen Theil dieses Intervalls immer unendlich viele Punkte x_1 existiren müssen, für welche das rechtsseitige Zuwachsverhältniss und unendlich viele Punkte x_2, für welche das linksseitige Zuwachsverhältniss bei der Annäherung von h an Null entweder einen bestimmten und endlichen Grenzwerth hat oder doch zwischen endlichen Grenzen hin- und herschwankt, die um weniger als eine im Voraus gegebene noch so kleine Grösse von einander abweichen und die durch Aenderung der Punkte x_1 und x_2 immer enger gezogen werden können und sich einander nähern lassen, so viel man nur immer will. Auf diese Weise nähert man sich gewissermassen bei den Functionen der ersten Art in unendlich vielen Punkten eines beliebigen Intervalls stets dem Zustand der Existenz einer endlichen und bestimmten Derivirten, wenigstens auf der einen Seite dieser Punkte, ohne deshalb sagen zu können, dass stets nothwendiger Weise Punkte vorhanden sein müssen, in welchen diese Derivirte auch nur auf einer Seite thatsächlich existirt.

Bei Functionen, die in einem gegebenen Intervall von der zweiten Art sind, zeigt uns der bewiesene Satz, dass in diesem Intervall immer unendlich viele Punkte x_1, für welche das rechtsseitige Zuwachsverhältniss und unendlich viele Punkte x_2 vorhanden sind, für welche das linksseitige Zuwachsverhältniss entweder ∞ zum Grenzwerth hat, oder doch schliesslich stets dasselbe Vorzeichen behält und absolut genommen grösser bleibt, als beliebig grosse vorher gegebene Zahlen, so dass sie bei Variirung der Punkte x_1 oder x_2 so gross gedacht werden können, als man nur will. Man nähert sich daher

auch bei diesen Functionen gewissermassen stets dem Zustand, in welchem die Derivirte wenigstens auf der einen Seite dieser Punkte exisirt und unendlich gross ist, ohne dass man deshalb sagen kann, es müssten immer nothwendiger Weise Punkte vorhanden sein, in welchen die Derivirte auch nur auf der einen Seite thatsächlich unendlich gross ist.

---

§ 143. Der letzte Theil des bewiesenen Satzes kann noch durch folgenden Zusatz ergänzt werden: Wenn eine Function $f(x)$ in einem ganzen Intervall (a, b) endlich und continuirlich ist, in demselben nicht unendlich viele Maxima und Minima hat und sie auch nicht durch Subtraction (oder Addition) einer beliebigen Linearfunction $\mu x + \nu$ erlangt — oder auch, wenn unter den unendlich vielen Functionen $f(x) - \mu x - \nu$, die sich so ergeben (die $f(x)$ eingeschlossen), nur einige (durch den Werth von μ unterschiedene) in endlicher Anzahl vorkommen, welche zwischen a und b eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima haben, alsdann muss in unendlich vielen Punkten jedes beliebig kleinen Theils des gegebenen Intervalls ihre Derivirte im gewöhnlichen Sinn des Wortes nothwendiger Weise einen bestimmten und endlichen Werth haben. Damit ist jedoch nicht ausgeschlossen, dass in jedem Intervall ausserdem noch unendlich viele Punkte existiren können, in denen von einer solchen Derivirten nicht die Rede ist.

In der That müssen unter der obigen Voraussetzung nach § 133 und wie auch ohne Weiteres aus den Bemerkungen des § 140 hervorgeht, in jedem beliebigen Theil des gegebenen Intervalls unendlich viele Gebiete (α, β) existiren, in denen wenigstens eine der entsprechenden Zahlen l und L einen endlichen Werth hat. Ist dieses zum Beispiel l, so existiren innerhalb (α, β) weitere Theilintervalle (α_1, β_1) der Art, dass die rechts- und linksseitigen Zuwachsverhältnisse in jedem Punkt derselben zwischen l und $l + \varepsilon$ liegen, wenn ε eine gegebene positive und beliebig kleine Zahl ist.

Ist ähnlich l_1 $(l \leqq l_1 \leqq l + \varepsilon)$ der dem Theilintervall (α_1, β_1) entsprechende Werth von l, so wird man aus (α_1, β_1) immer ein weiteres Intervall (α_2, β_2) herausheben können, dessen Endpunkte nicht mit α_1 und β_1 zusammenfallen und so, dass in jedem Punkt desselben die beiderseitigen Zuwachsverhältnisse sich schliesslich dauernd zwischen l_1 und $l_1 + \frac{1}{2}\varepsilon$ halten. Fährt man so fort und beobachtet ein ähnliches Verfahren, wie es im § 63 und auch bei andern Gelegenheiten befolgt wurde, so sieht man klar, dass man immer im Innern des Intervalls (α, β) wenigstens zu einem Grenzpunkt kommen muss, in welchem die rechts- und linksseitigen Zuwachsverhältnisse einen und denselben bestimmten und endlichen Grenzwerth l' haben, welcher die Derivirte der $f(x)$ in diesem Punkt im gewöhnlichen Sinn des Wortes ist. Der oben aufgestellte Satz ist damit vollständig bewiesen.

---

§ 144. Da nun weiter im vorliegenden Fall (wie schon erwähnt) in jedem Theil des gegebenen Intervalls immer Gebiete existiren müssen, in denen wenigstens eine der entsprechenden Zahlen l und L endlich ist, so braucht man sich nur an die Ausführungen im § 140 zu erinnern, um ohne Weiteres folgern zu können: Wenn eine in einem gegebenen Intervall (a, b) endliche und continuirliche Function $f(x)$ niemals unendlich viele Maxima und Minima hat und sie auch nicht durch Subtraction (oder Addition) einer beliebigen Linearfunction $\mu x + \nu$ erlangt, oder auch, wenn unter den unendlich vielen Functionen $f(x) - \mu x - \nu$, die sich so ergeben (die $f(x)$ eingeschlossen) nur eine endliche (durch den Werth von μ unterschiedene) Anzahl von solchen vorkommt, die eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima haben, alsdann existiren in jedem beliebigen Theil (a', b') des gegebenen Intervalls immer Gebiete von endlicher Ausdehnung, in denen die rechts- und linksseitigen Zuwachsverhältnisse schliesslich numerisch dauernd kleiner bleiben als

eine endliche Zahl. Wenn ferner in demselben Theil (a', b') die Function nicht immer constant ist, so existiren in ihm auch Intervalle von endlicher Ausdehnung, in denen die Zuwachsverhältnisse nicht nur immer endlich bleiben, sondern sich auch von Null um mehr als eine bestimmte Grösse entfernt halten und sämmtlich dasselbe Vorzeichen haben, so dass in diesen Theilen die im gewöhnlichen Sinn verstandene Derivirte in den Punkten, in welchen sie existirt, nicht nur endlich, sondern auch von Null verschieden ist und immer dasselbe Vorzeichen hat.

---

§ 145. Den in den letzten Paragraphen bewiesenen Sätzen dürfte, wie uns scheint, die Aufgabe zufallen, künftig aus allen bessern Lehrbüchern den bis in die neueste Zeit als die Grundlage der Differentialrechnung figurirenden Lehrsatz zu verdrängen, nach welchem die Existenz der Derivirten jeder endlichen und stetigen Function wenigstens im Allgemeinen ausser Zweifel sein sollte. Möglich auch, dass unsere Sätze vermöge ihrer grossen Allgemeinheit zu Principien führen können, auf welche sich eine allgemeinere Rechnungsmethode gründen liesse, die über die Leistungsfähigkeit der Differentialrechnung hinaus auch diejenigen Functionen einer analytischen Behandlung zugänglich machen würde, welche eine Derivirte nicht besitzen.

Uebrigens lassen sich die gewonnenen Resultate noch sehr vervollständigen.

Wir kehren zu dem Zweck zu den Functionen l_x und L_x zurück, welche die unteren bezüglich oberen Grenzen derjenigen Werthe des rechtsseitigen Zuwachsverhältnisses

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

darstellen, die den verschiedenen Werthen von h zwischen 0 und $b-x$ (0 ausgeschlossen) für den speciellen Werth x der Variablen entsprechen und ziehen daneben auch die analogen Functionen l_x' und L_x' für das linksseitige Zuwachsverhältniss in Betracht.

Die Functionen l_x und L_x lassen sich, wie schon im § 136 erwähnt, für jeden speciellen Werth, den man x zwischen a und b (b ausgeschlossen) beilegt, auch als Functionen von b betrachten, wobei b alle Werthe annimmt, welche zwischen dem in Betracht gezogenen Werth von x (x ausgeschlossen) und dem dem b als Endpunkt des Intervalls ursprünglich zuertheilten Werth liegen. In diesem Fall ist es klar, dass, wenn b beständig kleiner wird und sich dadurch unbeschränkt an x annähert, die Grösse l_x entweder zunimmt oder unverändert bleibt, während L_x abnimmt oder unverändert bleibt. Die l_x und L_x streben daher (§ 25) zwei bestimmten (endlichen oder unendlich grossen) Grenzwerthen λ_x und Λ_x zu, welche als die oberen bezüglich unteren Grenzwerthe der Grössen l_x und L_x für die verschiedenen Werthe von b zwischen x und b angesehen werden können. Diese Zahlen λ_x und Λ_x, die also von der Ausdehnung des Intervalls (a, b) unabhängig sind und nur von der Beschaffenheit der Function $f(x)$ in den Umgebungen rechts von x abhängen, besitzen offenbar die Eigenschaft, dass das rechtsseitige Zuwachsverhältniss der $f(x)$ beim Abnehmen des h gegen 0 hin schliesslich sich dauernd zwischen $\lambda_x - \varepsilon$ und $\Lambda_x + \varepsilon$ hält, wenn ε eine positive, beliebig kleine Zahl bezeichnet und λ_x und Λ_x endlich sind, oder zwischen beliebig grossen positiven und negativen Zahlen hin und herschwanken, wenn $\lambda_x = -\infty$ und $\Lambda_x = +\infty$ ist, etc.

Sind daher λ_x und Λ_x gleich und endlich, so existirt die Ableitung[1]) der $f(x)$ rechts von x und ist gleich Λ_x oder λ_x; sind sie beide gleich $+\infty$ oder beide gleich $-\infty$, so ist diese Ableitung gleich $+\infty$ bezüglich gleich $-\infty$. Wenn dagegen λ_x und Λ_x von einander verschieden sind, so existirt rechts vom Punkt x keine Ableitung und das rechtsseitige Zuwachsverhältniss strebt bei gegen Null hin abnehmendem h keinem bestimmten Grenzwerth zu, bleibt jedoch stets

1) „Ableitung" soll hier und im Folgenden immer die Derivirte rechts oder links im gewöhnlichen Sinne des Wortes genannt werden, falls sie existirt, im Gegensatz zu den vier Derivirten, die sofort definirt werden.

continuirlich in Bezug auf h, und schwankt, wenn λ_x und Λ_x beide endlich sind, zwischen $\lambda_x - \varepsilon$ und $\Lambda_x + \varepsilon$ hin und her, wobei ε eine positive Grösse ist, die durch Verringerung des h beliebig klein gemacht werden kann. Es wird, wenn λ_x endlich und $\Lambda_x = \infty$ ist, zwischen $\lambda_x - \varepsilon$ und ∞ hin und her schwanken u. s. f. Und wie klein auch h sei, schliesslich nimmt das rechtsseitige Zuwachsverhältniss, wenn λ_x und Λ_x endlich sind, immer auch Werthe an, die beliebig nahe an λ_x bezüglich an Λ_x liegen oder die, genauer ausgedrückt, theils zwischen $\lambda_x - \varepsilon_1$ und $\lambda_x + \varepsilon_1$, theils zwischen $\Lambda_x - \varepsilon_2$ und $\Lambda_x + \varepsilon_2$ gelegen sind, wenn ε_1 und ε_2 positive, beliebig kleine Zahlen sind. Wenn dagegen zum Beispiel Λ_x unendlich gross ist, so nimmt dasselbe Zuwachsverhältniss schliesslich auch Werthe an, die dasselbe Vorzeichen wie Λ_x haben und numerisch so gross sind, wie man nur will.

Für jeden Punkt x (b ausgeschlossen) müssen dann diese bestimmten Zahlen λ_x und Λ_x gleichzeitig in Betracht gezogen werden, wenn die Ableitung zur Rechten von x nicht existirt (nicht in endlicher und nicht in unendlicher Form), während λ_x und Λ_x sich auf eine einzige endliche oder unendlich grosse Zahl reduciren, wenn diese Ableitung zur Rechten existirt und endlich oder unendlich gross ist. Man nennt Λ_x die vordere oder rechte obere, λ_x die vordere oder rechte untere Derivirte von $f(x)$[1]).

Fasst man dann die Zahlen λ_x und Λ_x für alle Werthe von x in dem ganzen Intervall (a, b) (b ausgeschlossen) ins Auge, so bilden sie in dem ganzen Intervall (b jedoch ausgeschlossen) zwei bestimmte, stetige oder unstetige, endliche oder unendlich grosse Functionen von x und besitzen einen unteren Grenzwerth λ, bezüglich einen oberen Λ, die selbst wieder endlich oder unendlich gross sind.

In Bezug auf das linksseitige Zuwachsverhältniss bestehen in dem ganzen Intervall (a, b) (a ausgeschlossen) zwei analoge Functionen λ_x' und Λ_x', von welchen Λ_x' die hintere (linke) obere, λ_x' die hintere (linke) untere Derivirte heisst[1]).

1) Scheeffer, Acta Math. Bd. 5 S. 52. Pasch, Math. Ann. Bd. 30 S. 135.

Auch sie haben einen unteren Grenzwerth λ' bezüglich einen oberen Λ', die endlich oder unendlich gross sind. Man hat daher vier Functionen zu gleicher Zeit zu behandeln

$$\lambda_x,\ \Lambda_x,\ \lambda_x',\ \Lambda_x'$$

und diese reduciren sich nur dann auf eine einzige, wenn die Derivirte im gewöhnlichen Sinn des Wortes in allen Punkten des Intervalls existirt und endlich oder unendlich gross mit bestimmtem Vorzeichen ist. Sie reduciren sich auf zwei, wenn eine Ableitung zur Rechten und auch eine, aber davon verschiedene zur Linken vorhanden ist; sie reduciren sich wieder auf zwei oder auch auf drei, wenn nur die Ableitung zur Rechten oder nur diejenige zur Linken vorhanden ist u. s. w.

Das von λ_x bis Λ_x sich erstreckende Werthgebiet

$$\Lambda_x - \lambda_x,$$

innerhalb dessen das rechtsseitige Zuwachsverhältniss

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

bei abnehmendem positivem h schliesslich dauernd seine Schwankungen vollzieht, soll von nun an die Schwankung dieses Verhältnisses im Punkte x oder besser die rechtsseitige derivatorische Schwankung der Function $f(x)$ für den Werth x der Variablen heissen. Ebenso soll die Differenz

$$\Lambda_x' - \lambda_x'$$

die Schwankung des linksseitigen Zuwachsverhältnisses oder die linksseitige derivatorische Schwankung der $f(x)$ genannt werden.

---

§ 146. Wir bemerken nun, dass die unteren Grenzzahlen λ und λ' der Werthe von λ_x und λ_x' in den Punkten des Intervalls (a, b) und die oberen Grenzzahlen Λ und Λ' der Werthe von Λ_x und Λ_x' in den Punkten desselben Intervalls einander sowohl als auch bezüglich den Grenzwerthen l und L, von denen in den vorigen Paragraphen die Rede war, gleich sind[1]).

Man sieht in der That, wenn l von λ oder L von Λ ver-

1) Du Bois-Reymond, Math. Ann. Bd. 16 S. 119.

schieden wäre, so würde aus der Definition dieser Zahlen nothwendig folgen:

$$l < \lambda \quad \text{oder} \quad L > \Lambda .$$

Nimmt man aber zum Beispiel an, l und λ wären endlich und $l < \lambda$, bezeichnet dann mit μ eine zwischen l und λ liegende Zahl und mit ε eine positive Zahl, die kleiner als $\lambda - \mu$ ist, so ist klar, dass das rechtsseitige Zuwachsverhältniss

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

das einem beliebigen Werth x der Variablen zwischen a und b entspricht, mit abnehmendem positivem h sich zuletzt immer grösser als $\lambda_x - \varepsilon$ und daher auch als $\lambda - \varepsilon$ hält. Die Function

$$\varphi(x) = f(x) - \mu x$$

genügt deshalb für jeden zwischen a und b liegenden Werth von x bei abnehmendem positivem h schliesslich stets der Ungleichung

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} > 0;$$

das heisst also, $\varphi(x)$ wächst beständig.

Auf der anderen Seite muss es nach der Definition von l gewisse Punkte x zwischen a und b (b ausgeschlossen) und gewisse Werthe von h geben, für welche

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

äusserst nahe an l herankommt und deshalb kleiner als μ ist. Alsdann wäre

$$\varphi(x+h) < \varphi(x),$$

was dem Obigen widerspricht. Weil man nun ähnliche Schlüsse ziehen kann, falls l oder λ oder beide unendlich gross sind (indem man auch die Möglichkeit zulässt, dass $l = -\infty$, $\lambda = \infty$ sein könne) und wenn man auch den Fall berücksichtigt, dass $L > \Lambda$ ist, so folgt, dass $\lambda = \lambda' = l$ und ebenso $\Lambda = \Lambda' = L$ sein muss.

Die Functionen λ_x, λ_x', l_x, l_x' haben daher denselben unteren Grenzwerth und ebenso die Functionen Λ_x, Λ_x', L_x, L_x'

denselben oberen Grenzwerth. Wir bezeichnen sie von jetzt an mit λ bezüglich Λ. Aus dem eben Bewiesenen folgt: Diese Grenzzahlen λ und Λ der Derivirten, welche dem Intervall (a, b) entsprechen, fassen ausser den Werthen aller dieser Derivirten selbst auch die Werthe aller Zuwachsverhältnisse

$$\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h}$$

zwischen sich, wie auch immer die beiden Punkte x und $x \pm h$ zwischen a und b (a und b eingeschlossen) gewählt werden[1]. Es verdient bemerkt zu werden, dass der zweite Theil des Satzes in § 71 und die Sätze der §§ 79 und 135 unmittelbar aus den hier entwickelten Eigenschaften folgen. Man sieht ausserdem: Wenn die zu einem gegebenen Intervall gehörigen Zahlen λ und Λ einander gleich sind, so sind die der Function $f(x) - \lambda x$ entsprechenden Zahlen λ und Λ gleich Null und folglich ist die gegebene Function $f(x)$ nichts Anderes als die Linearfunction $\lambda x + \nu$, wobei ν eine Constante bedeutet etc.

---

§ 147. Es ist ferner leicht ersichtlich, dass die Functionen λ_x und λ_x' auch eine gemeinsame obere Grenze, welche mit derjenigen der Functionen Λ_x und Λ_x', das ist mit Λ, und die Functionen Λ_x und Λ_x' eine gemeinsame untere Grenze haben, welche mit derjenigen der Functionen λ_x und λ_x', also mit λ zusammenfällt.

Denn nimmt man zunächst an, der untere Grenzwerth λ von λ_x und λ_x' sei endlich und erinnert sich an den Beweis in § 141, so sieht man sofort, dass unendlich viele Punkte x_1 existiren, für welche das rechtsseitige Zuwachsverhältniss

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

bei hinreichend kleinem h nur zwischen λ und $\lambda + \varepsilon$ variirt, wenn ε eine positive beliebig kleine Zahl ist.

Daraus folgt, dass auch die den Punkten x_1 entsprechende

1) Ein anderer Beweis findet sich bei Scheeffer, Acta Math. Bd. 5 S. 190.

rechte obere Derivirte $\varLambda_{x_1}$ zwischen λ und $\lambda + \varepsilon$ liegt. Da nun offenbar $\varLambda_x$ niemals kleiner als λ sein kann, so ist der untere Grenzwerth von $\varLambda_x$ genau λ.

Auf ähnliche Art sieht man, dass, wenn $\lambda = -\infty$, der untere Grenzwerth von $\varLambda_x$ genau $-\infty$, das heisst λ ist, wie denn auch die obere Grenze von λ_x mit $\varLambda$ zusammenfällt. Das bedeutet also: die unteren und oberen Derivirten rechts und links λ_x, $\varLambda_x$, λ_x', $\varLambda_x'$ haben alle vier denselben unteren und denselben oberen Grenzwerth in jedem beliebigen Theil des Intervalls, in welchem sie betrachtet werden. Es nähern sich natürlicherweise, wie übrigens auch aus dem vorigen Beweis hervorgeht, die Derivirten λ_x und $\varLambda_x$ gleichzeitig in unendlich vielen Punkten ihren oberen oder ihren unteren Grenzwerthen, wenn diese Grenzwerthe endlich sind, oder sie wachsen gemeinschaftlich über jedes Maass, wenn diese Grenzwerthe unendlich gross sind. Dasselbe ist bei den Derivirten λ_x' und $\varLambda_x'$ der Fall.

---

§ 148. Diese sehr bemerkenswerthen Eigenschaften setzen die weitgehenden Singularitäten der Functionen in ein helles Licht, welche durch die oberen und unteren Derivirten dargestellt werden, wenn sie nicht in eine einzige Function zusammenfliessen, das heisst, wenn die Derivirte im gewöhnlichen Sinn nicht existirt.

1. In der That erhellt daraus zunächst: Wenn die Functionen λ_x und $\varLambda_x$ immer endlich und nicht immer einander gleich sind, so können sie zwar in jedem Punkt von einander verschieden sein, sind jedoch der Art, dass sie in unendlich vielen Punkten eines jeden beliebig kleinen Theils des Intervalls, in welchem sie in Betracht gezogen werden, einander so nahe liegen, wie man nur will. In unendlich vielen andern Punkten desselben Theils hingegen können sie auch um sehr merkbare Grössen von einander abweichen, die auch die Grösse $\varLambda - \lambda$ erreichen, aber nicht übertreffen können. Dasselbe gilt für die Functionen λ_x' und $\varLambda_x'$. Das heisst dann also: die

Function $\Lambda_x - \lambda_x$, welche die rechtsseitigen, und ebenso die Function $\Lambda_x' - \lambda_x'$, welche die linksseitigen derivatorischen Schwankungen darstellt, sind von der Beschaffenheit, dass für jede von ihnen in der Nähe eines jeden beliebigen Punktes der Intervalle, in welchen die Derivirten endlich sind, unendlich viele Punkte existiren, in welchen sie so nahe an Null herankommen, wie man nur will. Wenn daher zum Beispiel die durch die rechtsseitigen derivatorischen Schwankungen gebildete Function $\Lambda_x - \lambda_x$ in einem Punkt x' continuirlich ist, so muss sie in diesem Punkt gleich Null sein (§ 45) und die gegebene Function $f(x)$ hat also in demselben Punkt auf der rechten Seite eine endliche und bestimmte Ableitung.

Wenn so insbesondere die Derivirten einer Function in jedem Punkt eines Intervalls (a, b) (b ausgeschlossen wenn $b > a$) endlich sind und die rechtsseitige derivatorische Schwankung in jedem Punkt eine endliche und continuirliche Function darstellt, so ist diese Schwankung immer Null und die gegebene Function besitzt auf der rechten Seite stets eine endliche und bestimmte Ableitung.

2. Der Kürze wegen wollen wir nun die Begriffe der Stetigkeit und Unstetigkeit der ersten und zweiten Art, die für stets endliche Functionen galten, ausdehnen und eine Function, die in einem Punkt x_0 einen unendlich grossen Werth zum Beispiel $+\infty$ hat, stetig z. B. rechts von x_0 nennen, wenn die Grenze der Werthe, die sie rechts von x_0 annimmt, $+\infty$ ist und schlechtweg stetig in x_0, wenn die Grenze der Werthe, die sie rechts und links von x_0 annimmt, $+\infty$ ist etc. Macht man dann von dem Satz in dem vorigen Paragraphen Gebrauch, so lässt sich auch beweisen: Wenn eine der vier Derivirten z. B. λ_x in einem Punkt x_0 im Innern des in Betracht gezogenen Intervalls continuirlich ist (mag sie nun endlich oder unendlich gross sein), so sind die andern drei Derivirten Λ_x, λ_x', Λ_x' im Punkt x_0 ebenfalls stetig und gleich λ_{x_0} und die gegebene Function $f(x)$ besitzt in dem nämlichen Punkt x_0 eine bestimmte Ableitung im gewöhnlichen Sinn des Wortes (die übrigens nach der in § 72 eingeführten

Ausdrucksweise endlich oder unendlich gross mit bestimmtem Vorzeichen sein kann).

Denkt man sich nämlich eine äusserst kleine Umgebung $(x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_1)$ des Punktes x_0, so sind in dieser Umgebung die oberen und unteren Grenzwerthe der Function λ_x und daher auch der Functionen Λ_x, λ_x', Λ_x', wenn λ_{x_0} endlich ist, von λ_{x_0} um eine Grösse verschieden, die durch Verringerung von ε_0 und ε_1 sich so klein machen lässt, wie man nur will. Wenn dagegen λ_{x_0} unendlich gross ist, so sind diese Werthe numerisch grösser als jede beliebige Zahl c und haben das Vorzeichen von λ_{x_0}. Die nämlichen Eigenthümlichkeiten erhält man auch für die Grössen λ_{x_0}', Λ_{x_0} und Λ_{x_0}' und deshalb haben die Grössen λ_x, Λ_x, λ_x', Λ_x' im Punkt x_0 sämmtlich denselben Werth λ_{x_0} und sind continuirlich, was wir gerade behauptet hatten.

3. Hiernach ergiebt sich insbesondere: Wenn eine Function so beschaffen ist, dass eine ihrer vier Derivirten in allen Punkten im Innern eines Intervalls (a, b) stets continuirlich ist, so hat sie in diesen Punkten immer eine bestimmte und stetige Ableitung im gewöhnlichen Sinn des Wortes, welche dieser nämlichen Derivirten gleich ist. Wenn ferner in der Umgebung eines im Innern des Intervalls gegebenen Punktes eine Function $f(x)$ stets eine Ableitung auf der rechten Seite zulässt und die letztere in diesem Punkt stetig ist, so existirt in dem nämlichen Punkt auch eine linksseitige Ableitung, welche derjenigen auf der rechten Seite gleich ist und daher existirt auch die Derivirte im gewöhnlichen Sinn des Wortes (mag sie nun endlich oder unendlich gross mit bestimmtem Vorzeichen sein). Specieller noch kann man daher sagen: Wenn diese nämliche Function $f(x)$ in allen Punkten im Innern eines gegebenen Intervalls auf der rechten Seite eine Ableitung besitzt, und diese Ableitung stets endlich und stetig ist, so existirt in jedem dieser Punkte auch auf der linken Seite eine Ableitung und diese ist derjenigen auf der rechten Seite gleich und daher existirt stets die Derivirte im gewöhnlichen

Sinn des Wortes und ist eine endliche und stetige Function in jedem Theil des Intervalls, der nicht in den Endpunkten a oder b endigt.

In den Endpunkten können Singularitäten auftreten. Wenn aber z. B. $a < b$ und es sich um den Endpunkt b handelt und wenn dann die Derivirten auf der rechten Seite der Punkte, die sich links von b befinden, bei der unbeschränkten Annäherung dieser Punkte an b einen endlichen oder unendlich grossen Grenzwerth haben, alsdann sieht man sofort (und es ergiebt sich dies auch als Specialfall aus dem im vorigen Paragraphen Gesagten), dass dieser Grenzwerth genau die im Punkt b auf der linken Seite gelegene Ableitung ist. Und wenn so insbesondere dieser Grenzwerth endlich ist und wenn die Ableitung auf der rechten Seite der Punkte im Innern des Intervalls (a, b) stets endlich und continuirlich ist und man weiss, dass es auch diejenige rechts von a ist oder man wenigstens weiss, dass bei der unbeschränkten Annäherung an a eine bestimmte und endliche Grenze für die Werthe der Ableitung auf der rechten Seite existirt, alsdann kann man offenbar noch hinzufügen, dass die Derivirte (im gewöhnlichen Sinn) der $f(x)$ in dem ganzen Intervall (a, b) stets existirt und in diesem Intervall eine endliche und stetige Function darstellt.

4. Daraus geht dann weiter hervor: Wenn in jedem Punkt eines gegebenen Intervalls die stets auf einer und derselben Seite in Betracht gezogene Ableitung einer Function existirt und endlich aber discontinuirlich oder in einigen Punkten unendlich gross ist, so existirt entweder auf der anderen Seite keine Ableitung oder sie weist Singularitäten derselben Art auf, wobei es jedoch vorkommen kann, dass diese letztere Ableitung statt unendlich gross zu sein, Unendlich nur zur oberen (oder unteren) Grenze ihrer Werthe hat. Und speciell auch: Wenn die Ableitung auf der rechten Seite stets bestimmt und endlich und total discontinuirlich ist, so existirt diejenige auf der Linken entweder nicht oder, wenn sie existirt, so ist auch sie total discontinuirlich. Wenn dagegen die

Ableitung auf der rechten Seite immer bestimmt und endlich ist und in unendlich vielen Punkten jedes beliebigen noch so kleinen Theils des gegebenen Intervalls eine punktirt discontinuirliche Function darstellt, so muss auch die Ableitung zur Linken existiren und derjenigen zur Rechten gleich sein, so dass also in diesen Punkten auch die Derivirte im gewöhnlichen Sinn existirt. Man kann daher auch behaupten: Wenn eine endliche und continuirliche Function existirt, deren Ableitung auf der rechten Seite in allen Punkten eines gegebenen Intervalls stets bestimmt und endlich ist, während diejenige auf der linken Seite in keinem Punkt existirt oder wenigstens, wo sie existirt, stets von derjenigen auf der rechten Seite verschieden ist, so muss diese Ableitung auf der rechten Seite in jedem beliebigen Theil des gegebenen Intervalls eine total discontinuirliche Function sein.

5. Da ferner in jedem beliebigen Intervall die sämmtlichen rechten und linken Derivirten einer Function den nämlichen unteren und oberen Grenzwerth haben, so kann man offenbar nicht nur im Allgemeinen sagen: Wenn die verschiedenen Derivirten endlich sind, so sind ihre Schwankungen in jedem beliebigen Theil (a', b') des gegebenen Intervalls (a' oder b' ausgeschlossen) stets einander gleich, sondern man kann speciell noch zufügen: Wenn die rechts- und linksseitigen Ableitungen einer Function in den Punkten eines gegebenen Intervalls beiderseits bestimmt und endlich sind, so sind die Schwankungen der rechtsseitigen Ableitungen in den Punkten eines ganz beliebigen Theils (a', b') des nämlichen Intervalls (b' ausgeschlossen, wenn $a' < b'$) den Schwankungen der linksseitigen Ableitungen in den nämlichen Punkten (diesmal a' ausgeschlossen) gleich. Und ferner vermöge des Satzes in § 141: In diesem Fall sind in unendlich vielen Punkten dieses Theils (a', b') die Werthe der rechtsseitigen Ableitungen so wenig, wie man nur will, von den Werthen verschieden, welche die links-

seitige Ableitung in den nämlichen Punkten oder in anderen Punkten dieses selben Theils annimmt.

Zwölftes Kapitel.

Sätze über die Ableitungen und ihre Existenz.

§ 149. Den im vorigen Kapitel gewonnenen Resultaten reihen sich andere an, die nicht weniger wichtig sind und die ersteren vervollständigen und verallgemeinern.

Man betrachte eine der rechten Derivirten, zum Beispiel die untere λ_x und nehme an, x_0 sei ein von b verschiedener Punkt in dem bekannten Intervall (a, b) und die Function λ_x habe, wenn sich x auf der rechten Seite unbeschränkt dem x_0 nähert, einen bestimmten Grenzwerth (endlich oder unendlich gross mit bestimmtem Vorzeichen), den wir mit λ_{x_0+0} bezeichnen wollen.

Alsdann sind sämmtliche Werthe von λ_x, wenn λ_{x_0+0} endlich ist, in den Punkten jeder hinreichend kleinen Umgebung $(x_0, x_0+\varepsilon)$ rechts von x_0 (x_0 augenblicklich ausgeschlossen) zwischen $\lambda_{x_0+0}-\sigma$ und $\lambda_{x_0+0}+\sigma$ enthalten, wenn σ eine gegebene positive beliebig kleine Zahl ist. Wenn ferner λ_{x_0+0} unendlich gross ist, so haben alle diese Werthe das Vorzeichen von λ_{x_0+0} und sind numerisch grösser als eine gegebene positive und beliebig grosse Zahl c. In Folge des Satzes in § 147 haben dann, wenn ε_1 eine beliebige positive Zahl ist, die kleiner als ε ist, auch die übrigen Derivirten Λ_x, λ_x', Λ_x' in jedem Intervall $(x_0+\varepsilon_1, x_0+\varepsilon)$ dieselben Eigenthümlichkeiten. Insbesondere sind also die Werthe von λ_x' und Λ_x' für alle Punkte der Umgebung $(x_0, x_0+\varepsilon)$ (x_0 ausgeschlossen) und ebenso auch ihre unteren und oberen Grenzwerthe λ' und Λ' zwischen $\lambda_{x_0+0}-\sigma$ und $\lambda_{x_0+0}+\sigma$ enthalten oder haben dasselbe Vorzeichen wie λ_{x_0+0} und sind numerisch grösser als c.

Aber λ' und Λ' sind die Grenzen (§ 147) auch für die Werthe der Functionen λ_x und Λ_x in den Punkten dieses Intervalls $(x_0, x_0+\varepsilon)$ (x_0 jetzt eingeschlossen). Daher müssen

auch λ_{x_0} und Λ_{x_0} die oben erwähnten Eigenthümlichkeiten besitzen und man erhält also offenbar

$$\lambda_{x_0+0} = \lambda_{x_0} = \Lambda_{x_0} = \lim \lambda_x = \lim \Lambda_x = \lim \lambda_x' = \lim \Lambda_x',$$

wobei man die Grenzwerthe für $x = x_0 + 0$ zu nehmen hat.

Aehnliche Resultate ergeben sich, wenn man von der Voraussetzung ausgeht, λ_x' oder Λ_x' habe für $x = x_0 + 0$ einen bestimmten Grenzwerth und eine der linken Derivirten in den Umgebungen $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ links von x_0 (wobei man jedoch x_0 verschieden von a anzunehmen hat) in Betracht zieht. Man kann daher offenbar für jede Function $f(x)$, die in einem Intervall (a, b) endlich und continuirlich ist, die Sätze aufstellen:

1. Die rechten Derivirten können niemals gewöhnliche Discontinuitäten rechts von den Punkten dieses Intervalls (b ausgeschlossen) und die linken können solche Discontinuitäten niemals links von diesen Punkten haben (diesmal a ausgeschlossen), das heisst also, dass rechts bezüglich links von den Punkten des Intervalls (a, b) die rechten oder linken Derivirten continuirlich sind oder nur Discontinuitäten der zweiten Art haben.

2. Wenn eine der rechten Derivirten z. B. λ_x in einem Punkt x_0 des Intervalls (a, b) (b ausgeschlossen) auf der rechten Seite stetig ist, so ist es auch die andere rechte Derivirte Λ_x und in x_0 sind diese beiden einander gleich, so dass in diesem Punkt x_0 eine rechtsseitige Ableitung (gleichviel ob endlich oder unendlich gross) existirt.

3. Unter denselben Voraussetzungen sind auch die linken Derivirten λ_x' und Λ_x' im Punkt x_0 auf der rechten Seite continuirlich oder sie haben doch nur eine gewöhnliche Unstetigkeit und ihr Werth im Punkt x_0 oder die Grenze ihrer Werthe rechts von x_0 ist der Ableitung rechts von x_0 gleich.

4. Wenn eine der linken Derivirten λ_x' oder Λ_x' im Punkt x_0 auf der rechten Seite continuirlich ist oder nur eine gewöhnliche Discontinuität hat, so weist

auch die andere Derivirte die eine oder andere dieser Eigenschaften auf und die rechtsseitigen Derivirten λ_x und Λ_x sind im Punkt x_0 auf der Rechten continuirlich, und die gegebene Function hat auf der rechten Seite eine bestimmte Ableitung, die dem gemeinschaftlichen Werth der Grössen

$$\lambda_{x_0}, \quad \Lambda_{x_0}, \quad \lambda'_{x_0+0}, \quad \Lambda'_{x_0+0}$$

gleichkommt. Eine rechtsseitige Ableitung im Punkt x_0 kann folglich nur dann fehlen, wenn Eine der Derivirten in diesem Punkt x_0 auf der rechten Seite eine Unstetigkeit der zweiten Art aufweist, und wenn dieser Fall bei einer der Derivirten eintritt, so tritt er auch bei den Uebrigen ein. Man kann offenbar noch hinzufügen: Wenn eine Derivirte im Punkt x_0 auf der rechten Seite eine Unstetigkeit der zweiten Art hat, dann liegen in diesem Punkt x_0 die Werthe der rechten Derivirten oder der Werth der rechten Ableitung zwischen den zwei Zahlen, zwischen welchen die Schwankungen aller Derivirten schliesslich stattfinden, wenn man sich dem Punkt x_0 von seiner rechten Seite her ohne Ende nähert.

Speciell lässt sich dann noch behaupten: Wenn eine endliche und continuirliche Function $f(x)$ in den Punkten x eines gegebenen Intervalls (a, b) eine rechtsseitige Ableitung (endlich oder unendlich gross) d_x besitzt, so muss diese Ableitung d_x rechts von den nämlichen Punkten continuirlich sein oder nur eine Discontinuität der zweiten Art haben. Und wenn $f(x)$ in diesen Punkten stets auch eine einzige linksseitige Ableitung d_x' besitzt, alsdann ist die rechtsseitige Ableitung d_x in denjenigen Punkten x, auf deren rechter Seite die Ableitung d_x' continuirlich ist oder nur eine gewöhnliche Unstetigkeit hat, auf der rechten Seite continuirlich und hat den Werth d'_{x+0}. Und umgekehrt: Wenn der Punkt x im Innern des Intervalls (a, b) liegt und d_x in x auf der rechten Seite stetig ist, so ist auch d_x' im Punkt x auf der rechten

Seite continuirlich oder hat eine gewöhnliche Unstetigkeit. Also überhaupt: Wenn bei einer endlichen und stetigen Function die auf einer Seite der Punkte eines gegebenen Intervalls (a, b) in Betracht gezogene Ableitung z. B. die rechtsseitige Ableitung immer bestimmt ist und wenigstens links von den entsprechenden Punkten niemals eine Discontinuität von der zweiten Art hat, so existirt auch die linksseitige Ableitung und ist stets auf der linken Seite continuirlich (a und b jetzt ausgeschlossen).

---

§ 150. Wir bemerken weiter: Wenn eine endliche und stetige Function $f(x)$ in einem Intervall (a, b) rechts stets eine bestimmte und endliche Ableitung hat und diese Ableitung d_x in gewissen Punkten eines jeden beliebigen noch so kleinen Theils dieses Intervalls Null und rechts von jedem Punkt stetig ist, so reducirt sich die gegebene Function auf eine Constante. Denn da die Function d_x in jedem Punkt x_0 rechts continuirlich ist, während sie in Punkten rechts von x_0 und so nahe an x_0, als man nur will, den Werth Null annimmt, so ist stets $d_x = 0$ und daher $f(x) =$ const. (§ 79 oder § 146).

Daraus lässt sich ableiten: Wenn zwei Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, welche in einem Intervall (a, b) endlich und continuirlich sind, in allen Punkten dieses Intervalls (b ausgeschlossen) auf der rechten Seite stets bestimmte und endliche Ableitungen haben und diese Ableitungen in gewissen Punkten eines jeden beliebigen noch so kleinen Theils des gegebenen Intervalls einander gleich sind und rechts von jedem Punkt stets stetig sind, so weichen die beiden Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nur um eine constante Grösse von einander ab. Denn ihre Differenz $\varphi(x) - \psi(x)$ befindet sich genau in dem Fall der Function $f(x)$ des vorigen Satzes.

Nach dem vorigen Paragraphen kann die in den letzten Sätzen gestellte Bedingung, dass die rechtsseitigen Ableitungen der Functionen $f(x)$ oder $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ rechts von jedem

Punkt stetig sein sollen, durch die Bedingung ersetzt werden, dass diese nämlichen Ableitungen niemals eine Discontinuität der zweiten Art rechts von den entsprechenden Punkten haben sollen.

---

§ 150*. Die Betrachtungen, die wir § 72, 4* (Seite 97) angestellt haben, können wir nun hier wiederholen, indem wir statt der Ableitung eine der vier Derivirten ins Auge fassen. Aus der Thatsache, dass für die dort benutzte Function $\varphi(x, c)$ und den bestimmten Punkt ξ die Differenz

$$\varphi(\xi + h, c) - \varphi(\xi, c) > 0$$

für positive h ist, schliessen wir, dass die untere rechte Derivirte für diese Function $\geqq 0$ sein muss.

Es möge nun für die Function $f(x)$ bekannt sein, dass für alle x zwischen α und β die untere rechte Derivirte von $f(x)$ Null ist. Nur für die Punkte einer abzählbaren Menge G möge über das Verhalten der unteren rechten Derivirten nichts bekannt sein.

Gesetzt ξ gehöre nicht zu G, dann giebt es zu einer positiven Grösse δ beliebig kleine Werthe von h, für die

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} < \delta$$

und

$$\frac{\varphi(\xi + h, c) - \varphi(\xi)}{h} < -c + \delta$$

ist.

Folglich kann die untere rechte Derivirte von $\varphi(x, c)$ für $x = \xi$ nicht grösser als $-c$ sein. Da wir oben gefunden haben, dass sie $\geqq 0$ sein muss, so muss ξ zu G gehören. Von jetzt an kann man wörtlich wie früher weiter schliessen und findet, dass die Function $f(x)$ constant sein muss.

Was hier für die untere rechte Derivirte bewiesen ist, lässt sich leicht auf eine der drei anderen Derivirten übertragen. Man kann hieraus weiter ableiten:

Wenn man von zwei stetigen Functionen $f(x)$, $F(x)$ weiss, dass in einem Intervalle $\alpha \ldots \beta$ ihre unteren rechten (oder oberen rechten u. s. w.) Derivirten einander gleich sind, höchstens mit Ausnahme

einer abzählbaren Menge G von Punkten, in welchen über das Verhalten jener Derivirten nichts bekannt ist, so ist im ganzen Intervall die Differenz $F(x)-f(x)$ constant[1]).

Es sei nämlich für einen nicht zu G gehörigen Punkt x die untere rechte Derivirte von $f(x)$ und $F(x)$ gleich λ_x. Dann kann man zu einem positiven δ beliebig kleine positive h finden, für die

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} < \lambda_x + \delta$$

und für alle gehörig kleinen positiven h ist

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} > \lambda_x - \delta .$$

Daher ist für gewisse beliebig kleine positive h

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{F(x+h)-F(x)}{h} < 2\delta ,$$

so dass die untere rechte Derivirte von $f(x) - F(x)$ nicht > 0 sein kann. Vertauscht man f mit F, so zeigt sich auch, dass die fragliche Derivirte nicht < 0 sein kann, folglich $= 0$ sein muss. Da für alle nicht zu G gehörigen x die untere rechte Derivirte von $f(x) - F(x)$ gleich Null ist, so ist folglich nach dem früheren Satze diese Differenz constant.

---

§ 151. Um jetzt zu einem andern analogen Satz zu gelangen, in welchem die Ableitungen rechts und links auftreten, beweisen wir zunächst: Wenn eine endliche Function $f(x)$ in einem Intervall (a, b) unendlich oft unstetig ist und entweder nur gewöhnliche Unstetigkeiten auftreten oder doch wenigstens stets in jedem Theil des Intervalls (a, b) Punkte existiren, in welchen $f(x)$ wenigstens auf der einen Seite stetig ist oder nur gewöhnliche Unstetigkeiten hat, so ist diese Function in dem gegebenen Intervall (a, b) stets punktirt unstetig.

Unter dieser Voraussetzung kann man in der That in jedem Theil des Intervalls (a, b) immer einen im Innern ge-

1) Scheeffer, Acta Math. Bd. 5 S. 282.

legenen Punkt x_1 von der Beschaffenheit finden, dass die Werthe der $f(x)$, wenn x sich von der rechten Seite oder auch von der linken dem Punkt x_1 nähert, einen bestimmten und endlichen Grenzwerth haben. Für alle Punkte ξ, η einer rechtsseitigen hinreichend kleinen Nachbarschaft $(x_1, x_1 + \varepsilon)$ des Punktes x_1 oder für die Punkte ξ, η einer linksseitigen hinreichend kleinen Nachbarschaft $(x_1 - \varepsilon_1, x_1)$ von x_1 (höchstens die Endpunkte ausgeschlossen) ist daher

$$|f(\xi) - f(\eta)| < \sigma,$$

unter σ eine positive, beliebig kleine Zahl verstanden.

Daraus folgt, dass in jedem Theil wenigstens einer der beiden Nachbarschaften rechts oder links von x_1 die Sprünge der Function die Zahl σ niemals erreichen oder übertreffen können. Es existiren daher in jedem Theil des Intervalls (a, b) stets andere Gebiete, in welchen die Function nur Sprünge macht, die kleiner als eine gegebene positive beliebig kleine Zahl σ sind und diese Function ist daher (§ 64) in dem Intervall (a, b) punktirt unstetig, wie zu beweisen war.

---

§ 152. Daraus und aus den vorigen Paragraphen ergiebt sich nun der zu Anfang des § 151 erwähnte Satz sehr leicht; er lautet: Es bezeichne $\varphi(x)$ eine Function, die in einem Intervall (a, b) endlich und stetig ist und in den Punkten dieses Intervalls (b ausgeschlossen) stets eine rechtsseitige Ableitung d_x hat, welche nicht nur bestimmt und endlich, sondern auch in jedem Punkt auf der rechten Seite continuirlich ist. Es sei ferner $\psi(x)$ eine andere Function, die endlich und continuirlich ist und in allen Punkten des Intervalls (a, b) (a ausgeschlossen) stets eine linksseitige, bestimmte und endliche Ableitung δ_x' hat, welche niemals rechts von den einzelnen Punkten eine Unstetigkeit der zweiten Art aufweist. Wenn es alsdann so kommt, dass in einem beliebigen Theil des gegebenen Intervalls diese Ableitungen d_x und δ_x' in gewissen Punkten, in welchen δ_x' continuirlich ist, auch einander gleich sind, so können die beiden Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$

nur um eine constante Grösse von einander verschieden sein.

Denn nach den Ausführungen in § 148 oder auch nach denjenigen in § 149 stellt δ_x' in den Punkten, in welchen es continuirlich ist, gleichzeitig sowohl die linksseitige als die rechtsseitige Ableitung der Function $\psi(x)$ dar, so dass in diesen Punkten δ_x' stets auch als die rechtsseitige Derivirte der $\psi(x)$ betrachtet werden kann. Andererseits existiren nach dem Satz des vorigen Paragraphen in jedem beliebig kleinen Theil des Intervalls (a, b) thatsächlich unendlich viele Punkte, in denen δ_x' continuirlich ist. Weil demnach in einer Anzahl dieser Punkte $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ stets dieselben rechtsseitigen Ableitungen haben, und nach dem, was am Schluss des § 149 gesagt wurde, auch die rechtsseitigen Ableitungen der Function $\psi(x)$ rechts von jedem Punkt stetig sind, so sieht man mit Rücksicht auf den zweiten Satz in § 150 sofort, dass

$$\psi(x) - \varphi(x) = \text{const.},$$

womit der Satz bewiesen ist.

Es lässt sich hier noch bemerken, dass man, wie in § 149 auch in diesem Satz die Bedingung, dass die Function d_x rechts von den einzelnen Punkten stets stetig sein soll, auch durch die andere ersetzen kann, dass sie keine Unstetigkeit der zweiten Art haben soll. Ferner: Auf Grund von Ueberlegungen, wie sie in § 72, 4 und auch bei anderen Gelegenheiten angestellt wurden, lassen sich die Sätze der drei letzten Paragraphen auch auf den Fall ausdehnen, dass in dem gegebenen Intervall eine (endliche oder unendlich grosse) Menge von Punkten der ersten Gattung vorhanden ist, bei welchen es ungewiss ist, ob die Bedingungen, die für die übrigen Punkte gelten, erfüllt sind oder nicht etc.

---

§ 153. Das Theorem in § 151 gestattet uns weiter den folgenden Satz aufzustellen: Wenn eine Function $f(x)$ in einem Intervall (a, b) endlich und total unstetig ist, so muss stets ein Theil dieses Intervalls existiren der Art, dass in jedem Punkt desselben die Function sowohl zur Rechten wie zur Linken eine Unstetig-

keit der zweiten Art hat. Dem lässt sich mit Rücksicht auf den Satz 2 des § 148 auch zufügen: Wenn die Derivirten einer endlichen und continuirlichen Function $f(x)$ in einem gegebenen Intervall (a, b) immer endlich sind, so kann die Derivirte dieser Function im gewöhnlichen Sinn in jedem Punkt nur in dem Fall fehlen, wenn in jedem Theil des gegebenen Intervalls immer andere Theile existiren, in welchen die Derivirten für jeden Punkt sowohl rechts als links Unstetigkeiten der zweiten Art haben.

---

§ 154. Es verdient jetzt bemerkt zu werden, dass man für die Punkte, in welchen λ_x und Λ_x endlich sind, bei positivem und hinreichend kleinem h immer setzen darf:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\lambda_x + \Lambda_x}{2} + \Theta_{x,h}\frac{\Lambda_x - \lambda_x}{2} + \varepsilon_{x,h},$$

worin $\varepsilon_{x,h}$ eine Grösse bedeutet, die gleich Null ist oder dem absoluten Werth nach bei abnehmendem h immer kleiner als irgend eine beliebige gegebene Grösse gemacht werden kann und worin $\Theta_{x,h}$ eine Grösse bedeutet, die zwischen -1 und 1 (mit Einschluss dieser Grenzwerthe) variirt.

Ebenso erhält man, wenn in einem Punkt x die Functionen λ_x' und Λ_x' endlich sind, bei positivem h:

$$\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = \frac{\lambda_x' + \Lambda_x'}{2} + \Theta_{x,h}'\frac{\Lambda_x' - \lambda_x'}{2} + \varepsilon_{x,h}',$$

worin $\Theta_{x,h}'$ und $\varepsilon_{x,h}'$ dieselbe Bedeutung wie die $\Theta_{x,h}$, $\varepsilon_{x,h}$ in der vorigen Formel haben. Wenn also λ_x und Λ_x oder λ_x' und Λ_x' endlich sind und nicht $\lambda_x = \Lambda_x$ oder $\lambda_x' = \Lambda_x'$ ist (das heisst, wenn die Ableitung rechts oder diejenige links nicht existirt), so geben die vorstehenden Gleichungen eine sehr einfache Zerlegung der rechts- und linksseitigen Zuwachsverhältnisse in einen festen Theil

$$\frac{\lambda_x + \Lambda_x}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda_x' + \Lambda_x'}{2}$$

und einen Theil

$$\Theta_{x,h}\frac{\Lambda_x - \lambda_x}{2} + \varepsilon_{x,h} \quad \text{oder} \quad \Theta_{x,h}'\frac{\Lambda_x' - \lambda_x'}{2} + \varepsilon_{x,h}',$$

der beständig zwischen

$$-\frac{\varLambda_x - \lambda_x}{2} - \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{\varLambda_x - \lambda_x}{2} + \varepsilon$$

oder zwischen

$$-\frac{\varLambda_x' - \lambda_x'}{2} - \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{\varLambda_x' - \lambda_x'}{2} + \varepsilon,$$

wenn ε eine positiv beliebig kleine Grösse ist, hin und her schwankt.

Der feste Theil nun

$$\frac{\lambda_x + \varLambda_x}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda_x' + \varLambda_x'}{2}$$

reducirt sich auf die Ableitung rechts bezüglich links vom Punkt x, wenn die eine oder die andere dieser Ableitungen vorhanden ist. Es wäre deshalb vielleicht möglich, dass diese Ausdrücke mit Vortheil an Stelle der Ableitungen rechts oder links von x in Betracht gezogen werden könnten, wenn diese letzteren nicht existiren und λ_x, $\varLambda_x$, λ_x', $\varLambda_x'$ endliche Grössen sind.

Es ist klar, dass die vorstehenden Gleichungen in allen Punkten des in Betracht gezogenen Intervalls Geltung haben, wenn die diesem Intervall entsprechenden Zahlen λ und $\varLambda$ beide endlich sind.

---

§ 155. Wir ziehen nun gleichzeitig mit der Function $f(x)$, die wie bisher endlich und stetig ist, die unendlich vielen ebenfalls endlichen und stetigen Functionen

$$\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$$

in Betracht, die sich aus $f(x)$ durch Subtraction der Linearfunctionen $\mu x + \nu$ ergeben und von denen die gegebene Function $f(x)$ nur ein Specialfall ist (der $\mu = 0$ und $\nu = 0$ entspricht). Wir sehen dann nur diejenigen Functionen $\varphi(x)$ als von einander verschieden an, die durch den verschiedenen Werth von μ von einander abweichen, da ja der Werth der Constanten ν weder auf die Derivirten noch auf die Zuwachsverhältnisse Einfluss hat.

Man erkennt leicht: Soll die bisherige Function $f(x)$ in einem Punkt x_0 eine rechtsseitige bestimmte Ab-

leitung (endlich oder unendlich gross) haben, so ist dazu nöthig und ausreichend, dass unter den unendlich vielen Functionen $\varphi(x)$, die man aus $f(x)$ durch Subtraction der Linearfunction $\mu x + \nu$ (die Function $f(x)$ eingeschlossen) erhält, höchstens Eine vorhanden sei, welche, rechts von x_0 betrachtet, in diesem Punkt x_0 weder wächst noch abnimmt[1]).

Ist nämlich zunächst die Ableitung der $f(x)$ im Punkt x_0 zur Rechten vorhanden, aber $= +\infty$ oder $= -\infty$, so wachsen die Functionen $\varphi(x)$, in den Nachbarschaften von x_0, zur Rechten betrachtet, sämmtlich, bezüglich nehmen sie sämmtlich ab. Denn für jeden Werth von μ existirt ein positiver Werth h_1 derart, dass man bei positivem und unter h_1 bleibendem h im ersten Fall stets erhält:

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \mu > 0$$

und im zweiten

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \mu < 0.$$

Daher ist im ersten Fall

$$\varphi(x_0 + h) > \varphi(x_0)$$

und im zweiten

$$\varphi(x_0 + h) < \varphi(x_0).$$

Wenn dagegen die rechtsseitige Ableitung der $f(x)$ im Punkt x_0 existirt und einen endlichen Werth a hat, so überzeugt man sich leicht auf dieselbe Art, dass die Functionen

$$\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu,$$

welche den Werthen von μ entsprechen, die kleiner sind als a, sämmtlich im Punkt x_0 wachsen, dagegen diejenigen mit einem μ, das grösser als a ist, sämmtlich abnehmen. Man bleibt nur über das Verhalten der Function

$$\varphi(x) = f(x) - ax - \nu$$

1) Eine Function, welche, in einer Nachbarschaft $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ rechts von x_0 betrachtet, in diesem Punkt x_0 weder wächst noch abnimmt, muss nothwendiger Weise zwischen x_0 und $x_0 + \varepsilon$ eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima oder muss einen in x_0 endigenden Invariabilitätszug haben (§ 58).

im Ungewissen, die einem $\mu = a$ entspricht. Es ist deshalb offenbar die oben gestellte Bedingung für die Existenz der Ableitung der $f(x)$ rechts von x_0 nothwendig.

Nimmt man nun an, diese Bedingung sei erfüllt, so ist offenbar die Ableitung der $f(x)$ im Punkt x_0 rechts bestimmt und die Bedingung ist daher für die Existenz dieser Ableitung auch ausreichend.

Setzt man in der That zunächst voraus, die Functionen $\varphi(x)$, welche wie früher in einer Nachbarschaft rechts vom Punkt x_0 in Betracht gezogen werden, wüchsen sämmtlich in diesem Punkt x_0 oder nähmen sämmtlich ab, alsdann erhält man für jedes beliebige μ und für alle Werthe von h, die kleiner sind als eine positive passend ausgewählte Zahl, immer:

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \mu h > 0$$

oder

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \mu h < 0.$$

Daraus folgt, dass die Ableitung der $f(x)$ im Punkt x_0 zur Rechten existirt, jedoch $= +\infty$ bezüglich $= -\infty$ ist. Wenn im Punkt x_0 ein Theil der Functionen $\varphi(x)$ wächst und ein anderer abnimmt, so beachte man, dass nach der gemachten Voraussetzung höchstens ein einziger Werth von μ existirt, für welchen die entsprechende Function $\varphi(x)$ im Punkt x_0 weder wächst noch abnimmt. Man bemerke ferner, dass, wenn die dem Werth μ_1 von μ entsprechenden Functionen $\varphi(x)$ in x_0 wachsen, dasselbe auch bei denen der Fall ist, die einem kleineren Werth von μ, als μ_1, zugehören, und wenn die dem Werth μ_2 von μ entsprechenden Functionen abnehmen, dass dann dasselbe auch für diejenigen gilt, die zu einem grösseren Werth von μ, als μ_2 ist, gehören. Man sieht alsdann sofort, dass im vorliegenden Fall ein bestimmter und endlicher Werth a von der Beschaffenheit existirt (§ 9), dass die Functionen

$$\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$$

für $\mu < a$ in x_0 sämmtlich wachsen und für $\mu > a$ sämmtlich abnehmen. Folglich existirt für jeden positiven und beliebig kleinen Werth von ε eine positive Zahl h_1 von der Art, dass man für positive h, die kleiner als h_1 sind, stets erhält:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - (a - \varepsilon) h > 0,$$
$$f(x_0 + h) - f(x_0) - (a + \varepsilon) h < 0,$$

oder:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - ah > - \varepsilon h,$$
$$f(x_0 + h) - f(x_0) - ah < \varepsilon h,$$

und deshalb auch:

$$\lim \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a.$$

Da also in diesem Fall die rechtsseitige Ableitung der $f(x)$ im Punkt x_0 existirt, so folgt, dass die Bedingung, von der wir ausgegangen sind, thatsächlich für die Existenz dieser Ableitung ausreicht. Damit ist der oben aufgestellte Satz vollständig bewiesen.

Indem man diesen Satz auf die einzelnen Punkte eines gegebenen Intervalls anwendet, kann man leicht feststellen, ob eine Function, die in einem ganzen Intervall endlich und stetig ist, eine bestimmte rechtsseitige (oder linksseitige) Ableitung für jeden Punkt dieses Intervalls besitzt oder nicht.

---

§ 156. Das Verfahren, das wir eingeschlagen haben, um den vorigen Satz zu beweisen, erlaubt uns offenbar auch das Folgende zu behaupten: Soll die bisherige Function $f(x)$ in einem Punkt x_0 auf der rechten Seite eine bestimmte und endliche Ableitung haben, so ist dazu nothwendig und ausreichend, dass unter den unendlich vielen Functionen $\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$, die sich aus $f(x)$ durch Subtraction (oder Addition) der verschiedenen Linearfunctionen $\mu x + \nu$ (die $f(x)$ eingeschlossen), ergeben, einige wachsen und einige abnehmen, wenn sie nur rechts vom Punkt x_0 in Betracht gezogen werden und dass unter ihnen höchstens Eine vorhanden sei, die in x_0 weder wächst noch abnimmt oder auch, was dasselbe ist, dass eine $\varphi(x) = f(x) - ax - \nu$ vorhanden sei, welche eine Grenzscheide zwischen den Functionen $\varphi(x)$, welche in x_0 wachsen und denjenigen bilden, die in x_0 abnehmen, so dass also, wenn

$\mu < a$, diese Functionen in x_0 sämmtlich wachsen und für $\mu > a$ sämmtlich abnehmen.

Wenn ferner der Punkt x_0 einem Intervall angehört, in welchem der untere und obere Grenzwerth λ und Λ der Derivirten endlich ist, so müssen nothwendigerweise einige der Functionen $\varphi(x)$ in x_0 wachsen, andere abnehmen und man hat sich alsdann nur mit der zweiten Bedingung zu beschäftigen, welche lediglich das allgemeine Erforderniss ist. Wir bemerken weiter: Wenn $\varphi(x) = f(x) - ax - \nu$ die Function ist, welche die Scheidegrenze zwischen den Functionen $\varphi(x)$, welche in x_0 wachsen und denjenigen bildet, welche in x_0 abnehmen, so ist die Ableitung der $f(x)$ rechts von x_0 gerade a.

---

§ 157. Wenn dann ferner eine Function in hinreichend kleinen Nachbarschaften $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ rechts von einem Punkt x_0 nicht eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hat, so muss sie im Punkt x_0 nothwendiger Weise wachsen oder abnehmen oder x_0 muss für sie die Bedeutung des Grenzpunktes eines Invariabilitätszuges haben (§ 58). Wenn eine der bisherigen Functionen $\varphi(x)$ z. B. $\varphi(x) = f(x) - ax - \nu$ wie früher in der Nachbarschaft $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ rechts von x_0 in Betracht gezogen wird und in x_0 einen Invariabilitätsgrenzpunkt besitzt, so wachsen die andern Functionen $\varphi(x) - \mu x - \nu$, wenn $\mu < a$, nehmen dagegen ab, wenn $\mu > a$ ist. Und weiter: Wenn eine Function $\varphi(x)$ z. B. $\varphi(x) = f(x) - ax - \nu$ in x_0 wächst, so thun dies auch die Functionen $\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$, die $\mu < a$ entsprechen; fällt dagegen diese Function im Punkte x_0, so ist dies auch mit den Functionen $\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$, die $\mu > a$ entsprechen, der Fall.

Daraus folgt dann sofort: Wenn keine der Functionen $\varphi(x)$ (die $f(x)$ eingeschlossen) in einer hinreichend kleinen Nachbarschaft $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ rechts von x_0 unendlich viele Maxima und Minima hat, so liegt offenbar der Fall der Existenz der Ableitung der $f(x)$ rechts von x_0 vor (§ 155). Dasselbe ist auch der Fall, wenn unter diesen Functionen $\varphi(x)$ nur eine e n d l i c h e Anzahl m vorhanden ist, wie zum Beispiel die Functionen

$$\varphi_1(x) = f(x) - \mu_1 x - \nu,\quad \varphi_2(x) = f(x) - \mu_2 x - \nu, \ldots,$$
$$\varphi_m(x) = f(x) - \mu_m x - \nu,$$

welche zwischen x_0 und $x_0 + \varepsilon$ eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima haben. Denn es kann in diesem letzten Fall offenbar von Functionen, die in x_0 weder wachsen noch abnehmen, nur Eine vorhanden sein, die entweder zu den Functionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$, $\varphi_m(x)$ oder zu den Functionen $\varphi(x)$ gehört, welche einem andern Werth von μ entsprechen und für welche der Punkt x_0 ein Invariabilitätsgrenzpunkt ist. Man hat mithin folgenden Satz: Wenn eine endliche und stetige Function $f(x)$ in einer hinreichend kleinen Nachbarschaft $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ rechts von x_0 nicht unendlich viele Maxima und Minima hat und sie auch nicht bekommt, wenn man eine ganz beliebige Linearfunction $\mu x + \nu$ subtrahirt (oder addirt); oder auch: wenn unter den unendlich vielen Functionen $\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$, die sich so ergeben (die $f(x)$ eingeschlossen), nur einige in endlicher Anzahl vorhanden sind, die in der nämlichen Umgebung eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima haben, alsdann hat die vorgenannte Function $f(x)$ in dem Punkt x_0 eine rechtsseitige bestimmte Ableitung. Diese Ableitung ist auch endlich, wenn unter den Functionen $\varphi(x)$ einige wachsen und einige in x_0 auf der rechten Seite abnehmen oder wenn der Punkt x_0 einem Intervall angehört, in welchem die oben besprochenen der $f(x)$ entsprechenden Grenzzahlen λ und Λ beide endlich sind.

---

§ 158. Wenn wir uns die Bemerkungen in den §§ 143 und 144 ins Gedächtniss zurückrufen, so wären wir jetzt in den Stand gesetzt, einen Lehrsatz über die Existenz und Beschaffenheit der Ableitungen zur Rechten und zur Linken für Functionen aufzustellen, die in Bezug auf die Maxima und Minima dasselbe Verhalten wie die Functionen in den obigen Paragraphen zeigen. Wir ziehen es indessen vor, statt dessen einige andere Erörterungen zu geben, mit deren Hülfe der

gedachte Satz sich dann auf eine viel umfassendere Klasse von Functionen anwenden lässt.

Man bezeichne zu dem Ende mit $f(x)$ eine beliebige endliche und stetige Function und ziehe wie bisher die Functionen $\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$ in Betracht. Man setze ferner voraus, in den Nachbarschaften z. B. rechts von einem Punkt x_0, deren Ausdehnung mit dem Werth von μ auch variiren kann, habe keine der Functionen $\varphi(x)$, höchstens diejenigen ausgenommen, die einer endlichen Anzahl Werthe $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ von μ ($\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0, \ldots, \mu_m = 0$ oder $f(x)$ eingeschlossen) entsprechen, eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima.

Alsdann hat nach dem Satz des vorigen Paragraphen die Function $f(x)$ im Punkt x_0 eine rechtsseitige bestimmte Ableitung d_{x_0} und wenn diese Ableitung d_{x_0} endlich ist, so wird die Function $\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$, welche rechts von x_0 in einer Umgebung in Betracht gezogen wird, deren Ausdehnung in der Regel von dem Werth von μ abhängt, für $\mu < d_{x_0}$ wachsen und wenn $\mu > d_{x_0}$ abnehmen. Deshalb also und auch auf Grund der Voraussetzung, die wir in Bezug auf die Maxima und Minima der Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ in den Nachbarschaften von x_0 gemacht haben, wird für jeden speciellen Werth von μ, der von den Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, wenn sie überhaupt existiren, verschieden ist, ein Intervall von endlicher Ausdehnung $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ rechts von x_0 der Art existiren, dass man für jeden seiner Punkte x (die Endpunkte ausgeschlossen) für ein positives und hinreichend kleines h erhält:

$$\frac{\varphi(x \pm h) - \varphi(x)}{\pm h} > 0 \text{ für } \mu < d_{x_0}$$

und

$$\frac{\varphi(x \pm h) - \varphi(x)}{\pm h} < 0 \text{ für } \mu > d_{x_0}$$

oder aber:

$$\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h} > \mu \text{ für } \mu < d_{x_0}$$

und

$$\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h} < \mu \text{ für } \mu > d_{x_0}.$$

Da nun die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, obgleich sie in Betracht

gezogen werden müssen, doch nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, so wird, auch wenn d_{x_0} einer von ihnen gleich ist, eine von Null verschiedene positive Zahl σ_1 von der Art existiren, dass die vorstehenden Ungleichungen für alle Werthe von μ Geltung haben, die von d_{x_0} verschieden sind und zwischen $d_{x_0} - \sigma_1$ und $d_{x_0} + \sigma_1$ liegen. Nimmt man also einmal an, dass $\mu = d_{x_0} - \sigma$ und dann $\mu = d_{x_0} + \sigma$, wo σ positiv, kleiner als σ_1 und beliebig klein ist, so kommt man alsbald zu dem Schluss, dass, wenn d_{x_0} endlich ist, die Derivirten λ_x, Λ_x, λ_x', Λ_x' der $f(x)$ in Bezug auf die rechts von x_0 gelegenen Punkte x für $x = x_0 + 0$ sämmtlich zum Grenzwerth die Ableitung rechts von x_0, das heisst d_{x_0}, haben.

In ähnlicher Art bemerkt man, wenn z. B. $d_{x_0} = +\infty$, dass bei jedem beliebigen μ die rechts von x_0 in Betracht gezogenen Functionen $\varphi(x)$ sämmtlich in x_0 wachsen. Wenn also die Function $f(x)$ in Bezug auf die Maxima und Minima den oben erwähnten Bedingungen genügt, so wird für jeden speciellen, hinreichend grossen Werth von μ ein Intervall $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, das klein genug, dessen Ausdehnung aber von Null verschieden ist, rechts von x_0 der Art existiren, dass für jeden Punkt x des Intervalls (x_0 ausgeschlossen) stets gilt:

$$\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h} > \mu.$$

Wenn sich daher x dem x_0 von rechts her nähert, so haben die Derivirten λ_x, Λ_x, λ_x', Λ_x' zum Grenzwerth $+\infty$, das heisst wieder die Ableitung rechts von x_0, d_{x_0}. Specialisirt man nun, indem man voraussetzt, die Ableitung d_x der $f(x)$ rechts von den Punkten x einer gewissen Nachbarschaft rechts von x_0 oder die d_x' links von denselben Punkten x seien immer bestimmt, so kann man offenbar behaupten: Wenn in hinreichend kleinen Nachbarschaften rechts von einem Punkt x_0 eine Function $f(x)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat und sie auch nicht durch Subtraction (oder Addition) der verschiedenen Linearfuntionen $\mu x + \nu$ erhält; *oder auch:* wenn unter den unendlich vielen Functionen $\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$, die sich so ergeben (die $f(x)$ eingeschlossen), nur einige in endlicher Anzahl exi-

stiren, welche in diesen Nachbarschaften eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima haben, *alsdann* hat die Function $f(x)$ im Punkt x_0 eine rechtsseitige bestimmte (endliche oder unendliche grosse) Ableitung d_{x_0}. Sie ist alsdann überdies auch von der Art, dass, wenn ihre rechtsseitigen Ableitungen d_x in den Punkten x einer rechtsseitigen Nachbarschaft von x_0 existiren, diese Ableitungen d_x im Punkt x_0 zur Rechten stetig sind. Und wenn ihre Ableitungen d_x' links von den nämlichen Punkten x (x_0 höchstens ausgeschlossen) existiren, so haben auch diese Ableitungen d_x' für $x = x_0 + 0$ einen bestimmten Grenzwerth, der gerade die rechtsseitige Ableitung im Punkt x_0, das heisst d_{x_0}, ist. (Es versteht sich, dass in diesem Satz wie auch in demjenigen des vorigen Paragraphen die Nachbarschaften, die für die verschiedenen Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ in Betracht gezogen werden, zwar immer für jeden speciellen Werth von μ existiren müssen, jedoch auch über alles Maass sich verringern können, wenn μ sich gewissen ausgezeichneten Werthen nähert.)

---

§ 159. Wir können jetzt allgemein bemerken: Wenn eine Function $f(x)$ in jeder noch so kleinen rechtsseitigen Nachbarschaft eines Punktes x_0 eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hat, so existiren in derselben Nachbarschaft immer unendlich viele Punkte (Maxima), in denen die rechten Derivirten negativ oder Null sind, und unendlich viele andere (Minima), in denen diese Derivirten positiv oder Null sind. Dasselbe gilt auch (nur umgekehrt) für die linken Derivirten. Es ist deshalb gewiss: Wenn eine Function $f(x)$ in jeder rechtsseitigen Nachbarschaft eines Punktes x_0 eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hat, so kann keine einzige der verschiedenen Derivirten, die zu den Punkten x rechts von x_0 gehören, für $x = x_0 + 0$ einen bestimmten Grenzwerth haben, es sei denn, dieser Grenwerth wäre gleich Null.

Man kann daher speciell behaupten: Wenn eine Function $f(x)$ in jeder rechtsseitigen Nachbarschaft eines Punktes x_0 eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hat und ihre Ableitungen in den Punkten x dieser Nachbarschaft stets bestimmt sind, auf der Rechten $= d_x$ und links $= d_x'$, so können diese Ableitungen für $x = x_0 + 0$ keinen bestimmten Grenzwerth haben, es sei denn, dieser Grenzwerth wäre gleich Null. Folglich können bei derselben Function die rechtsseitigen Ableitungen der rechts von x_0 gelegenen Punkte x im Punkt x_0 auf der rechten Seite nicht continuirlich sein, wenn nicht der Werth d_{x_0} der im Punkt x_0 rechtsseitig genommenen Ableitung gleich Null ist. Oder mit andern Worten: Wenn eine Function $f(x)$ in jeder rechtsseitigen Nachbarschaft eines Punktes x_0 eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hat und in den Punkten x dieser Nachbarschaft (x_0 eingeschlossen) stets eine bestimmte rechtsseitige Ableitung d_x besitzt, so muss diese Ableitung im Punkt x_0 Null sein, oder rechts von x_0 eine Unstetigkeit der zweiten Art besitzen (§ 149).

---

§ 160. Man beachte nun: Wenn die im Punkt x_0 rechtsseitig genommene Ableitung einen bestimmten und endlichen Grenzwerth d_{x_0} hat, so hat unter den Functionen

$$\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$$

nur die einzige, welche einem $\mu = d_{x_0}$ entspricht, im Punkt x_0 eine rechtsseitige Ableitung die gleich Null ist, und wenn d_{x_0} unendlich gross ist, so ist die im Punkt x_0 rechtsseitig genommene Ableitung für jedes beliebige μ ebenfalls unendlich gross. Daraus folgt unmittelbar: Wenn in den Punkten x einer rechtsseitigen Nachbarschaft von x_0 (x_0 eingeschlossen) die rechtsseitigen Ableitungen d_x einer Function $f(x)$ stets bestimmt und im Punkt x_0 auch stetig sind, so wird unter den unendlich vielen Functionen $\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$ (die Function $f(x)$

eingeschlossen), welche sich aus $f(x)$ durch Subtraction der Linearfunctionen $\mu x + \nu$ ergeben, höchstens nur eine einzige vorkommen, welche in noch so kleinen rechtsseitigen Nachbarschaften von x_0 eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hat. Umgekehrt kann man nach den früheren Sätzen auch behaupten: Wenn es unter den unendlich vielen Functionen $\varphi(x)$ (die $f(x)$ eingeschlossen) an sich nur eine endliche Anzahl von solchen geben kann, die in hinreichend kleinen rechtsseitigen Nachbarschaften von x_0 eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima haben, alsdann sind die rechtsseitigen Ableitungen d_x der $f(x)$, wenn sie auch in den rechts von x_0 gelegenen Punkten x existiren, im Punkte x_0 auf der rechten Seite stetig; und von solchen Functionen $\varphi(x)$, welche in der gedachten Art eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima in den rechtsseitigen Nachbarschaften von x_0 (die $f(x)$ eingeschlossen) haben, ist entweder keine, oder höchstens nur eine einzige vorhanden. Folglich kann man immer, vorausgesetzt, dass die Ableitungen der $f(x)$ rechts von x_0 und rechts von den rechts von x_0 gelegenen Punkten x existiren, auch behaupten: Wenn diese Ableitungen eine Unstetigkeit (der zweiten Art § 149) im Punkt x_0 zur Rechten besitzen, so muss unter den Functionen $\varphi(x)$ (die $f(x)$ eingeschlossen) eine unendlich grosse Anzahl von solchen vorhanden sein, die in beliebig kleinen rechtsseitigen Nachbarschaften des Punktes x_0 eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima haben.

---

§ 161. Wir fügen noch hinzu: Es seien bei einer endlichen und stetigen Function $f(x)$ die Ableitungen rechts oder links von den Punkten x eines gewissen Intervalls (a, b) zum Beispiel die rechtsseitigen d_x bestimmt (das heisst endlich oder unendlich gross)

und überdies von der Beschaffenheit, dass in jedem Theil von (a, b) stets andere Theile existiren, in denen in jedem Punkt diese Ableitungen immer wenigstens auf einer Seite stetig sind. Alsdann hat die gegebene Function $f(x)$ in unendlich vielen Punkten jedes beliebigen Theiles des gegebenen Intervalls auch eine bestimmte und endliche Derivirte im gewöhnlichen Sinn des Worts. Und wenn in diesem Theil die Function $f(x)$ nicht constant ist, so existiren in diesem Theil immer andere Gebiete von endlicher Ausdehnung, in denen die Ableitungen d_x stets endlich und von Null um mehr als eine bestimmte Grösse entfernt sind und gleichzeitig sämmtlich das nämliche Vorzeichen haben. In diesen Theilen macht dann die gegebene Function $f(x)$ keine Schwankungen und wächst entweder stets, oder nimmt stets ab.

Unter dieser Voraussetzung lassen sich in der That in jedem beliebig kleinen Theil (α, β) des Intervalls (a, b) stets unendlich viele andere finden, in deren Punkten d_x immer wenigstens auf einer Seite stetig ist. Und wenn d_x in einem dieser Theile (a', b') nicht immer endlich ist, so dass es in gewissen Punkten z. B. $= +\infty$ ist oder auch z. B. positive Werthe annimmt, die grösser sind als jede beliebige gegebene Zahl, so müssen rechts oder links von diesen Punkten stets Nachbarschaften existiren, in deren Punkten d_x stets positiv ist.

Alsdann kann aber nach dem Satz in § 135 oder § 146 die Function d_x in den Punkten dieser Nachbarschaften nicht immer unendlich gross sein und es müssen in ihnen nothwendiger Weise Punkte $x', x'', \ldots$ existiren, in welchen sie einen endlichen Werth hat. Weil nun d_x in den Punkten von (a', b') immer wenigstens auf einer Seite stetig ist, so existiren offenbar in (a', b') auch Intervalle (das heisst Nachbarschaften der neuen Punkte $x', x'', \ldots$), in denen d_x in jedem Punkt immer endlich ist. Man kann also jetzt behaupten, dass unter den gemachten Voraussetzungen in jedem Theil (α, β) von (a, b) unendlich viel andere Theile existiren, in deren Punkten die rechtsseitigen Ableitungen d_x stets wenig-

stens auf der einen Seite stetig und überdies auch numerisch kleiner als eine endliche Zahl sind.

Wenn nun (a_1, b_1) einer dieser Theile von (α, β) ist, so ist die Function d_x in ihm entweder überall oder nur im Allgemeinen (§ 39) stetig oder sie ist eine punktirt unstetige Function (§ 153). Es müssen deshalb innerhalb (a_1, b_1) stets unendlich viele Punkte existiren, in denen d_x durchaus stetig ist und nach § 148 hat die Function $f(x)$ in diesen Punkten auch eine bestimmte und endliche Derivirte im gewöhnlichen Sinn des Worts. Damit ist denn ein Theil des aufgestellten Satzes bewiesen.

Wenn ferner die $f(x)$ zwischen a_1 und b_1 nicht immer constant ist, so kann die Ableitung d_x nach dem Satz der §§ 79 oder 146 nicht in jedem Punkt von (a_1, b_1) Null sein, sondern es müssen unendlich viele Punkte dieses Intervalls vorhanden sein, in denen sie von Null verschieden ist. Da nun die Function d_x in jedem Punkt von (a_1, b_1) wenigstens auf einer Seite stetig ist, so existiren zwischen a_1 und b_1 auch Intervalle von endlicher Ausdehnung, in denen die Function d_x in jedem Punkt endlich und von Null um mehr als eine bestimmte Grösse verschieden ist und immer dasselbe Vorzeichen hat. Beachtet man dann, dass dieser letzte Umstand auch bedingt, dass die Function $f(x)$ in denselben Intervallen immer wächst oder immer abnimmt, so ist damit der oben aufgestellte Satz in allen seinen Theilen vollständig bewiesen.

§ 162. Fassen wir nun die verschiedenen hier gewonnenen Resultate zusammen, so gelangen wir ohne alle Schwierigkeit zu dem folgenden Satz, von dem wir schon im Anfang des § 158 sprachen: Wenn eine endliche und continuirliche Function $f(x)$ in einem ganzen Intervall (a, b) nicht unendlich viele Maxima und Minima hat und sie auch nicht durch Subtraction (oder Addition einer beliebigen Linearfunction $\mu x + \nu$ erlangt; *oder auch:* wenn unter den unendlich vielen Functionen $\varphi(x)$, welche sich so ergeben (die $f(x)$ eingeschlossen), für

jeden Punkt x_0 von (a, b) höchstens eine einzige existirt, die in jeder beliebig kleinen rechtsseitigen Nachbarschaft von x_0 eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hat und es sich ähnlich mit den linksseitigen Nachbarschaften von x_0 verhält, *alsdann* gilt das Folgende:

1. Die Function $f(x)$ hat immer sowohl zur Rechten wie zur Linken eines jeden Punktes des gegebenen Intervalls (a, b) eine bestimmte Ableitung (die übrigens endlich oder unendlich gross sein kann).

2. Die Ableitung d_x dieser Function $f(x)$, rechts von den Punkten x des gegebenen Intervalls (b ausgeschlossen wenn $b > a$) genommen, bildet eine Function, die stets continuirlich ist oder höchstens nur gewöhnliche Unstetigkeiten links von gewissen Punkten hat (die in endlicher oder unendlich grosser Anzahl vorhanden sind).

3. Auch die Ableitung d_x' links von den Punkten x desselben Intervalls (a ausgeschlossen) bildet eine Function, die immer continuirlich ist oder nur gewöhnliche Unstetigkeiten rechts von gewissen Punkten hat, und in jedem Punkt x im Innern des gegebenen Intervalls ist

$$d_{x+0} = d_x, \quad d_{x-0} = d_x', \quad d'_{x+0} = d_x, \quad d'_{x-0} = d_x',$$

wenn d_{x+0}, d'_{x+0} die Grenzwerthe sind, die d_x und d_x' bei der unbeschränkten Annäherung an x_0 von der rechten Seite her annehmen etc.

4. In jedem beliebig kleinen Theil dieses Intervalls existiren immer Intervalle von endlicher Ausdehnung, in welchen sowohl die rechtsseitigen wie die linksseitigen Ableitungen bestimmt und überdies auch endlich sind, so dass sie in diesen Intervallen endliche und überall oder im Allgemeinen stetige oder punktirt unstetige Functionen sind. Und wenn wenigstens in dem ins Auge gefassten Theil die Function $f(x)$ nicht constant ist, so sind diese Ableitungen in Intervallen von endlicher Ausdehnung,

die in dem obigen Theil ausgewählt sind, auch von Null um mehr als eine bestimmte Grösse entfernt und haben stets dasselbe Vorzeichen, so dass in diesen Intervallen die Function $f(x)$ keine Schwankungen macht und stets entweder wächst oder abnimmt.

5. In jedem Theil des gegebenen Intervalls giebt es immer auch unendlich viele Punkte, in denen auch eine Derivirte im gewöhnlichen Sinn des Wortes existirt und einen endlichen Werth hat.

Natürlich treten die Besonderheiten, die sich bei den Functionen $f(x)$ zeigen, gleichzeitig auch bei den Functionen $\varphi(x)$ auf, und wenn die bekannten auf $f(x)$ und das Intervall (a, b) bezogenen Zahlen λ und Λ endlich sind, so sind die Ableitungen der Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ rechts und links von den Punkten dieses Intervalls stets endlich und zwischen λ und Λ oder $\lambda - \mu$ und $\Lambda - \mu$ (diese Grenzwerthe eingeschlossen oder nicht) enthalten.

§ 163. Aus dem, was in § 160 gesagt wurde, ist ersichtlich, dass die Functionen, von denen die §§ 143 und 144 handelten und bei denen unter den $\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$ nur eine endliche Anzahl von Functionen vorkommen, die zwischen a und b eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima haben, ganz specielle Fälle von den Functionen sind, auf die sich der eben bewiesene Satz bezieht. Es erstreckt sich also das eben aufgestellte Theorem in allen seinen Theilen auch auf die ersteren Functionen.

§ 164. Ebenfalls auf Grund des § 160 kann man offenbar als reciproken Satz zu dem in § 162 den folgenden geben: Wenn bei einer endlichen und stetigen Function $f(x)$ die Ableitungen rechts und links von den Punkten x eines gegebenen Intervalls existiren und rechts, bezüglich links, von diesen Punkten stetig sind, so hat diese Function $f(x)$ in Bezug auf die Maxima und Minima die im Anfang des § 162 für die Functionen des

dortigen Satzes festgesetzten Eigenschaften und sie besitzt auch alle anderen in dem nämlichen Satz aufgeführten Eigenschaften. Man kann also jetzt behaupten: Wenn von einer Function verlangt wird, dass die rechts wie auch links von den Punkten eines gegebenen Intervalls genommenen Ableitungen bestimmt und überdies auch rechts bezüglich links von den entsprechenden Punkten stetig sein sollen, so können die zu Anfang des Satzes in § 162 gestellten Bedingungen als für die Existenz dieser Ableitungen nothwendig und ausreichend angesehen werden.

---

§ 165. Wir bemerken weiter: Wenn für die Function $f(x)$ des Satzes in § 162 in Bezug auf die Nachbarschaften zur Linken der Punkte des Intervalls (a, b) überhaupt keine Bedingung gestellt worden wäre, während die übrigen Bedingungen bestehen bleiben, so würde dieser Satz immer noch seine Gültigkeit wenigstens in den Theilen behalten, die sich auf die Existenz der rechtsseitigen Ableitungen und ihre Stetigkeit rechts von den einzelnen Punkten beziehen; ferner in denjenigen, die von der Existenz der Intervalle, in denen diese Ableitungen endlich und von Null verschieden sind, und die von der Existenz der gewöhnlichen Derivirten in unendlich vielen Punkten des Intervalls (a, b) handeln etc.

---

§ 166. Auf Grund des Satzes in § 162 und stets in Bezug auf die Functionen, auf die sich dieser Satz bezieht, kann man dann auch behaupten: Wenn die rechtsseitige Ableitung d_{x_0} in einem Punkt x_0 im Innern des gegebenen Intervalls von der linksseitigen d_{x_0}' verschieden und z. B. $d_{x_0} > d_{x_0}'$ ist, so werden in jeder hinreichend kleinen Nachbarschaft des Punktes x_0 die rechts- und linksseitigen Ableitungen, falls sie in den Punkten dieser Nachbarschaft genommen werden, die rechts von x_0 gelegen sind, niemals um mehr als eine beliebig kleine Grösse σ hinter d_{x_0} zurückbleiben, während diejenigen, die in den Punkten derselben

Nachbarschaft links von x_0 genommen werden, niemals um mehr als σ über d_{x_0}' hinausgehen werden. Das heisst also: Keine der Ableitungen rechts oder links von den Punkten der ganzen in Betracht gezogenen Nachbarschaft nimmt Werthe an, die zwischen $d_{x_0}' - \sigma$ und $d_{x_0} + \sigma$ liegen. Diese Zahlwerthe werden also gewissermassen sämmtlich von den rechtsseitigen wie den linksseitigen Ableitungen übersprungen und in der Grenze findet ein eigentlicher Sprung von d_{x_0}' nach d_{x_0} statt.

---

§ 167. Wieder auf Grund des Satzes in § 162 und stets in Bezug auf die Functionen $f(x)$, auf die sich dieser Satz bezieht, kann man offenbar auch hinzufügen: Wenn in gewissen Punkten beliebig kleiner Umgebungen eines Punktes x_0 die rechtsseitigen oder linksseitigen Ableitungen Werthe annehmen, die einer gegebenen endlichen Grösse A so nahe kommen, wie man nur will, oder die z. B. positiv und grösser als jede beliebige endliche Zahl sind, so nimmt wenigstens eine der beiden Ableitungen rechts und links d_{x_0} oder d_{x_0}' im Punkt x_0 thatsächlich den Werth A bezüglich $+\infty$ an.

Benutzt man nun diesen Satz, so ist, aber stets in Bezug auf die nämlichen Functionen, auch leicht nachzuweisen: Falls die rechts- oder linksseitigen Ableitungen in Punkten des Intervalls (a, b) auch Werthe annehmen, die einer gegebenen endlichen Grösse A beliebig nahe kommen oder z. B. positiv und grösser als irgend eine gegebene Zahl sind, so existirt zwischen a und b (a und b eingeschlossen) immer wenigstens ein bestimmter Punkt x_0, in welchem wenigstens eine der beiden Ableitungen rechts oder links d_{x_0} oder d_{x_0}' thatsächlich den Werth A bezüglich $+\infty$ annimmt.

In dem ersten Fall ist in der That die untere Grenze der Werthe wenigstens einer der Grössen $(d_x - A)^2$, $(d_x' - A)^2$ in dem Intervall (a, b) offenbar gleich Null. Man braucht nur

der ersten dieser Grössen im Punkt b und der zweiten im Punkt a $(a < b)$ einen beliebigen von Null verschiedenen positiven Werth beizulegen, um auf Grund des Weierstrass'schen Satzes sofort zu erkennen: dass zwischen a und b (a und b eingeschlossen) wenigstens ein bestimmter Punkt x_0 der Art existiren muss, dass in den Punkten x einer jeden noch so kleinen Umgebung von x_0 d_x oder d_x' Werthe annehmen, die an A beliebig nahe herankommen. Und dies bedingt gerade nach dem oben gegebenen Satz, dass entweder $d_{x_0} = A$ oder $d_{x_0}' = A$ sein muss.

Aehnlich ist es im zweiten Fall. Wenn man beachtet, dass dann $+\infty$ die obere Grenze der Werthe von d_x und d_x' ist und sich an die Eigenschaften dieses Grenzwerths erinnert, so sieht man sofort, dass wenigstens ein Punkt x_0 zwischen a und b derart existirt, dass in jeder Umgebung desselben d_x oder d_x' auch positive Werthe annehmen, die grösser als jede beliebige gegebene Zahl sind. In diesem Punkt x_0 ist also entweder $d_{x_0} = +\infty$ oder $d_{x_0}' = +\infty$. Damit ist der aufgestellte Satz vollständig bewiesen.

§ 168. Die in dem Paragraphen 157 und den folgenden entwickelten Sätze stellen Bedingungen für die Existenz der Ableitungen rechts von einem Punkt oder auf einer der beiden Seiten der Punkte eines gegebenen Intervalls fest und liefern allgemeine Eigenschaften dieser Ableitungen. Auch unabhängig von diesen Sätzen hätte man von vornherein bemerken können, dass, wenn eine Function $f(x)$ keine bestimmte (endliche oder unendlich grosse) Ableitung rechts von einem Punkt x_0 hat und λ_{x_0}, A_{x_0} die diesem Punkt entsprechenden (alsdann von einander verschiedenen) Derivirten sind, die unendlich vielen Functionen $\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$, die sich aus $f(x)$ durch Subtraction der Linearfunctionen $\mu x + \nu$ für zwischen λ_{x_0} und A_{x_0} (diese Grenzen höchstens ausgeschlossen) liegende Werthe von μ ergeben, sämmtlich in den rechtsseitigen Nachbarschaften von x_0 eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima haben, da offenbar ihre rechtsseitigen Zuwachsverhältnisse

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}$$

im Punkt x_0 bei unbeschränkt abnehmendem h beständig vom Positiven zum Negativen übergehen. Wir hätten also auch ohne die vorstehenden Resultate behaupten können: Das Fehlen einer bestimmten (endlichen oder unendlich grossen) Ableitung rechts von x_0 bei einer Function $f(x)$ bedingt nothwendiger Weise, dass in der Reihe der aus der Function $f(x)$ und aus den bekannten Functionen $\varphi(x)$, die sich aus ihr durch Subtraction oder Addition der verschiedenen Linearfunctionen $\mu x + \nu$ ergeben, gebildeten Functionen eine unendlich grosse Anzahl von solchen vorkommt, die in jeder rechtsseitigen Nachbarschaft $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ unendlich viele Maxima und Minima aufweisen.

Wir fügen hinzu: Wenn die rechts- oder linksseitigen Ableitungen einer Function $f(x)$ in gewissen Punkten eines beliebigen noch so kleinen Theils eines gegebenen Intervalls, in welchem $f(x)$ nicht constant ist, gleich Null oder unendlich gross sind, alsdann muss nothwendiger Weise unter den bekannten $\varphi(x)$ (die $f(x)$ eingeschlossen) eine unendlich grosse Anzahl von solchen vorhanden sein, welche in denselben Theilen unendlich viele Maxima und Minima haben. Denn sonst würde es nach dem Satz des § 162 in den nämlichen Theilen des gegebenen Intervalls stets andere Gebiete geben, in deren Punkten sowohl die rechts- wie die linksseitigen Ableitungen bestimmt und endlich und von Null verschieden wären. Während daher in Bestätigung dessen, was § 132 lehrt, das Vorhandensein der erwähnten Besonderheiten bei den Ableitungen einer Function rechts oder links von den Punkten eines gegebenen Intervalls sich nicht immer der Ursache zuschreiben lässt, dass diese Functionen selbst eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima haben, so ist doch so viel sicher, dass wenn die genannten Singularitäten bei den Ableitungen vorkommen, die unendlich vielen Maxima und Minima erscheinen müssen, wenn nicht in der gegebenen Function, so doch in unendlich

vielen Functionen, die sich durch Subtraction gewisser Linearfunctionen aus ihr ableiten lassen.

---

§ 169. Es verdient hervorgehoben zu werden, und die hier gewonnenen Resultate zeigen es immer deutlicher, wie unvollständig der Beweis Ampère's (§ 69) in Bezug auf die Existenz der Derivirten der endlichen und stetigen Functionen $f(x)$ gewesen ist und wie unmöglich es gewesen wäre, nur auf Grund der Ampère'schen Betrachtungen mit ihrer Beschränkung hinsichtlich der Anzahl der Schwankungen der $f(x)$ zu irgend welchen Schlüssen zu kommen. Denn wenn man auch voraussetzt, dass die Function $f(x)$ in dem gegebenen Intervall nicht unendlich viele Schwankungen[1]) macht, so schliesst dieses keineswegs aus (§§ 131 u. flgde), dass diese unendlich vielen Schwankungen nicht in den Functionen auftreten, die aus der $f(x)$ durch Addition oder Subtraction der Linearfunctionen $\mu x + \nu$ hervorgehen. Ueberdies wäre es, um überhaupt zu bündigen Schlüssen zu gelangen, unerlässlich gewesen, die rechtsseitigen von den linksseitigen Ableitungen zu trennen und sie gesondert zu betrachten, wie es von uns im § 162 und den übrigen geschehen ist und wie es bei Untersuchungen von so allgemeinem Charakter geschehen muss.

Dasselbe kann man auch von den Beweisen sagen, wie sie gewöhnlich bis in die letzte Zeit hinein in Bezug auf die Existenz der Ableitungen und die Ordnung unendlicher Kleinheit der Differenz $f(x+h) - f(x)$ bei abnehmendem h gegeben wurden.

---

§ 170. So kann der Satz des § 162 nicht nur als Berichtigung und Ergänzung des Ampère'schen aufgefasst werden, er scheint auch das erste allgemeine Kriterium zu

1) Ampère macht eigentlich in expliciter Form nicht einmal diese Einschränkung, aber sie geht klar aus dem ganzen Zusammenhang seines Beweises hervor. Zudem betrachtete man damals Functionen, die in einem endlichen Intervall eine unendlich grosse Anzahl von Schwankungen machen, überhaupt noch nicht.

liefern, nach welchem man bei einer weit ausgedehnten Klasse von Functionen, durchaus unabhängig von jeder etwaigen analytischen Darstellung, sofort die Existenz einer rechtsseitigen oder linksseitigen (endlichen oder unendlich grossen) stets bestimmten Ableitung feststellen kann.

Falls man nun statt der einseitigen Ableitungen die Derivirten im gewöhnlichen Sinn des Worts in Betracht ziehen will, so findet man, wenn man denselben Gedankengang, wie beim Beweis des Satzes in § 155 einschlägt, sofort: Soll die bekannte endliche und stetige Function $f(x)$ in einem Punkt x_0 im Innern des in Betracht gezogenen Intervalls eine bestimmte (das heisst endliche oder unendlich grosse mit bestimmtem Vorzeichen) Derivirte (im gewöhnlichen Sinn) haben, so ist dazu nöthig und ausreichend, dass es unter den unendlich vielen Functionen $\varphi(x)$, welche sich aus $f(x)$ durch Subtraction oder Addition der Linearfunctionen $\mu x + \nu$ (die $f(x)$ eingeschlossen) ergeben, höchstens eine gebe, die, wenn man sie in einer (vollständigen) Umgebung $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon_1)$ von x_0 in Betracht zieht, im Punkt x_0 weder wächst noch abnimmt.

Beschränkt man sich ferner auf die Functionen, von denen der Satz in § 162 handelt, so findet man sehr leicht: Sollen dieselben eine Derivirte (in gewöhnlichem Sinn) haben, die in jedem Punkt x_0 innerhalb des in Betracht gezogenen Intervalls bestimmt ist, so ist dazu nöthig und ausreichend, dass es unter den bekannten $\varphi(x)$ höchstens eine gebe, die in diesem Punkt x_0 ein Maximum oder Minimum ist.

---

§ 171. Es scheint uns nun angezeigt zu sein, noch die folgenden Bemerkungen hinzuzufügen.

Wir wollen wieder mit λ und Λ die unteren und oberen Grenzen der Derivirten einer Function $f(x)$ bezeichnen, die in einem ganzen Intervall (a, b), $(b > a)$ endlich und stetig ist und wollen unter der Voraussetzung, dass λ und Λ von einander verschieden seien, die Function $\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$,

worin μ eine zwischen λ und Λ (λ und Λ ausgeschlossen) liegende Zahl ist, in Betracht ziehen.

In Folge der besonderen Eigenschaften der Zahlen λ und Λ (§§ 141 und 147) kann man zwischen a und b zwei (unter sich und von b verschiedene) Punkte x_1 und x_2 derart finden, dass für positive und hinreichend kleine Werthe von h:

$$\varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1) > 0, \quad \varphi(x_2 + h) - \varphi(x_2) < 0$$

ist. Es muss deshalb in dem Intervall $(x_1, x_2 + h)$, wenn $x_1 < x_2$, oder in dem Intervall $(x_2, x_1 + h)$, wenn $x_2 < x_1$ ist, wenigstens einen im Innern gelegenen bestimmten Punkt x' geben, in dem die Function $\varphi(x)$ ein Maximum oder Minimum ist.

Mit andern Worten: In dem Intervall (a, b) ist wenigstens ein innerer Punkt x' derart vorhanden, dass bei positivem und hinreichend kleinem h stets:

$$\varphi(x' \pm h) - \varphi(x') < 0$$

oder stets

$$\varphi(x' \pm h) - \varphi(x') > 0$$

und deshalb entweder:

$$\frac{\varphi(x' + h) - \varphi(x')}{h} \leqq 0$$

und gleichzeitig

$$\frac{\varphi(x' - h) - \varphi(x')}{-h} \geqq 0$$

oder:

$$\frac{\varphi(x' + h) - \varphi(x')}{h} \geqq 0$$

und gleichzeitig

$$\frac{\varphi(x' - h) - \varphi(x')}{-h} \leqq 0$$

ist. Setzt man nun für $\varphi(x)$ ihren Werth ein und beachtet, dass es nun nicht länger nöthig ist λ und Λ als von einander verschieden vorauszusetzen, so kann man ohne Weiteres behaupten: Wenn λ und Λ die bekannten unteren und oberen Grenzwerthe der Derivirten einer in dem Intervall (a, b) endlichen und stetigen Function $f(x)$ bedeuten und μ eine beliebige zwischen den Grenzwerthen λ und Λ (höchstens diese Grenzen ausgeschlossen) liegende Zahl ist, so ist in dem Intervall (a, b) stets wenigstens ein *innerer* bestimmter Punkt x' vorhanden, für

welchen bei positivem und hinreichend kleinem h eines der beiden rechts- und linksseitigen Zuwachsverhältnisse

$$\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h}$$

niemals über μ hinausgeht und das andere nie hinter μ zurückbleibt. Derart also, dass immer:

$$\frac{f(x' + h) - f(x')}{h} < \mu$$

und gleichzeitig

$$\frac{f(x' - h) - f(x')}{-h} > \mu$$

oder stets:

$$\frac{f(x' + h) - f(x')}{h} > \mu$$

und gleichzeitig

$$\frac{f(x' - h) - f(x')}{-h} < \mu$$

ist.

§ 171*. Wenn für Punkte einer Menge G, die in einem Intervalle $\alpha \ldots \beta$ überall dicht vertheilt sind, die Derivirte einer Function $f(x)$ unendlich, aber unbestimmten Zeichens ist, so heisst dies, dass, wenn x_0 der Menge G angehört, für positive h die beiden Quotienten

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$$

entgegengesetzte Zeichen haben und mit abnehmendem h numerisch über alle Grenzen wachsen. In Folge dessen haben dann die beiden Differenzen

$$f(x_0 + h) - f(x_0), \quad f(x_0 - h) - f(x_0)$$

bei gehörig kleinem h dasselbe Zeichen. Ist h_1 kleiner als die Grenze, welche h nicht überschreiten darf, damit die beiden Differenzen dasselbe Zeichen haben, und k die kleinere der beiden Grössen

$$f(x_0 + h_1), \quad f(x_0 - h_1),$$

wenn beide $> f(x_0)$ sind, dagegen die grössere, wenn beide $< f(x_0)$ sind, so wird wegen der Stetigkeit der Function $f(x)$ jeder Werth zwischen $f(x_0)$ und k sowohl für ein x zwischen x_0 und $x_0 + h_1$, wie zwischen $x_0 - h_1$ und x_0 angenommen.

In beliebiger Nähe des Punktes x_0 liegen dann also rechts und links Punkte, für welche die Function $f(x)$ denselben Werth hat. Es sei nun $a \ldots b$ ein in $\alpha \ldots \beta$ enthaltenes, beliebig kleines Intervall. Wenn $f(x)$ in dem Intervall $a \ldots b$ Invariabilitätszüge hat, so wird der einem solchen entsprechende Werth von $f(x)$ in unendlich vielen Punkten angenommen. Aber auch, wenn in ab, wie wir jetzt annehmen wollen, keine Invariabilitätszüge vorkommen, giebt es mindestens einen Werth, dem $f(x)$ in unendlich vielen Punkten von ab gleich wird[1]). Denn weil die Menge G überall dicht ist, giebt es nach dem oben Bewiesenen mindestens zwei Punkte im Innern von ab, für die $f(x)$ denselben Werth hat. Gesetzt, es gäbe deren n, $x_1 x_2 \ldots x_n$. Wenn man dann h gehörig klein macht, liegen die $2n$ Intervalle von der Grösse h, die sich rechts und links an $x_1 x_2 \ldots x_n$ anschliessen, alle im Innern von ab und greifen mit ihren Enden nicht übereinander. Weil Invariabilitätszüge ausgeschlossen sind, giebt es in jedem dieser $2n$ Intervalle Functionswerthe, die von $f(x_1)$ verschieden sind. Wenn nun die Anzahl r der Intervalle, welche Functionswerthe $> f(x_1)$ enthalten, grösser als oder gleich n ist, so seien diese mit $\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \ldots \alpha_r\beta_r$ bezeichnet. In jedem dieser Intervalle findet man dann einen Functionswerth, der $> f(x_1)$ ist. Diese seien bezw. $y_1, y_2, \ldots y_r$ und die ihnen entsprechenden Werthe von x: $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_r$. Ist η der kleinste der Werthe $y_2 y_3 \ldots y_r$, so ist auch $\eta > f(x_1)$ und man kann ξ_1 und eine kleine Umgebung $\xi_1' \xi_1''$ von ξ_1 so finden, dass sie ganz in $\alpha_1\beta_1$ fällt und dass für alle ihre Punkte $f(x)$ zwar $> f(x_1)$ aber $< \eta$ ist, weil ja sicher für einen der Punkte α_1 oder β_1 $f(x) = f(x_1)$ wird und im Innern von $\alpha_1\beta_1$ auch Werthe $> f(x_1)$ vorkommen. Jeder zwischen $\xi_1' \xi_1''$ vorkommende Functionswerth wird somit auch in jedem der Intervalle $\alpha_2\beta_2, \alpha_3\beta_3, \ldots \alpha_r\beta_r$ auftreten. Es giebt aber nach dem oben Bewiesenen in $\xi_1' \xi_1''$ mindestens zwei Punkte, für welche $f(x)$ denselben Werth η' hat und dieser wird also auch in $\alpha_2\beta_2, \ldots \alpha_r\beta_r$ je mindestens einmal, also im ganzen Intervall ab mindestens $r + 1$ mal angenommen. Wenn r

1) König, Monatshefte f. Math. u. Ph. Bd. 1 S. 7.

nicht $\geqq n$ ist, so wird sicher die Anzahl der Intervalle, in welchen Functionswerthe vorkommen, die $< f(x_1)$ sind, grösser als n sein. Daran kann man analoge Ueberlegungen anschliessen und findet auch dann, dass es einen Werth giebt, der in mindestens $r + 1$ Punkten angenommen wird. Man kann also stets, wenn ein Functionswerth in n Punkten angenommen wird, einen andern Functionswerth finden, der in $n + 1$ Punkten mindestens angenommen wird. So kann man nun weiter gehen ohne Ende. Bei der Construction wird in dem Intervalle ab ein anderes $\xi_1'\xi_1''$ gefunden, in diesem wieder ein neues $\xi_2'\xi_2''$, in diesem wieder eins $\xi_3'\xi_3''$ u. s. w. Die linken Endpunkte $a\xi_1'\xi_2'\xi_3' \ldots$ nähern sich einer Grenze ξ_0', die rechten $b\xi_1''\xi_2''\xi_3'' \ldots$ einer ξ_0''. Da das Intervall $\xi_0'\xi_0''$ in jedem der früheren Intervalle liegt und jeder Functionswerth, der in dem Intervalle $\xi_p'\xi_p''$ vorkommt, mindestens in $n + p$ Punkten angenommen wird, so muss jeder im Intervall $\xi_0'\xi_0''$ vorkommende Functionswerth — wenn $\xi_0' = \xi_0''$ ist es nur einer — in unendlich vielen Punkten $z_1 z_2 z_3 \ldots$ des Intervalles ab angenommen werden. Hiermit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

---

§ 172*. Die eben gefundenen unendlich vielen Punkte haben einen Grenzwerth z_0; dann ist für diesen

$$f(z_0) = f(z_1) = \ldots$$

und folglich

$$\frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} = \frac{f(z_2) - f(z_0)}{z_2 - z_0} = \cdots = 0 .$$

Wenn folglich die Derivirte von $f(x)$ für den Punkt z_0 bestimmt ist, muss sie $= 0$ sein. Oder aber sie muss unbestimmt sein. Es giebt also in jedem wenn auch noch so kleinen Theilintervall einen Punkt, für welchen die Derivirte unbestimmt oder, wenn sie bestimmt, gleich Null ist. Bei einer stetigen Function kann also nicht in *allen* Punkten die Derivirte unendlich von unbestimmtem Zeichen sein.

Da die Function $\varphi(x) = f(x) - cx$, wo c constant, ebenfalls, wie $f(x)$, für die Punkte von G eine Derivirte besitzt, die unendlich, aber von unbestimmtem Zeichen ist, so folgt,

dass für jedes Intervall ein Punkt existiren muss, für den die Ableitung von $\varphi(x)$, wenn bestimmt, gleich Null ist. Und dies zeigt, dass es in jedem Intervall einen Punkt giebt, für den die Ableitung von $f(x)$, wenn bestimmt, $= c$ ist.

---

§ 172. Das Resultat des § 171 führt zu zwei sehr bemerkenswerthen Sätzen:

1. Wir wollen speciell voraussetzen, $f(x)$ gehöre zu der Kategorie von Functionen, welche immer eine gewöhnliche bestimmte Derivirte $f'(x)$ besitzen (welche letztere endlich oder wenn unendlich gross von bestimmtem Vorzeichen ist) und beachten, dass alsdann λ und Λ nichts anderes, als die unteren und oberen Grenzen der Werthe von $f'(x)$ in dem Intervall (a, b) sind. Man sieht sofort, dass in diesem Fall der Werth $f'(x')$ dieser Derivirten in dem oben bestimmten Punkt x' genau gleich μ ist und indem man so den dritten Theil des Satzes in § 71 vervollständigt, kommt man zu dem Schluss: Wenn die Function $f(x)$ in dem Intervall (a, b) endlich und stetig ist und überdies immer eine gewöhnliche bestimmte Derivirte (das heisst, die endlich oder, wenn unendlich gross, von bestimmtem Vorzeichen ist) besitzt, so geht diese letztere, auch wenn sie zwischen a und b eine unendlich grosse Anzahl von Unstetigkeiten (der zweiten Art § 78 oder § 149) hat, nothwendiger Weise durch alle zwischen ihrem unteren Grenzwerth λ und ihrem oberen Λ (höchstens diese Grenzwerthe ausgeschlossen) gelegenen Zahlwerthe.

2. Wenn die Function $f(x)$ so beschaffen ist, dass die entsprechende Function

$$\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$$

in einer hinreichend kleinen Umgebung $(x' - \varepsilon, x' + \varepsilon)$ des oben definirten Punktes x' nicht eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hat, alsdann existirt rechts von x' ein Intervall von endlicher Ausdehnung $(x', x' + \delta)$ der Art, dass in jedem Punkt x desselben (die Endpunkte ausge-

schlossen) bei hinreichend kleinem und beständig gegen Null abnehmendem h immer

$$\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h} \geq \mu$$

oder immer

$$\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h} < \mu$$

ist, während man in jedem Punkt x eines gewissen Intervalls $(x' - \delta, x')$ links von x' die entgegengesetzten Ungleichungen erhält.

Nimmt man dagegen an, die ursprüngliche Function $f(x)$ habe in einem beliebigen noch so kleinen Theil des Intervalls (a, b) eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima oder besitze Invariabilitätszüge, so müssen ihre rechts- und linksseitigen Zuwachsverhältnisse in unendlich vielen Punkten eines jeden Theils des gegebenen Intervalls bei stetig gegen Null abnehmendem h Werthe von verschiedenem Vorzeichen annehmen oder müssen mindestens gleich Null sein. Es kann daher für ein von Null verschiedenes μ keine rechts- und linksseitige Umgebung des Punktes x' existiren, in der stets die obigen oder die entgegengesetzten Ungleichungen gelten. Man ist also jetzt berechtigt zu behaupten: Wenn $f(x)$ eine endliche und stetige Function ist, die in jedem beliebigen Theil des Intervalls (a, b) eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hat oder Invariabilitätszüge aufweist, so haben alle Functionen

$$\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu,$$

die sich aus $f(x)$ durch Subtraction der Linearfunctionen $\mu x + \nu$ ergeben, in welchen μ zwischen den unteren und oberen Grenzen λ und Λ der Derivirten der $f(x)$ (diese Grenzwerthe ausgeschlossen) liegt, in den Umgebungen einer endlichen oder unendlich grossen Anzahl von Punkten des gegebenen Intervalls eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima.

Speciell gilt dann auch unter der nämlichen Voraussetzung, dass nämlich $f(x)$ in jedem beliebigen Theil des gegebenen Intervalls eine unendlich grosse An-

zahl von Maxima und Minima habe oder Invariabilitätszüge aufweise: Wenn λ und Λ endlich sind, so wachsen die Functionen

$$\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu,$$

wenn $\mu < \lambda$ und x das Intervall von a nach b $(a < b)$ durchläuft, beständig. Ist dagegen $\mu > \Lambda$, so nehmen sie beständig ab, und liegt μ zwischen λ und Λ (λ und Λ ausgeschlossen), so haben sie sämmtlich zwischen zwischen a und b eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima.

Beachtet man dann, dass die entsprechende Function $\varphi(x)$ wenn λ endlich, $\mu = \lambda$ und x den Weg von a nach b zurücklegt, gemäss § 146 niemals abnehmen, dagegen, wenn Λ endlich ist und $\mu = \Lambda$ niemals wachsen kann, so mag sich die Function $f(x)$ in Bezug auf ihre Maxima und Minima oder ihre Invariabilitätszüge verhalten, wie sie will, es wird der Satz gelten: Wenn λ endlich ist, so nimmt die $\mu = \lambda$ entsprechende Function

$$\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu,$$

während x den Weg von a nach b durchläuft, niemals ab und wenn Λ endlich ist, so wächst die einem $\mu = \Lambda$ entsprechende Function

$$\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$$

niemals.

§ 173. Die Untersuchung über das Verhalten der $\varphi(x)$, die sich aus $f(x)$ durch Wegnahme der Linearfunctionen $\mu x + \nu$ ergeben, hat uns den Beweis des grössten Theils der oben gegebenen Sätze möglich gemacht. In der That sind diese Functionen ein wesentliches Element für Studien, wie wir sie hier angestellt haben und die Erforschung der ursprünglichen $f(x)$ kann nicht von ihnen getrennt werden, da, wie unsere Entwickelungen gezeigt haben, die Singularitäten, denen man manchmal bei dem Aufsuchen der Derivirten einer Function begegnet, statt von Eigenthümlichkeiten der Function selbst abzuhängen, vielmehr durch Eigenthümlichkeiten bedingt sind, die nur in einzelnen jener Hülfsfunctionen $\varphi(x)$

auftreten. In ähnlicher Weise würde die Behandlung der Functionen $\psi(x)$, die man aus $f(x)$ durch Anfügen oder Wegnehmen von Functionen zweiten Grades ax^2+bx+c oder auch höherer Grade erhält, zu neuen Eigenschaften der Functionen führen und insbesondere zu solchen, die auf die Ableitungen zweiter, bezüglich höherer Ordnung Bezug haben. Wir gehen jedoch auf diese Untersuchungen hier nicht näher ein, und nur um eine Vorstellung davon zu geben, in welcher Weise die Betrachtung der gedachten Functionen $\psi(x)$ nutzbar gemacht werden kann, wollen wir uns derselben bedienen, um zwei Eigenschaften der Functionen $f(x)$ zu beweisen. Die erste lautet: Wenn die Ableitungen d_x rechts und d_x' links von den Punkten x eines gegebenen Intervalls, in welchem die Function $f(x)$ endlich und stetig ist, stets bestimmt und endlich sind, so können sie nicht in jedem Punkt eines beliebig kleinen Theils des Intervalls von einander verschieden sein, ohne dass zugleich in unendlich vielen Punkten des jedesmaligen Theils ihre Differenz d_x-d_x' positiv und in unendlich vielen andern negativ ausfällt.

Zum Beweis dieses Satzes betrachten wir in dem Theil (α, β) die Function

$$\psi(x)=f(x)-f(\alpha)-\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}[f(\beta)-f(\alpha)]+\Theta(x-\alpha)(\beta-x),$$

worin Θ eine gegebene positive oder negative Zahl ist.

Diese Function verschwindet für $x=\alpha$ und $x=\beta$ und wenn Θ dem absoluten Werth nach hinreichend gross genommen wird und $\alpha<\beta$, so hat sie wenigstens für einige Werthe von x zwischen α und β das Vorzeichen von Θ. Sie hat also bei hinreichend grossem und positivem Θ in einem Punkt x' im Innern des Intervalls (α, β) ein positives Maximum, während sie bei negativem und numerisch hinreichend grossem Θ in einem Punkt x'' im Innern ein negatives Minimum hat.

Es ergiebt sich also in diesen Fällen bei positivem und hinreichend kleinem h:

$$\psi(x'+h)-\psi(x')<0, \quad \psi(x'-h)-\psi(x')<0,$$
$$\psi(x''+h)-\psi(x'')\geq 0, \quad \psi(x''-h)-\psi(x'')>0,$$

und daraus:

$$\frac{\psi(x'+h)-\psi(x')}{h}-\frac{\psi(x'-h)-\psi(x')}{-h}<0,$$

$$\frac{\psi(x''+h)-\psi(x'')}{h}-\frac{\psi(x''-h)-\psi(x'')}{-h}>0,$$

und da im Allgemeinen

$$\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}-\frac{\psi(x-h)-\psi(x)}{-h}$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}-2\Theta h$$

ist und man h beliebig klein annehmen kann, so sieht man daraus sofort, dass die Differenz

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

für jeden Werth von Θ im Punkt x' keinen positiven und in x'' keinen negativen Grenzwerth haben kann. Es folgt daraus, dass im Intervall (α, β) Punkte x' existiren müssen, für welche $d_{x'}-d'_{x'}\leq 0$ und Punkte x'', für die $d_{x''}-d'_{x''}>0$ ist, was zu beweisen war.

---

§ 174. Dadurch, dass man Functionen $\psi(x)$, die sich aus $f(x)$ durch Wegnahme von Functionen zweiten Grades ergeben, in Betracht zieht, lässt sich dann ferner der Satz in § 82 wie folgt, erweitern: Wenn eine Function $f(x)$ in einem gegebenen Intervall endlich und stetig ist und in einem Punkt x' im Innern dieses Intervalls eine bestimmte und endliche erste Ableitung und überdies auch eine bestimmte (endlich oder unendlich gross mit bestimmtem Vorzeichen) zweite Ableitung hat, so ist diese letztere immer der Grenzwerth des Verhältnisses

$$\frac{f(x'+h)-2f(x')+f(x'-h)}{h^2}$$

für $h=0$.

Wir wollen zu dem Ende die Function

$$\psi(x)=f(x)-\frac{\Theta}{2}x^2$$

betrachten, in welcher Θ eine beliebige Constante ist und be-

achten (was wir bei der Formulirung des Satzes übergangen haben), dass die Existenz der zweiten Ableitung der $f(x)$ im Punkt x' diejenige der ersten in jedem Punkt einer hinreichend kleinen Umgebung $(x'-\varepsilon_1,\ x'+\varepsilon_2)$ von x' zur unerlässlichen Voraussetzung hat. Da nun das letztere auch für die Function $\psi(x)$ gilt, so bestehen bei positivem hinreichend kleinem h die beiden Relationen (§ 72, 6):

$$\begin{aligned} \psi(x'+h)-\psi(x') &= \quad h\psi'(x'+\Theta_1 h) \\ \psi(x'-h)-\psi(x') &= -h\psi'(x'-\Theta_2 h), \end{aligned} \tag{1}$$

wenn Θ_1 und Θ_2 zwischen 0 und 1 liegen (0 und 1 ausgeschlossen). Es ist deshalb:

$$\frac{\psi(x'+h)-2\psi(x')+\psi(x'-h)}{h^2}=\frac{\psi'(x'+\Theta_1 h)}{h}-\frac{\psi'(x'-\Theta_2 h)}{h},$$

und weil $\psi'(x')$ bestimmt und endlich ist und Θ_1 und Θ_2 von Null verschieden sind, so hann man auch schreiben:

$$\begin{aligned} &\frac{\psi(x'+h)-2\psi(x')+\psi(x'-h)}{h^2} \\ =\Theta_1 &\frac{\psi'(x'+\Theta_1 h)-\psi'(x')}{\Theta_1 h}+\Theta_2\frac{\psi'(x'-\Theta_2 h)-\psi'(x')}{-\Theta_2 h}. \end{aligned} \tag{2}$$

Falls nun $f''(x')$ eine endliche Grösse k ist und man, in dem Ausdruck für $\psi(x)$, $\Theta=k$ nimmt, so wird $\psi''(x')=0$. Da nun Θ_1 und Θ_2 stets zwischen 0 und 1 (0 und 1 ausgeschlossen) liegen und die Factoren dieser Zahlen auf der rechten Seite der Gleichung (2) die rechts- und linksseitigen Zuwachsverhältnisse der $\psi'(x)$ in Bezug auf den Punkt x' sind, so haben diese Factoren offenbar Null zum Grenzwerth und es ist also, wie im § 82:

$$\lim\frac{\psi(x'+h)-2\psi(x')+\psi(x'-h)}{h^2}=0$$

oder:

$$\lim\frac{f(x'+h)-2f(x')+f(x'-h)}{h^2}=k=f''(x').$$

Wenn ferner $f''(x')$ z. B. $=+\infty$ ist, dann ist auch $\psi''(x')=+\infty$ für jeden endlichen Werth von Θ; und weil Θ_1 und Θ_2 positiv sind, so müssen die beiden Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (2) bei gegen Null abnehmendem h zum Grenzwerth Null oder eine positive endliche oder un-

endlich grosse Zahl haben oder müssen, ohne jemals negativ zu werden, hin und her schwanken.

Hätte aber die rechte Seite der Gleichung (2) nicht $+\infty$ zum Grenzwerth für jedes beliebige Θ oder in andern Worten: bliebe für einen Werth Θ_0 von Θ die rechte Seite der Gleichung (2), man mag h so klein werden lassen, wie man will, nicht schliesslich dauernd grösser als eine beliebige gegebene Zahl z. B. ω, so bestände offenbar, wenn man mit $\psi_0(x)$ die den Werth Θ_0 von Θ und mit $\psi_1(x)$ die einem $\Theta = \Theta_0 + \omega$ entsprechende Function $\psi(x)$ bezeichnet, die Gleichung:

$$\frac{\psi_1(x'+h) - 2\psi_1(x') + \psi_1(x'-h)}{h^2} = \frac{\psi_0(x'+h) - 2\psi_0(x') + \psi_0(x'-h)}{h^2} - \omega$$

und wenn man daher h noch so sehr abnehmen lässt, so wäre das Verhältniss

$$\frac{\psi_1(x'+h) - 2\psi_1(x') + \psi_1(x'-h)}{h^2}$$

schliesslich niemals dauernd positiv und von Null verschieden. Dies ist aber im Widerspruch mit dem, was oben gesagt wurde. Es kann daher, wie auch Θ beschaffen sei, die rechte Seite der Gleichung (2) für $h = 0$ zum Grenzwerth nur $+\infty$ haben und dieses führt dann offenbar zu dem Schluss, dass auch in diesem Fall

$$\lim \frac{\psi(x'+h) - 2\psi(x') + \psi(x'-h)}{h^2} = +\infty = f''(x')$$

ist, womit denn der obige Satz vollständig bewiesen wäre.

Es ist zu bemerken, dass in Bezug auf die zweite Ableitung der $f(x)$ der vorstehende Beweis nur voraussetzt, dass sie im Punkt x' einen bestimmten Werth hat. Der Satz würde also beispielsweise seine Gültigkeit nicht einbüssen, wenn ausserhalb jenes Punktes thatsächlich überhaupt keine zweite Ableitung vorhanden sein sollte.

---

§ 175. Wir hätten, indem wir wieder von der Function

$$\psi(x) = f(x) - \frac{\Theta}{2}x^2$$

ausgehen, statt der Gleichungen (1) auch die folgenden

$$\psi(x' + 2h) = \psi(x') + 2h\psi'(x' + 2\Theta' h)$$
$$\psi(x' + h) = \psi(x') + h\psi'(x' + \Theta'' h)$$

benutzen können, worin Θ' und Θ'' zwischen 0 und 1 liegen (0 und 1 ausgeschlossen) und wären dann zu der folgenden Gleichung gekommen

$$\frac{\psi(x' + 2h) - 2\psi(x' + h) + \psi(x')}{h^2}$$

$$= 4\Theta' \frac{\psi'(x' + 2\Theta' h) - \psi'(x')}{2\Theta' h} - 2\Theta'' \frac{\psi'(x' + \Theta'' h) - \psi'(x')}{\Theta'' h}.$$

Aus derselben folgt sofort, wie vorher, dass, wenn eine Function $f(x)$ in einem Punkt x' (der jetzt auch ein Endpunkt des betrachteten Intervalls sein kann) eine zweite Ableitung hat, die auf einer Seite von x' bestimmt und endlich ist, diese letztere stets der Grenzwerth des Verhältnisses

$$\frac{f(x' + 2h) - 2f(x' + h) + f(x')}{h^2}$$

für $h = +0$ oder $= -0$ ist, je nachdem die genannte Ableitung rechts bezüglich links vom Punkt x' genommen wird. — Wenn diese zweite Derivirte sowohl rechts als links dieselbe ist, das heisst, wenn eine zweite Derivirte im gewöhnlichen Sinn existirt, so ist der Grenzwerth des obigen Ausdrucks sowohl für $h = +0$ als für $h = -0$ dieser Derivirten gleich.

Diese Resultate zeichnen sich gegenüber den sonst üblichen Untersuchungen über Differenzen und Differentiale zweiter Ordnung nicht nur durch grössere Strenge, sondern auch durch grössere Allgemeinheit aus und können natürlich auf Differenzen und Differentiale höherer Ordnung ausgedehnt werden[1]).

§ 176. Die vorstehenden Untersuchungen über die Ableitungen der endlichen und stetigen Functionen erheben nicht den Anspruch, Vollständiges zu liefern; trotzdem legen wir

1) Harnack, Math. Ann. Bd. 23 S. 260.

diesen Studien eine gewisse Bedeutung in der Richtung bei, dass man, wie wir glauben, bei Verfolgung des hier eingeschlagenen Weges grössere Vollständigkeit und vielleicht auch grössere Einfachheit in Bezug auf die Sätze über die Derivirten endlicher und stetiger Functionen erzielen könnte.

Uebrigens sind die von uns angestellten Untersuchungen zweifellos an sich schon, trotz ihrer Unvollständigkeit, von grossem Werth, insofern sie eine Anzahl hervorragender Besonderheiten in helles Licht setzen.

Sie zeigen uns zum Beispiel, dass bei Functionen, die in einem gegebenen Intervall zwar endlich und stetig sind, aber in jedem beliebigen Theil dieses Intervalls eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima haben, die Ableitungen, auch wenn sie nur auf der einen Seite der Punkte des Intervalls genommen werden, niemals bestimmt und endlich sein können; sowie, dass, wenn sie existiren, sie in Punkten eines jeden beliebigen Theils des ursprünglichen Intervalls eine beiderseitige Unstetigkeit haben (§ 161). Es sind dies also endliche und stetige Functionen, auf die sich die Methode der Differentialrechnung schlechterdings nicht anwenden lässt, sobald man wenigstens über die erste hinaus auch Ableitungen von höherer Ordnung berücksichtigen will.

Meistens nun ist es nöthig, dass nicht allein die in einem gegebenen Intervall in Betracht gezogenen Functionen, sondern auch einige wenigstens ihrer Derivirten in allen Punkten dieses Intervalls, höchstens mit Ausnahme einer endlichen Anzahl dieser Punkte, endlich und stetig sind. In diesem Fall kann nur ein Theil der Functionen, von denen der Satz in § 162 handelt, zugelassen werden, nämlich diejenigen, bei welchen in jedem Theil des gegebenen Intervalls immer Gebiete existiren, in denen die Function stets wächst oder stets abnimmt etc., bei welchen also die unendlich vielen Maxima und Minima, wenn sie existiren, sich nur in den Umgebungen endlich oder unendlich vieler discret vertheilter Punkte des gegebenen Intervalls vorfinden.

Specialisirt man die Natur der in einem gegebenen Intervall (a, b) zu betrachtenden Function $f(x)$ noch mehr, indem man verlangt, dass auf sie für jeden Punkt x_0 dieses Inter-

valls die Entwicklung durch die Taylor'sche Reihe anwendbar sei, dann führen die vorstehenden Betrachtungen leicht zu der Ueberzeugung, dass die unendlich vielen Maxima und Minima durchaus in dem ganzen Intervall sowohl in der Function $f(x)$ selbst, als auch in jeder ihrer Derivirten ausgeschlossen werden müssen, wenn auch die stets endlich bleibende Anzahl dieser Maxima und Minima mit der stets wachsenden Ordnung der successiven Derivationen über jedes Maass hinaus wachsen kann. Oder auch, was auf dasselbe hinauskommt, die unendlich vielen Maxima und Minima müssen schlechterdings aus einer jeden beliebigen der unendlich vielen Functionen $f(x) - P$ (die $f(x)$ eingeschlossen), die sich aus $f(x)$ durch Wegnahme einer rationalen und ganzen Function P ergeben, ausgeschlossen werden.

Denn es habe eine Function $f(x)$, wie zum Beispiel die Function:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} \sin \frac{1}{x - x_0} \quad \text{mit} \quad f(x_0) = 0$$

in der ganzen Umgebung z. B. rechts von einem Punkt x_0 nicht immer denselben Werth, sondern besitze eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima und lasse in den Punkten dieser Umgebung stets eine bestimmte Derivirte $f'(x)$ im gewöhnlichen Sinn zu, die im Punkt x_0 ebenfalls auf der rechten Seite stetig ist. Alsdann muss diese Derivirte nicht nur im Punkt x_0 Null sein (§ 159), sondern auch in unendlich vielen Punkten jeder rechtsseitigen Nachbarschaft von x_0, ohne jedoch immer gleich Null sein zu können, derart also, dass auch diese Derivirte eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima in jeder dieser Nachbarschaften (§ 57) haben und im Punkt x_0, wie gesagt, gleich Null sein muss.

Und ähnlich: Besitzt dieselbe Function $f(x)$ auch eine zweite Derivirte $f''(x)$, die im Punkt x_0 auf der Rechten stetig ist, so hat auch diese Derivirte in jeder Nachbarschaft rechts von x_0 unendlich viele Maxima und Minima und ist in x_0 Null. Und so auch im Allgemeinen: Wenn eine Function $f(x)$ in den beliebig kleinen Nachbarschaften eines Punktes x_0 eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hat,

so gilt das Nämliche auch für die Derivirten der verschiedenen Ordnungen, die $f(x)$ etwa besitzt und diese Ableitungen werden, wenigstens wenn sie in x_0 stetig sind, in diesem Punkt verschwinden. Es können also offenbar, wenn eine Function $f(x)$ in den Punkten eines gegebenen Intervalls stets bestimmte und stetige Derivirte haben soll (wie das ja gerade erforderlich ist, um diese Function in Taylor'sche Reihen entwickeln zu können), weder die Function $f(x)$ noch irgend eine ihrer Derivirten in den Nachbarschaften irgend eines Punktes dieses Intervalls unendlich viele Maxima und Minima haben, ohne dass das Nämliche bei den Derivirten der folgenden Ordnungen der Fall ist, und ohne dass diese letzteren Derivirten in dem betreffenden Punkt sämmtlich Null sind.

Beachtet man daher, dass für nicht rationale Functionen, wie zum Beispiel für die Function

$$x^2 + e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} \sin \frac{1}{x - x_0},$$

das Verschwinden aller Ableitungen in einem Punkt x_0, deren Ordnungszahl eine gewisse Grenze überschreitet, die Möglichkeit der Entwicklung in eine Taylor'sche Reihe, die nach Potenzen von $x - x_0$ fortschreiten würde (das heisst in der Nachbarschaft des Punktes x_0) absolut ausschliesst, so ist gegenwärtig klar, dass eine solche Entwickelbarkeit in der Umgebung der einzelnen Punkte eines bestimmten Intervalls (a, b) das Vorhandensein von unendlich vielen Maxima und Minima sowohl in der Function wie in den Ableitungen der verschiedenen Ordnungen schlechterdings ausschliesst. Das Nämliche gilt dann natürlich auch für die Functionen $f(x) - P$, worin P eine beliebige ganze Rationalfunction bedeutet. Denn falls eine dieser Functionen in den Umgebungen eines Punktes x_0 eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hätte, so müssten wenigstens von einer gewissen Ordnungszahl an, bei welcher ihre Derivirten mit denjenigen der $f(x)$ übereinstimmen, diese letzteren Derivirten im Punkt x_0 sämmtlich verschwinden.

Nach den letzten Bemerkungen kann man auch speciell behaupten: Die Möglichkeit eine Function $f(x)$ durch eine

nach Potenzen von $x - \alpha$ geordnete unendliche Reihe, wenn α irgend eine feste Grösse ist, für alle Werthe von x zwischen a und b (a und b inbegriffen oder nicht) darzustellen, schliesst schlechterdings das Vorhandensein unendlich vieler Maxima und Minima aus, sowohl bei der Function wie bei ihren verschiedenen Derivirten in jedem beliebigen Theil (a', b') des Intervalls (a, b), der nicht in den Punkten a und b endigt, denn eine solche Function $f(x)$ lässt sich, wie bekannt, in der Umgebung eines jeden Punktes x_0 des Intervalls (a', b') stets in eine Taylor'sche Reihe entwickeln etc.

Wir werden im folgenden Kapitel sehen, dass die Einschränkungen, die wir hinsichtlich der Anwendung der Differentialrechnung auf solche Functionen, die unendlich viele Maxima und Minima haben, und auf ihre Derivirten machen mussten, sich um ein Bedeutendes verringern, wenn es sich darum handelt, die Integralrechnung auf diese Functionen anzuwenden. Es würde also trotzdem, was wir oben gesagt haben, nicht zu billigen sein, wollte man das analytische Studium solcher Functionen ganz und gar unterlassen.

---

§ 177. Nachdem die Betrachtungen im vorigen Paragraphen uns mit der Existenz von Functionen bekannt gemacht haben, wie z. B.

$$e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} \sin \frac{1}{x - x_0},$$

welche in einem ganzen Intervall endliche und stetige Derivirten haben, während diese letztern in dem Punkt x_0 des Intervalls immer gleich Null sind, und nachdem vollends unter diesen Functionen auch solche auftreten, wie z. B. die Function

$$e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}},$$

welche in der Nähe von x_0 nicht einmal eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima haben, so dürfte es nun am Platze sein, die folgende Bemerkung zu machen.

Wenn eine Function $\varphi(x)$ gegeben ist, deren verschie-

dene Ableitungen in den Punkten eines gegebenen Intervalls (a, b), dem auch der Punkt x_0 angehört, endlich und stetig sind, so ist die Taylor'sche Reihe

$$\varphi(x_0) + \frac{x - x_0}{1} \varphi'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} \varphi''(x_0) + \cdots$$

in den meisten Fällen in einem ganzen Intervall $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$ convergent und stellt eine Function $\psi(x)$ dar, die mitsammt ihren Ableitungen in allen Punkten dieses Intervalls (höchstens die Endpunkte ausgeschlossen) endlich und stetig ist. Obgleich nun diese Function $\psi(x)$ im Punkt x_0 den nämlichen Werth und dieselben Derivirten hat wie die gegebene Function $\varphi(x)$, so kann sie doch in allen andern Punkten derjenigen Gebiete, die den beiden Intervallen (a, b) und $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$ gemeinsam sind, von $\varphi(x)$ verschieden sein. Die Differenz ist dann eine Function, die im Punkt x_0 zugleich mit ihren verschiedenen Derivirten Null ist.

Das heisst aber: Wenn eine Function einer reellen Variablen in allen Punkten eines gegebenen Intervalls zugleich mit ihren Derivirten der verschiedenen Ordnungen endlich und stetig ist, so kann nicht unter allen Umständen (wie bisher gewöhnlich angenommen wurde) behauptet werden, dass die Werthe, die sie und ihre Derivirten in einem Punkt haben, zur vollständigen Charakterisirung der Function in dem ganzen gegebenen Intervall ausreichen. Eine solche Function wird nicht einmal durch die Werthe, die sie in einem bestimmten beliebig kleinen Theil (a, b) des Intervalls annimmt, hinreichend definirt, weil diese Werthe zwar zur Berechnung der Derivirten in den Endpunkten a_1 oder b_1 dienen, uns aber nicht in den Stand setzen, die Function auch nur in irgendwie kleinen Nachbarschaften der Punkte a_1 und b_1 zu bestimmen, sobald diese Nachbarschaften ausserhalb des Intervalls (a_1, b_1) liegen. Dabei ist allerdings vorausgesetzt, dass man nicht die Bedingung gestellt hat, die $f(x)$ solle auch in eine Taylor'sche Reihe für jeden Punkt x_0 von (a, b) entwickelt werden können, oder dass nicht andere specielle Eigenschaften der $f(x)$ gegeben sind. Es kann daher offenbar, so lange man sich wenigstens auf reelle Veränderliche beschränkt,

die von Hankel[1]) vorgeschlagene Classification solcher Functionen in legitime und illegitime nicht vollkommen aufrecht erhalten werden.

Dreizehntes Kapitel.

Definition eines bestimmten Integrals und Merkmale integrirbarer Functionen.

§ 178. In den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung pflegt das zwischen zwei reellen Grenzen α und β genommene bestimmte Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

für reelle und endliche Functionen $f(x)$ gewöhnlich der Art definirt zu werden, dass man sagt, es sei nichts anderes als die Differenz $f_1(\beta) - f_1(\alpha)$, wobei man unter $f_1(\beta)$ und $f_1(\alpha)$ die Werthe einer endlichen und stetigen Function $f_1(x)$, die an die $f(x)$ durch die Relation

$$\frac{d f_1(x)}{d x} = f(x)$$

gebunden ist, für $x = \beta$ und $x = \alpha$ versteht. Der Beweis, den man dann, auf diese Definition gestützt, in der Regel von der Existenz des Integrals einer Function $f(x)$ giebt, kann, auch wenn man sich nur auf stetige Functionen beschränkt, nicht als streng bezeichnet werden, da er das Vorhandensein einer die Function $f(x)$ darstellenden Curve voraussetzt. Andererseits liefert diese Definition, auch wenn man von der Frage der Existenz des Integrals absieht, kein allgemein anwendbares Mittel, um das Integral nun auch thatsächlich aufzufinden, da sie die Ermittlung desselben von Operationen mit einer durchaus unbekannten Function abhängig macht. Wir

1) Hankel, Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. Seite 42.

müssen uns daher nach einer andern Definition umsehen, die einem allgemein gehaltenen Studium der Functionen besser angepasst ist.

Die neue Definition, deren explicite Einführung in die Wissenschaft wir hauptsächlich Cauchy[1]), Dirichlet[2]) und Riemann[3]) verdanken, findet sich in einer der längst bekannten Eigenschaften der bestimmten Integrale vor. Während sie uns auch in viel allgemeineren Fällen, als diejenigen, welche gewöhnlich in den Büchern behandelt werden, auf die alte Definition zurückführt, die sie als eine Eigenschaft der Integrale selbst bezeichnet, hat sie vor dieser letzteren den Vortheil voraus, dass sie zeigt, unter welchen allgemeinen Bedingungen das Integral eine präcise, bestimmte Bedeutung hat und dass sie die Ermittlung desselben von Operationen mit der nämlichen Function, die der Integration unterworfen werden soll, abhängig macht.

Wir werden hier die neue Definition geben; zuvor jedoch wollen wir für den Augenblick die alte beibehalten und wollen uns die Eigenschaft und die Betrachtungen ins Gedächtniss zurückrufen, welche zu dieser älteren Definition geführt haben.

---

§ 179. Es sei zu dem Zweck $f(x)$ eine Function, die in dem endlichen Intervall von α nach β endlich und stetig ist und welche die Derivirte einer Function $F(x)$ ist, die in demselben Intervall mit den nämlichen Eigenschaften ausgestattet ist.

Setzt man voraus zum Beispiel $\alpha < \beta$ und bezeichnet mit $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ $n-1$ zwischen α und β liegende Werthe von x, von denen der folgende immer grösser als der vorhergehende ist und mit $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ die Differenzen

$$x_1 - \alpha,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x_2,\ \ldots,\ \beta - x_{n-1},$$

so erhält man (§ 72, 6)

1) Cauchy, Journ. École polyt. Cah. 19 Seite 571 u. 590.

2) Dove's Rep. Bd. 1 Seite 153.

3) Werke Seite 225.

$$F(x_1) = F(\alpha) + \delta_1 f(\alpha + \varepsilon_1 \delta_1)$$
$$F(x_2) = F(x_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2)$$
$$F(x_3) = F(x_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F(\beta) = F(x_{n-1}) + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

und daher:

$$F(\beta) - F(\alpha) = \sum_1^n \delta_s f(x_{s-1} + \varepsilon_s \delta_s),$$

worin $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ positive, zwischen 0 und 1 liegende, Zahlen sind, deren Werthe von der Beschaffenheit der Function $F(x)$ oder $f(x)$ und von den für $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ gewählten Werthen abhängen.

Es hat also, wenn die ε die ebenerwähnte Bedeutung haben, die Summe

$$\sum_1^n \delta_s f(x_{s-1} + \varepsilon_s \delta_s)$$

einen bestimmten und endlichen Werth $F(\beta) - F(\alpha)$ unabhängig von den Zahlenwerthen der Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ und von ihrer Anzahl. Da nach der alten Definition $F(\beta) - F(\alpha)$ das bestimmte Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

ist, so schliesst man, dass dieses Integral auch der Grenzwerth der Summe

$$\sum_1^n \delta_s f(x_{s-1} + \varepsilon_s \delta_s)$$

ist, wenn die δ_s kleiner als eine beliebige gegebene Grösse werden und die ε_s beständig bestimmte zwischen 0 und 1 liegende Zahlen bleiben, die von der Beschaffenheit der Function $f(x)$ und von den Endpunkten x_{s-1}, x_s der Intervalle δ_s abhängen.

Von dieser Eigenschaft ausgehend, könnte also das bestimmte Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

einer endlichen und stetigen Function $f(x)$, die zwischen α und β die Derivirte einer andern ebenfalls endlichen und stetigen $F(x)$ ist, anscheinend auch als der Grenzwerth einer Summe von Producten definirt werden, deren Factoren die verschiedenen Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, in welche das Intervall (α, β) getheilt wurde, einerseits, und die Werthe der Function $f(x)$, welche einem bestimmten Werth von x in jedem dieser Theilintervalle entsprechen, andererseits sind. Es würde aber nicht abzusehen sein, wie man bei den allgemeinen Dirichlet'schen und auch bei weniger umfassenden Functionen zu diesen intermediären bestimmten Werthen kommen soll. Es würde daher auch diese Definition Missstände schwerster Art mit sich bringen. Um nun eine passendere Definition zu gewinnen, wird es sich empfehlen, entweder die vorstehende Eigenschaft der im alten Sinn verstandenen Integrale

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

umzubilden oder andere Eigenschaften derselben zu Grunde zu legen.

---

§ 180. Zu diesem Ende bemerken wir, dass die Grössen ε_s bei einer endlichen und stetigen Function $f(x)$, wie wir sie hier betrachten, auch als beliebige zwischen 0 und 1 liegende Zahlen aufgefasst werden können. Das Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

kann daher auch als der Grenzwerth einer Summe von Producten betrachtet werden, deren Factoren sind: die Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, in welche das Gesammtintervall (α, β) getheilt wurde und ein zu jedem dieser Intervalle gehöriger Werth der Function $f(x)$, der einem beliebigen Werth von x in diesem Theilintervall entspricht.

Denn es seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ die bestimmten Zahlen, die mit der Theilung des Intervalls (α, β) in Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ den Werth $F(\beta) - F(\alpha)$ des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

liefern und $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ die zu den bezüglichen Intervallen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ gehörigen Werthe von x.

Man erhält dann:

$$\sum_1^n \delta_s f(\zeta_s) - \sum_1^n \delta_s f(x_{s-1} + \varepsilon_s \delta_s) =$$

$$= \sum_1^n \delta_s [f(\zeta_s) - f(x_{s-1} + \varepsilon_s \delta_s)].$$

Beachtet man nun, dass sich wegen der Stetigkeit der $f(x)$ in dem ganzen Intervall (α, β) zu jeder positiven und beliebig kleinen Zahl σ eine solche Zahl d finden lässt (§ 42), dass die Schwankungen der Function in jedem Intervall, das kleiner als d ist, hinter σ zurückbleiben, so muss offenbar, nachdem die δ_s sämmtlich kleiner als d gemacht sind, die Ungleichung bestehen:

$$\left| \sum_1^n \delta_s f(\zeta_s) - \sum_1^n \delta_s f(x_{s-1} + \varepsilon_s \delta_s) \right| < \sigma \sum_1^n \delta_s ,$$

oder aber:

$$\left| \sum_1^n \delta_s f(\zeta_s) - \sum_1^n \delta_s f(x_{s-1} + \varepsilon_s \delta_s) \right| < \sigma (\beta - \alpha).$$

Daher ist:

$$\lim \sum_1^n \delta_s f(\zeta_s) = \lim \sum_1^n \delta_s f(x_{s-1} + \varepsilon_s \delta_s) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx ,$$

wie zu beweisen war.

---

§ 181. Gerade dieses Resultat nun dient uns zur Definition des bestimmten Integrals der Function $f(x)$. Denn von jetzt an betrachten wir, es mag die Function $f(x)$ zwischen α und β sein wie sie will, wenn sie nur stets endlich ist, das bestimmte Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

als den Grenzwerth der Summe

$$\sum_1^n \delta_s f_s$$

der Producte $\delta_s f_s$, deren erster Factor die Intervalle

$$\delta_s \, (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

sind, in welche man sich das Gesammtintervall (α, β) getheilt denkt, und deren zweiter Factor bezüglich ein beliebiger Werth f_s der Function in diesen Intervallen δ_s oder allgemeiner irgend eine der Zahlen f_s ist, die zwischen dem oberen und unteren Grenzwerth der $f(x)$ in diesen Intervallen δ_s (die Grenzen eingeschlossen) liegen.

Damit aber das so definirte Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

eine Bedeutung habe und daher die Function f_s als thatsächlich zur bestimmten Integration zwischen α und β geeignet gelten könne, muss die Function $f(x)$ von der Beschaffenheit sein, dass die Summe

$$\sum_1^n \delta_s f_s\,,$$

die offenbar nicht unendlich gross sein kann, einen bestimmten Grenzwerth hat, der nicht nur von der Wahl der Werthe f_s in den verschiedenen Intervallen, sondern auch von dem Gesetz unabhängig ist, nach welchem man diese Intervalle gebildet hat. Wir haben also vor Allem die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen aufzusuchen, damit dieses der Fall sei.

---

§ 182. Es sei $f(x)$ eine zwischen α und β beständig endliche Function von x und es werde zunächst vorausgesetzt, man wüsste, dass sie zur bestimmten Integration zwischen α und β geeignet, dass sie integrabel ist.

Nimmt man dann eine Theilung des Intervalls (α, β) in die partiellen Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ vor und bezeichnet im Allgemeinen mit f_s einen beliebigen Werth der $f(x)$ in dem Intervall δ_s oder eine zwischen dem oberen und unteren Grenzwerth der $f(x)$ in diesem Intervall liegende Zahl (die oberen und unteren Grenzwerthe eingeschlossen), so kann man, weil $f(x)$ integrabel sein soll, behaupten, dass die Summe

$$\sum_1^n \delta_s f_s$$

einen bestimmten und endlichen Grenzwerth hat, der von dem Gesetz, nach welchem die Theilung des gegebenen Intervalls in die partiellen Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ geschehen ist, ebensowenig wie von dem in jedem dieser Intervalle ausgewählten Werth f_s abhängt. Wenn daher L_s und l_s die oberen und unteren Grenzwerthe der $f(x)$ in dem Intervall δ_s sind, so gilt:

$$\lim \sum_1^n \delta_s f_s = \lim \sum_1^n \delta_s L_s = \lim \sum_1^n \delta_s l_s$$

$=$ einer bestimmten und endlichen Grösse.

Es ist daher stets, auf welche Art man auch bei der Eintheilung in die Intervalle δ_s verfährt:

$$\lim \sum_1^n \delta_s D_s = 0,$$

wenn man unter D_s die Schwankung der $f(x)$ in dem Intervall δ_s versteht. Daraus geht dann hervor: Damit die Function $f(x)$ zur bestimmten Integration zwischen α und β geeignet sei, ist es nöthig, dass die Summe

$$\sum_1^n \delta_s D_s$$

der Producte $\delta_s D_s$, deren Factoren die Intervalle δ_s, in welche das Gesammtintervall (α, β) getheilt ist, und die bezüglichen Schwankungen der Function in diesen Intervallen sind, bei abnehmenden Intervallen der Null zustrebt, wobei das Gesetz, nach welchem die Theilung des Gesammtintervalls vorgenommen wurde, durchaus beliebig ist.

§ 183. Wir wollen nun umgekehrt annehmen, bei einer gegebenen Function $f(x)$ sei dieser Bedingung für jede Art der Eintheilung genügt und untersuchen, ob alsdann die Function $f(x)$ stets zur Integration geeignet ist oder nicht.

Denken wir uns zu dem Zweck die Theilung des Gesammtintervalls (α, β) in die partiellen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, wie bisher, ausgeführt und betrachten zunächst die beiden Summen

$$\sum_1^n \delta_s f_s, \quad \sum_1^n \delta_s f_s',$$

die zwei beliebigen Werthsystemen f_s, f_s' entsprechen, welche zwischen den unteren und oberen Grenzwerthen der $f(x)$ in den Intervallen δ_s liegen. Dann ist offenbar:

$$\left|\sum_1^n \delta_s f_s - \sum_1^n \delta_s f_s'\right| < \sum_1^n \delta_s D_s.$$

Wenn daher die Summe

$$\sum_1^n \delta_s f_s$$

bei der Theilung des Gesammtintervalls (α, β) in die partiellen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ einen bestimmten Grenzwerth hat, so ist dieser von den Werthen f_s, die man in den Intervallen δ_s ausgewählt hat, unabhängig.

Denken wir uns nun, wir hätten das Gesammtintervall (α, β) anders und zwar in die partiellen Intervalle $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_{n'}'$ getheilt und betrachten neben der zu der Eintheilung $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ gehörigen Summe

$$\sum_1^n \delta_s f_s$$

auch die der neuen Eintheilung $(\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_{n'}')$ entsprechende Summe

$$\sum_1^{n'} \delta_s' f_s'.$$

Es seien dann $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ die in steigender Reihenfolge angeordneten Werthe von x, die den Theilungspunkten bei der Theilung des Intervalls (α, β) in die Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ entsprechen und $x_1', x_2', \ldots, x_{n'-1}'$ die zu der

Theilung $(\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_{n'}')$ gehörigen Werthe von x. Diese beiden Werthsysteme von x mögen nun zusammengenommen ein drittes System $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ bilden, das aus den beiden ersten in der Art hervorgeht, dass jede beliebige Zahl $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ eine der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ oder der Zahlen $x_1', x_2', \ldots, x_{n'}'$ ist. Diese Grössen $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ seien dann auch in zunehmender Reihenfolge geordnet und $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ seien die neuen Intervalle $r_1 - \alpha$, $r_2 - r_1$, $r_3 - r_2, \ldots, \beta - r_{p-1}$.

Offenbar können in das Intervall zwischen x_{s-1} und x_s einige der r fallen oder auch keines. Im Allgemeinen kann man sagen: Wenn $x_{s-1} = r_h$ ist, so ist $x_s = r_{h+t}$ $(t > 1)$ und $r_{h+1}, r_{h+2}, \ldots, r_{h+t-1}$ sind die r, die zwischen x_{s-1} und x_s fallen. Es ist daher offenbar

$$\delta_s = \varrho_{h+1} + \varrho_{h+2} + \cdots + \varrho_{h+t}$$

und man kann setzen:

$$\delta_s f_s = \varrho_{h+1} f_{h+1}'' + \varrho_{h+2} f_{h+2}'' + \cdots + \varrho_{h+t} f_{h+t}'' +$$
$$+ \varrho_{h+1}(f_s - f_{h+1}'') + \varrho_{h+2}(f_s - f_{h+2}'') + \cdots + \varrho_{h+t}(f_s - f_{h+t}''),$$

worin

$$f_{h+1}'', \quad f_{h+2}'', \ldots, \quad f_{h+t}''$$

beliebig gewählte Werthe sind, die je zwischen den oberen und unteren Grenzwerthen der $f(x)$ in den bezüglichen Intervallen $\varrho_{h+1}, \varrho_{h+2}, \ldots, \varrho_{h+t}$ gelegen sind.

Daraus erhält man dann:

$$\sum_1^n \delta_s f_s = \sum_1^p \varrho_h f_h'' + P,$$

wenn P die Summe der den verschiedenen Intervallen δ_s entsprechenden Summen

$$\varrho_{h+1}(f_s - f_{h+1}'') + \varrho_{h+2}(f_s - f_{h+2}'') + \cdots + \varrho_{h+t}(f_s - f_{h+t}'')$$

ist. Weil nun in jeder dieser Summen die grösste der Differenzen $f_s - f_{h+1}''$, $f_s - f_{h+2}''$, ... absolut genommen nicht über die Schwankung D_s in dem entsprechenden Intervall $\delta_s = \varrho_{h+1} + \varrho_{h+2} + \cdots + \varrho_{h+t}$ hinausgehen kann, so ist

$$|P| \leqq \sum_1^n \delta_s D_s. \tag{1}$$

Aehnlich findet man:

$$\sum_1^{n'} \delta_s' f_s' = \sum_1^{p} \varrho_h f_h'' + P',$$

worin man unter f_h'' dieselben Werthe wie früher verstehen kann und P' die P entsprechende Summe für die Intervalle δ_s' ist. Man hat also absolut genommen

$$(2) \qquad |P'| < \sum_1^{n'} \delta_s' D_s'.$$

Es ist daher:

$$(3) \qquad \sum_1^{n} \delta_s f_s - \sum_1^{n'} \delta_s' f_s' = P - P',$$

worin P und P' den Ungleichungen (1) und (2) genügen. Daraus folgt, dass, wenn die Bedingung

$$\lim \sum_1^{n} \delta_s D_s = 0$$

für alle Theilungssysteme $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ erfüllt ist, und wenn die Summe

$$\sum_1^{n} \delta_s f_s$$

für eine gegebene Theilungsart einen bestimmten Grenzwerth hat, auch die analogen Summen für die übrigen Theilungsarten denselben Grenzwerth haben.

Ferner ist daraus leicht ersichtlich, dass, wenn die Bedingung

$$\lim \sum_1^{n} \delta_s D_s = 0$$

für eine Eintheilung der Intervalle nach einem bestimmten Gesetz erfüllt ist, dann thatsächlich für dieselbe Eintheilung ein bestimmter Grenzwerth der Summe

$$\sum_1^{n} \delta_s f_s$$

existirt.

Hat man nämlich die δ_s hinreichend klein gemacht (z. B. kleiner als eine hinreichend kleine Grösse δ), so bleiben die entsprechenden Summen

$$\sum_1^n \delta_s D_s$$

dauernd hinter einer gegebenen positiven und beliebig kleinen Zahl σ zurück. Setzt man nun die Zerlegung fort, indem man immer demselben Gesetz für die Theilung des Gesammtintervalls in die partiellen Intervalle folgt und gehen dadurch die $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ in die $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta'_{n'}$ über, so geht aus (1), (2) und (3) hervor, dass die Differenzen der aufeinanderfolgenden Werthe der Summen

$$\sum_1^n \delta_s f_s,$$

nachdem die δ_s hinreichend klein geworden sind, sich sämmtlich, absolut genommen, unter 2σ halten. Deshalb haben die Summen

$$\sum_1^n \delta_s f_s$$

einen bestimmten Grenzwerth (§ 22). So kann man jetzt offenbar behaupten, dass die oben besprochene Bedingung

$$\lim \sum_1^n \delta_s D_s = 0,$$

wenn sie für alle Arten der Eintheilung des Gesammtintervalls in Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ erfüllt ist, auch hinreichend ist, damit $f(x)$ zwischen α und β zur Integration geeignet sei.

---

§ 184. Es ist nun leicht zu sehen, dass, wenn diese Bedingung

$$\lim \sum_1^n \delta_s D_s = 0$$

erfüllt ist, falls die Theilung $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ des Intervalls (α, β) nach einem gewissen Gesetz geschieht, sie es auch für alle anderen Theilungen $(\delta_1', \delta_1', \ldots, \delta'_{n'})$ desselben Intervalls ist.

Nehmen wir nämlich an, die $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ der ersten Theilung seien schon so klein, dass für sie

$$\sum_1^n \delta_s D_s < \sigma$$

ist, wenn σ eine positive und beliebig kleine Zahl bedeutet und die $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_{n'}'$ der zweiten Theilung seien schon kleiner als $\frac{d}{n}$, unter d eine andere positive ebenfalls beliebig kleine Zahl verstanden.

Wenn man dann, wie im vorigen Paragraphen, aus den beiden gegebenen Theilungen eine einzige $(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p)$ herstellt, die obigen Bezeichnungen beibehält und D_h'' die Schwankung der $f(x)$ im Intervall ϱ_h angiebt, so ist, wie leicht ersichtlich:

$$\delta_s D_s > \varrho_{h+1} D_{h+1}'' + \varrho_{h+2} D_{h+2}'' + \cdots + \varrho_{h+t} D_{h+t}''$$

und deshalb auch:

$$\sum_1^n \delta_s D_s > \sum_1^p \varrho_h D_h''.$$

Nun können von den Gliedern der Summe

$$\sum_1^{n'} \delta_s' D_s',$$

die nicht in der Summe

$$\sum_1^p \varrho_h D_h''$$

auftreten, niemals mehr als n vorhanden sein, weil es nur solche Glieder sein können, die den Intervallen δ_s' entsprechen, in deren Inneres ein oder mehrere Punkte x_s fallen. Bezeichnet man daher mit d' das grösste der Intervalle δ_s' und mit D die grösste Schwankung der $f(x)$ in diesen Intervallen oder diejenige zwischen α und β, so ist

$$\sum_1^{n'} \delta_s' D_s' \leq \sum_1^p \varrho_h D_h'' + nd' D,$$

und deshalb offenbar

$$\sum_{1}^{n'} \delta_s' D_s' < \sum_{1}^{n} \delta_s D_s + n d' D \qquad (4)$$

oder:

$$\sum_{1}^{n'} \delta_s' D_s' < \sigma + d D .$$

Da nun σ und d beliebig klein sind und diese Ungleichung auch bei dem weiteren Verkleinern der δ_s' gültig bleibt, so sieht man daraus sofort, dass, wie wir behauptet,

$$\lim \sum_{1}^{n'} \delta_s' D_s' = 0$$

ist. Das erlaubt uns jetzt den folgenden Satz aufzustellen: Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine reelle Function $f(x)$ einer reellen Variabelen x in einem endlichen Intervall (α, β), in dem $f(x)$ stets endlich ist, zur bestimmten Integration geeignet sei, besteht darin, dass man eine solche Zerlegung des Gesammtintervalls (α, β) in Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ bewerkstelligen kann, dass die Summe $\Sigma \delta_s D_s$ der Producte $\delta_s D_s$, die aus den Intervallen δ_s und den bezüglichen Schwankungen der Function in den Intervallen sich zusammensetzen, bei dem unbeschränkten Kleinerwerden dieser Intervalle dem Grenzwerth Null zustrebt.

---

§ 185. Da ferner, um in dem vorstehenden Beweis zu dem Schluss zu gelangen, dass

$$\lim \sum_{1}^{n'} \delta_s' D_s' = 0$$

sei, ohne weitere Einschränkung die einfache Voraussetzung genügte, die $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, von welchen man ausgeht, bildeten ein System specieller Intervalle, für welche

$$\sum_{1}^{n} \delta_s D_s < \sigma$$

ist, so ist klar, dass man den vorigen Satz auch auf folgende

Weise anders fassen kann: Damit die genannte reelle und endliche Function $f(x)$ zur Integration in dem endlichen Intervall (α, β) geeignet sei, dazu ist es nothwendig und ausreichend, dass sich zu jedem positiven und beliebig kleinen Werth von σ ein System specieller Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, in welche das Gesammtintervall getheilt ist, der Art finden lässt, dass die entsprechende Summe $\Sigma \delta_s D_s$ kleiner als σ ist[1]).

---

§ 186. Wir zeigen nun, wie die hier gefundenen Bedingungen der Integrabilität sich leicht in eine andere Bedingung umwandeln lassen, die häufig eine leichtere Anwendung gestattet.

Wir wollen dazu zunächst voraussetzen, die Function $f(x)$ sei in dem Intervall (α, β) integrabel und die Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, in die man sich (α, β) zerlegt denkt, seien von der Beschaffenheit, dass die ihnen entsprechende Summe

$$\sum_1^n \delta_s D_s$$

hinter einer gegebenen positiven und beliebig kleinen Zahl σ' zurückbleibe. Wir wollen ferner mit τ die Summe der Intervalle δ_s bezeichnen, in denen die Schwankungen D_s der Function über eine gegebene ebenfalls positive und beliebig kleine Zahl σ hinausgehen. Es ist dann

$$\tau\sigma < \Sigma \delta_s D_s < \sigma'$$

und deshalb $\tau < \frac{\sigma'}{\sigma}\cdot$ Beachtet man dann, dass die Zahl $\frac{\sigma'}{\sigma}$,

---

1) Vgl. hierzu Darboux, Ann. Éc. Norm. 2. Série, Bd. 4. S. 64 ff. Du Bois-Reymond, Journ. f. Math. Bd. 79 S. 22. Thomae, Einleitung in d. Th. d. best. Int. S. 11. Du Bois-Reymond, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 20. Hist.-liter. Abth. S. 124. Du Bois-Reymond, Journ. f. Math. Bd. 79 S. 259. Pasch. Math. Ann. Bd. 30 S. 144. Smith, Proc. Lond. Math. Soc. Bd. 6 S. 140. Ascoli, Atti d. R. Accad. d. Lincei. Ser. 2. Bd. 2 S. 862. Die Sprünge in einem Punkt, statt der Schwankungen in einem Intervalle finden sich bei Harnack, Elem. d. Diff.- u. Int.-Rechn. S. 262; Du Bois-Reymond, Functionentheorie S. 189 benutzt.

wie klein man auch immer σ annehmen mag, doch stets beliebig klein vorausgesetzt werden kann (weil σ' von σ unabhängig ist), so kommt man zu dem Schluss: Wenn die Function $f(x)$ bei irgend einem Zerlegungssystem des Gesammtintervalls zur Integration geeignet ist, so gelingt es stets, ein System partieller Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ von der Beschaffenheit zu ermitteln, dass die Summe τ derjenigen von diesen Intervallen, in welchen die Schwankungen grösser als eine positive beliebig kleine Zahl σ sind, kleiner als eine gegebene beliebig kleine und positive Zahl ε ist.

Weiss man umgekehrt, dass diese Bedingung für jedes σ erfüllt ist, oder weiss man auch nur, dass für jeden speciellen Werth von σ und ε stets ein System specieller Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ existirt, für welche die ihnen entsprechende Summe τ kleiner als ε ist, so lässt sich behaupten, dass die Function $f(x)$ zur bestimmten Integration zwischen α und β geeignet ist. Denn alsdann wird, wenn τ die Summe der Intervalle δ_s ist, in denen die Schwankungen über σ hinausgehen, $\beta - \alpha - \tau$ die Summe derjenigen Intervalle sein, in denen die Schwankungen der $f(x)$ nicht so gross als σ sind. Bezeichnet man daher mit D die grösste Schwankung der $f(x)$ in den verschiedenen Intervallen δ_s oder die Schwankung zwischen α und β, so ist offenbar:

$$\sum_1^n \delta_s D_s \leqq \tau D + (\beta - \alpha)\sigma\,.$$

Damit wäre also die im vorigen Satz geforderte Bedingung der Integrabilität der $f(x)$ zwischen α und β erfüllt. Man kann daher ohne Weiteres behaupten: Damit die genannte reelle und endliche Function $f(x)$ in dem endlichen Intervall (α, β) zur Integration geeignet sei, dazu ist nothwendig und ausreichend, dass sich zu jedem Paar beliebig kleiner und positiver Werthe σ und ε ein System specieller Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, in welche das Gesammtintervall zerfällt, von der Beschaffenheit finden lasse, dass die Summe τ derjenigen dieser Intervalle, in denen die Schwankungen der Function grösser als σ

sind, kleiner als ε sei. Wir wollen noch besonders hervorheben, dass die vorstehenden Beweisführungen uns auch zu behaupten gestatten: Wenn man sich überzeugt hat, dass diese Bedingung für jedes beliebige σ erfüllt ist und wenn alsdann die partiellen Intervalle, in die das Gesammtintervall getheilt ist, gegen Null abnehmen, so hat die Zahl τ Null zum Grenzwerth. Dieses gilt nicht nur für die Zerlegungen des Gesammtintervalls (α, β), dem die speciellen Systeme von Intervallen angehören, mittelst deren man das Vorhandensein der Bedingung verificirt hat, sondern auch für jede beliebige andere Zerlegung.

Diese Resultate lassen sich dann auch auf die complexen Functionen reeller Variabelen anwenden; man hat dann nur den reellen Bestandtheil und den Factor des imaginären Bestandtheils getrennt zu untersuchen und wird sich gelegentlich auch mit dem Studium derjenigen Function begnügen können, welche den absoluten Betrag der gegebenen Function vorstellt.

---

§ 187. Aus diesem Satz ergeben sich nun die folgenden speciellen Fälle:

1. Alle in einem endlichen Intervall (α, β) endlichen und stetigen Functionen sind stets zur bestimmten Integration in diesem Intervall geeignet. Denn das Intervall (α, β) lässt sich bei ihnen (§ 42), die positive gegebene und beliebig kleine Zahl σ mag sein welche sie will, stets in so kleine Intervalle δ_s zerlegen, dass in jedem von ihnen die entsprechende Schwankung D_s der Function immer kleiner als σ ist.

2. Die endlichen Functionen, die zwischen α und β nur im Allgemeinen stetig sind und diejenigen punktirt unstetigen Functionen, deren Unstetigkeiten in eine unendlich grosse Punktmenge von der ersten Art fallen, sind der bestimmten Integration in diesem Intervall fähig. Man bedenke nämlich, dass man in diesem Fall aus dem Intervall (α, β) andere beliebig kleine Intervalle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ heraustrennen kann, welche die ver-

schiedenen Unstetigkeitspunkte einschliessen (§ 14). Die Zahl dieser Intervalle ist dann stets für die im Allgemeinen stetigen Functionen kleiner als eine endliche Zahl, während sie für die punktirt unstetigen Functionen, von denen hier die Rede ist, zwar immer endlich ist, aber doch mit der beständigen Abnahme dieser Intervalle unbeschränkt wächst.

Diese Intervalle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ können deshalb, da sie immer in endlicher Anzahl auftreten (§ 14), stets so ausgewählt werden, dass ihre Summe kleiner als eine willkürliche Zahl ε ist. Die übrig bleibenden Intervalle $\mu_1, \mu_2, \ldots$ können dann immer in eine endliche Anzahl von partiellen Intervallen derart zerlegt werden, dass in einem jeden die Schwankungen der Function immer kleiner als eine gegebene willkürlich kleine und positive Zahl σ sind, weil die Function in den Intervallen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ stetig ist. Man erhält auf diese Art offenbar eine specielle Zerlegung des Gesammtintervalls (α, β) in partielle Intervalle $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, für welche die in dem vorigen Satz enthaltene Bedingung erfüllt ist. Die gegebene Function ist deshalb der bestimmten Integration zwischen α und β fähig.

Beispielsweise sind so die punktirt unstetigen Functionen 1, 2 und 3 des § 62 zwischen 0 und 1 integrabel.

3. Die Functionen, die in einem endlichen Intervall (α, β) immer endlich sind und die Eigenschaft besitzen, dass die Anzahl der Punkte, in welchen Sprünge stattfinden, die grösser als eine beliebig kleine positive Zahl σ sind, stets endlich ist und nur bei der unbeschränkten Abnahme von σ über jedes Maass hinaus wachsen kann, sind der bestimmten Integration zwischen α und β fähig. Es sei $f(x)$ eine Function, die diesen Bedingungen genügt und die also eine punktirt unstetige Function ist (§ 65). Es seien ferner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ eine endliche Anzahl m von Punkten, in denen die Function Sprünge macht, die grösser oder gleich $\frac{\sigma}{4}$ sind, wenn σ eine gegebene noch so kleine positive Zahl bedeutet. Schliesst man diese Punkte mit Hülfe von Intervallen

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$$

aus, die sämmtlich kleiner sind als $\frac{\varepsilon}{m}$, so bleibt eine endliche Anzahl von Intervallen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ übrig, in welchen in jedem einzelnen die Sprünge der Function immer kleiner als $\frac{\sigma}{4}$ sind. Die Summe der Intervalle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ ist ferner kleiner als ε.

Man kann nun fast wörtlich die Schlussweise wiederholen, mit Hülfe deren in den §§ 41 und 42 analoge Eigenschaften der stetigen Functionen nachgewiesen wurden und kommt dann zum Beweis des allgemeineren Satzes: Wenn eine stets endliche Function $f(x)$ in den Punkten eines Intervalls (a, b) nur Sprünge macht, die kleiner sind als $\frac{\sigma}{4}$, so lässt sich stets eine positive von Null verschiedene Zahl δ' derart ermitteln, dass für numerisch hinter δ' zurückbleibende δ und für alle Punkte x und $x + \delta$ des Intervalls (a, b) stets:

$$|f(x + \delta) - f(x)| < \frac{\sigma}{2}$$

ist. Deshalb gehen in jedem Intervall, das nicht grösser als $2\delta'$ ist, die Schwankungen der Functionen niemals über σ hinaus. Dieser Eigenschaft wegen sind wir nun sicher, dass bei der in Rede stehenden Function jedes der oben mit $\mu_1, \mu_2, \ldots$ bezeichneten Intervalle sich in eine endliche Anzahl von Theilintervallen $\delta_1, \delta_2, \ldots$ zerlegen lässt, in welchen in jedem einzelnen die Schwankungen der Function niemals über σ hinausgehen. Man erhält alsdann eine specielle Zerlegung des Gesammtintervalls (α, β) in Theilintervalle $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, in welchen die im allgemeinen Theorem des § 186 aufgestellte Bedingung erfüllt ist. Auch in diesem Fall kann man also behaupten, dass die gegebene Function $f(x)$ zwischen α und β der bestimmten Integration fähig ist.

Insbesondere sind daher in jedem beliebigen endlichen Intervall alle diejenigen punktirt unstetigen Functionen integrirbar, welche man bei Anwendung des Princips der Verdichtung der Singularitäten (§ 114, 1) erhält, wovon wir uns auch später noch auf anderem Weg überzeugen werden.

4. Functionen, welche in einem endlichen Intervall (α, β) stets endlich sind und nur gewöhnliche Unstetigkeiten oder solche Unstetigkeiten der zweiten Art haben, die stets nur auf einer und derselben Seite rechts oder links von den entsprechenden Punkten liegen, sind zwischen α und β integrirbar.

Es sei $f(x)$ eine solche Function und wir wollen voraussetzen, dass, wenn sie Unstetigkeiten der zweiten Art in einem oder mehreren Punkten zwischen α und β hat, sie dieselben nur rechts von diesen Punkten habe.

Wir nehmen an $\alpha < \beta$, bezeichnen mit ε eine positive beliebig kleine Zahl und betrachten das Intervall $(\alpha, \alpha + \varepsilon)$.

Weil die gegebene Function $f(x)$ links von jedem Punkt stetig ist oder höchstens eine gewöhnliche Unstetigkeit hat, so ist sie in dem Intervall (α, β) punktirt unstetig (§ 151). Es existiren daher auch in dem Intervall $(\alpha, \alpha + \varepsilon)$ unendlich viele Punkte, in denen die Function (beiderseits) stetig ist. Wenn x_1 einer dieser Punkte ist und σ eine gegebene beliebig kleine, positive Zahl bezeichnet und wir uns darauf beschränken, die Seite rechts von x_1 in Betracht zu ziehen, so kann man eine positive Zahl ε_1 derart finden, dass für jeden zwischen x_1 und $x_1 + \varepsilon_1$ (höchstens $x_1 + \varepsilon_1$ ausgeschlossen) gelegenen Punkt x

$$| f(x) - f(x_1) | < \frac{\sigma}{2}$$

ist.

Diese Zahlen ε_1 existiren aber offenbar in unendlich grosser Anzahl, weil, wenn ε_1 die erwähnte Eigenschaft besitzt, von jeder kleineren Zahl das Gleiche gilt. Wir können daher voraussetzen, der für ε_1 ausgewählte Werth sei genau die obere Grenze aller Werthe, die diese Zahlen möglicher Weise haben.

Wir setzen alsdann $y_1 = x_1 + \varepsilon_1$, bilden das Intervall

$$\left(y_1, y_1 + \frac{1}{2} \varepsilon\right),$$

wobei ε die oben erwähnte, willkürlich angenommene Zahl ist und nehmen in diesem Intervall einen Punkt x_2 rechts von y_1 an, in dem die Function stetig ist. Alsdann bilden

wir auch für diesen Punkt x_2 ein Intervall $(x_2, x_2 + \varepsilon_2)$, in welchem, wie vorher in $(x_1, x_1 + \varepsilon_1)$, für jeden Punkt x (höchstens $x_2 + \varepsilon_2$ ausgeschlossen)

$$|f(x) - f(x_2)| < \frac{\sigma}{2}$$

ist, wobei wie früher ε_2 die obere Grenze der Werthe bezeichnet, die ε_2 annehmen kann, wenn für ein zwischen x_2 und $x_2 + \varepsilon_2$ ($x_2 + \varepsilon_2$ ausgeschlossen) liegendes x

$$|f(x) - f(x_2)| < \frac{\sigma}{2}$$

sein soll.

Dann setzt man $y_2 = x_2 + \varepsilon_2$, bildet das Intervall

$$\left(y_2, y_2 + \frac{1}{2^2}\varepsilon\right)$$

und nimmt in ihm einen neuen Punkt x_3 rechts von y_2 an, in welchem die gegebene Function stetig ist. Dann bildet man auch für diesen Punkt ein neues Intervall $(x_3, x_3 + \varepsilon_3)$ analog den früheren: $(x_1, x_1 + \varepsilon_1)$, $(x_2, x_2 + \varepsilon_2)$, so dass in jedem Punkt x desselben (höchstens $x_3 + \varepsilon_3$ ausgeschlossen)

$$|f(x) - f(x_3)| < \frac{\sigma}{2}$$

ist.

Fährt man so weiter fort, so entsteht ein Zahlensystem $x_1, x_2, x_3, \ldots$, das beständig wächst. Auf diese Weise gelangt man nun entweder 1) zu dem Punkt β, nachdem man nur eine endliche Anzahl von Intervallen $(x_1, x_1 + \varepsilon_1)$, $(x_2, x_2 + \varepsilon_2)$, $(x_3, x_3 + \varepsilon_3)$, ... gebildet hat, oder 2) die Anzahl der Punkte $x_1, x_2, x_3, \ldots$ wächst ins Unendliche und alsdann haben sie (§ 25) einen bestimmten Grenzwerth, der entweder gleich β oder kleiner als β ist.

Der Fall 2) kann aber nicht eintreten. Denn gesetzt, er wäre denkbar und a wäre die (β gleiche oder kleinere) Grenze der unendlich vielen Werthe $x_1, x_2, x_3, \ldots$, so müsste in jedes noch so kleine Intervall links von a eine unendlich grosse Anzahl dieser Punkte fallen. Weil nun die Function $f(x)$ im Punkt a auf der linken Seite stetig ist oder höchstens eine gewöhnliche Unstetigkeit hat, so kann man immer (§ 22) ein Intervall $(a - \omega, a)$ links von a derart bestimmen, dass für jedes Punktepaar ξ, η, das man in ihm (höchstens

mit Ausschluss von a) annehmen kann, immer

$$|f(\xi) - f(\eta)| < \frac{\sigma}{2}$$

ist. In diesem Intervall $(a - \omega, a)$ müssen dann ebenfalls unendlich viele der Punkte $x_1, x_2, x_3, \ldots$ liegen.

Wäre nun aber x_m einer dieser Punkte, so erhielte man für jeden Punkt x des Intervalls $(a - \omega, a)$ (höchstens a ausgeschlossen)

$$|f(x) - f(x_m)| < \frac{\sigma}{2}.$$

Daher könnte offenbar in Folge der Art, wie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ bestimmt worden sind, der Endpunkt $x_m + \varepsilon_m$ des dem Punkt x_m entsprechenden Intervalls $(x_m, x_m + \varepsilon_m)$ nicht in das Innere des Intervalls $(a - \omega, a)$ fallen, sondern könnte höchstens mit a zusammenfallen. Der folgende Punkt x_{m+1} fiele alsdann ausserhalb des Intervalls $(a - \omega, a)$, was ein Widerspruch ist. Man wird deshalb offenbar nothwendiger Weise nur nach Bildung einer endlichen Anzahl von Intervallen

$$(x_1, x_1 + \varepsilon_1), \quad (x_2, x_2 + \varepsilon_2), \quad (x_3, x_3 + \varepsilon_3) \ldots$$

den Punkt β erreichen.

Unter dieser Voraussetzung nehmen wir jetzt links von

$$x_1 + \varepsilon_1, \; x_2 + \varepsilon_2, \; x_3 + \varepsilon_3, \ldots$$

im Innern der bezüglichen Intervalle

$$(x_1, x_1 + \varepsilon_1), \quad (x_2, x_2 + \varepsilon_2), \quad (x_3, x_3 + \varepsilon_3), \ldots$$

Punkte $y_1', y_2', y_3', \ldots$ an, welche bezüglich von

$$x_1 + \varepsilon_1, \; x_2 + \varepsilon_2, \; x_3 + \varepsilon_3, \ldots$$

um weniger als

$$\frac{1}{2}\varepsilon, \; \frac{1}{2^2}\varepsilon, \; \frac{1}{2^3}\varepsilon, \ldots$$

(unter ε die Anfangs ausgewählte beliebige Zahl verstanden) entfernt sind. Wir betrachten dann die Zerlegung des Gesammtintervalls (α, β), die den auf einander folgenden Theilungspunkten $(\alpha, x_1, y_1', x_2, y_2', x_3, \ldots)$ entspricht.

Man sieht sofort, dass diese Zerlegung eine endlich grosse Anzahl von Intervallen (α, x_1), (x_1, y_1'), (y_1', x_2), $(x_2, y_2') \ldots$ liefert und grössere Schwankungen als σ nur in den Intervallen (α, x_1), (y_1', x_2), (y_2', x_3), $(y_3', x_4) \ldots$ vorkommen können

und dass die letzteren bezüglich kleiner als

$$\varepsilon,\ \varepsilon,\ \frac{1}{2}\varepsilon,\ \frac{1}{2^2}\varepsilon, \ldots$$

sind, also ihre Summe kleiner als 3ε ist. Weil nun auf eine durchaus gleiche Art auch in dem Fall geschlossen werden kann, dass Unstetigkeiten zweiter Art der gegebenen Function $f(x)$ nur links von den entsprechenden Punkten auftreten, so kann man nach dem allgemeinen Satz des § 186 nunmehr ohne Weiteres folgern, dass die hier in Betracht gezogene Function $f(x)$ einer bestimmten Integration zwischen α und β fähig ist.

5. Der bewiesene Satz kann dann auch verallgemeinert und auf den Fall ausgedehnt werden, in welchem die gegebene Function den in dem Satz enthaltenen Bedingungen für alle Punkte des Intervalls (α, β) mit Ausnahme einer Punktmenge erster Art genügt. Denn schliesst man diese Punkte in eine endliche Anzahl von Intervallen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ ein, deren Summe sich kleiner als irgend eine noch so kleine Zahl ε' voraussetzen lässt, so bleibt eine endliche Anzahl anderer Intervalle $\mu_1, \mu_2, \ldots$ übrig, in deren jedem die Bedingungen des vorigen Satzes stets erfüllt sind und welche man folglich in solche Theilintervalle zerlegen kann, dass die Summe der Intervalle, in denen grössere Schwankungen als σ vorkommen, kleiner als eine beliebige Zahl ε'' ist. Es sind also offenbar auch die Bedingungen des allgemeinen Satzes in § 186 erfüllt und die gegebene Function ist ebenfalls zwischen α und β integrirbar.

6. Aus Satz 4 erhält man dann sofort als speciellen Fall: Functionen, die in einem endlichen Intervall (α, β) stets endlich sind und entweder niemals oder doch nur eine endliche Anzahl von Schwankungen machen, sind der bestimmten Integration zwischen α und β fähig. Denn augenscheinlich kann das Gesammtintervall in eine endliche Anzahl von Intervallen aufgelöst werden, in deren jedem diese Functionen keine Schwankungen machen und sie sind deshalb nach § 25 rechts und links von jedem Punkt zwischen α und β stets continuirlich oder haben nur gewöhnliche Discontinuitäten.

7. Functionen, welche in dem Intervall (α, β) total unstetig sind, eignen sich nicht zur bestimmten Integration in diesem Intervall. Denn in diesem Fall sind in jedem willkürlich kleinen Intervall entweder in dem ganzen Intervall selbst oder in einigen bestimmten Theilen desselben die Sprünge der Function und daher auch ihre Schwankungen immer grösser als eine gewisse hinreichend kleine, aber bestimmte Zahl σ (§ 64) und es ist daher unmöglich, dass die im allgemeinen Satz (§ 186) aufgestellte Bedingung erfüllt werden kann.

---

§ 187*. Man kann den Satz 2 des § 187 noch erweitern, wenn man einen neuen Begriff einführt. In dem Intervall $\alpha \ldots \beta$ $(\alpha < \beta)$ sei irgend eine Menge G von unendlich vielen Punkten gelegen. Man bilde die Summe

$$S = \sum_{s=1}^{n} \delta_s p_s,$$

wo die $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n$ dieselbe Bedeutung haben wie bisher und p_s entweder Eins oder Null ist, je nachdem in δ_s ein Punkt von G liegt oder nicht. S ist > 0 und hat also eine untere Grenze Σ ihrer Werthe, die selbst > 0 ist, und nicht unterschritten wird, wie man auch die Zahl und die Grösse der Intervalle $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n$ annehmen möge. Ist ε aber eine beliebig kleine positive Zahl, so giebt es stets eine Eintheilung, für welche $S \leq \Sigma + \varepsilon$ ist. Es sei dies die Eintheilung $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n$. Dagegen sei nun (wie in § 184) $\delta_1' \delta_2' \ldots \delta_{n'}'$ eine andere Art der Bildung der Intervalle, bei der diese alle kleiner als eine gegebene Zahl d sind, und die zu δ_s' gehörige, dem p_s oben entsprechende Zahl, sei p_s'. Dann zeigt eine Betrachtung, die der zur Ableitung der Gleichung 4 des § 184 angewandten ganz gleich ist, dass

$$\sum_{s=1}^{n'} \delta_s' p_s' < \sum_{s=1}^{n} \delta_s p_s + nd \leq \Sigma + \varepsilon + nd.$$

Da nun ε und d beliebig klein sind, folgt, dass

$$\lim \sum_{s=1}^{n'} \delta_s' p_s' = \Sigma$$

ist, wenn die Grenze sich bezieht auf unendlich abnehmende d.[1]) Diese Zahl Σ heisst der *Inhalt* der Punktmenge G.[2]) Die Menge G sei, wenn $\Sigma > 0$, eine ausgedehnte, wenn $\Sigma = 0$, eine nicht ausgedehnte genannt (§ 14*).

Mit Benutzung dieses Begriffes kann man nun sagen: Wenn die zwischen α und β liegenden Unstetigkeitsstellen von $f(x)$ eine nicht ausgedehnte Menge bilden, ist $f(x)$ zwischen α und β integrirbar. Dann ist nämlich die Summe der Intervalle, in welchen Schwankungen grösser als σ vorkommen, gleich S und $\lim S = \Sigma$ ist ja $= 0$.

Weiter folgt: Die Function $f(x)$ ist zwischen α und β integrabel, wenn sie die Bedingungen der Nr. 4 des § 187 erfüllt in allen Punkten mit Ausnahme derer einer nicht ausgedehnten Menge G.

Denn man kann zuerst eine solche Eintheilung in n Theile machen, dass die Summe der Intervalle $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m$, die Punkte aus G enthalten, kleiner als ε' ist. In den übrigen Intervallen $\mu_1 \mu_2 \ldots$ ist die angezogene Bedingung erfüllt und folglich kann man (§ 187, Nr. 5) jedes dieser Intervalle weiter so zerlegen, dass die Summe der neuen Intervalle, in welchen die Schwankung $> \sigma$ ist, kleiner als ε'' ist. Bei der neuen, aus den alten Intervallen $\lambda_1 \lambda_2 \ldots$ und den neuen gebildeten Eintheilung ist also die Summe der Intervalle mit einer Schwankung $> \sigma$ höchstens $= \varepsilon' + \varepsilon''$ und kann beliebig klein gemacht werden.

§ 188. Es sei noch darauf hingewiesen, dass man in Folge der letzten Bemerkung in § 187 auch behaupten kann: Wenn eine Function $f(x)$ in einem Intervall (α, β) der bestimmten Integration fähig ist, so muss sie zwischen α und β entweder im Allgemeinen stetig oder punktirt unstetig und daher in gewissen Punkten eines jeden beliebigen auch kleinsten Theils des Intervalls (α, β) stetig sein (ihre Stetigkeitspunkte müssen überall dicht sein).

1) Stolz, Math. Ann. Bd. 23 S. 152. Pasch, Math. Ann. Bd. 30 S. 142.

2) Cantor, Math. Ann. Bd. 23 S. 473.

Wenn Hankel glaubte[1]), auch umgekehrt beweisen zu können, dass jede zwischen α und β punktirt unstetige Function, in dem Intervall (α, β) stets der bestimmten Integration fähig ist, so glauben wir nicht, einen solchen Satz aufstellen zu können, weil der Beweis Hankel's uns durchaus nicht streng genug zu sein scheint. Auf der andern Seite kennen wir ausser diesem Beweis in Bezug auf die punktirt unstetigen Functionen, die integrirbar sind, keinen andern Satz, der allgemeiner wäre, als die im vorigen Paragraphen gegebenen Sätze[2]).

Uebrigens sind die gewonnenen Ergebnisse bereits äusserst umfassend und setzen den gewaltigen Unterschied in volles Licht, der in Bezug auf die Möglichkeit der Ausführung zwischen den beiden Operationen der Differentiation und der Integration besteht. Denn während die Differentiation, wie wir in den früheren Kapiteln gesehen haben, sehr oft unmöglich ist, auch wenn sie nur auf Functionen angewendet wird, welche in einem gegebenen Intervall (α, β) immer stetig sind, ist die Integration dagegen nicht allein bei allen stetigen Functionen ausführbar, sondern auch bei unendlich vielen Classen von Functionen, die in jedem, auch dem kleinsten Theil des gegebenen Intervalls unendlich oft unstetig sind.

---

§ 189. Wir wollen jetzt einige Beispiele von bestimmten Integralen anführen, die auf Grund der von uns gegebenen Definition berechnet sind.

1. Es sei die Function $f(x) = x^k$, wobei k eine feste Zahl ist. Da diese Function sich offenbar zur bestimmten Integration zwischen zwei beliebigen positiven Zahlen eignet, so suche man das Integral

$$\int_\alpha^\beta x^k dx$$

für $0 < \alpha < \beta$.

---

1) Untersuchungen u. s. w. S. 30.

2) Beispiele für eine punktirt unstetige Function, die nicht integrirbar ist, geben Smith, Proc. Lond. Math. Soc. Bd. 6 S. 148. § 16; Volterra, Giorn. di Mat. Bd. 19 S. 76.

Man zerlege zu dem Zweck das Intervall (α, β) in n Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, indem man $n-1$ geometrische Mittel zwischen α und β einschaltet. Bezeichnet q den Factor der entsprechenden geometrischen Progression, so ist

$$q = \sqrt[n]{\frac{\beta}{\alpha}}$$

und die Theilintervalle δ_s sind durch die Gleichung gegeben

$$\delta_s = \alpha q^s - \alpha q^{s-1} = \alpha q^{s-1}(q-1).$$

Nimmt man nun als Werth f_s der Function in dem Intervall δ_s den dem unteren Endpunkt entsprechenden Werth

$$\alpha^k q^{(s-1)k},$$

so ist:

$$(5) \qquad \int_\alpha^\beta x^k dx = \lim_{n=\infty} \sum_1^n \alpha^{k+1} q^{(s-1)(k+1)}(q-1) =$$

$$= \lim_{n=\infty} \alpha^{k+1}(q-1)\left[1 + q^{k+1} + q^{2(k+1)} + \cdots + q^{(n-1)(k+1)}\right]$$

und daraus erhält man, wenn k von -1 verschieden ist:

$$\int_\alpha^\beta x^k dx = \lim_{n=\infty} \alpha^{k+1}(q-1)\frac{q^{n(k+1)}-1}{q^{k+1}-1}$$

$$= (\beta^{k+1} - \alpha^{k+1}) \lim_{q=1} \frac{q-1}{q^{k+1}-1}.$$

Setzt man aber $q = 1 + \varepsilon$, so wird

$$\lim_{q=1} \frac{q-1}{q^{k+1}-1} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^{k+1}-1} = \frac{1}{k+1}.$$

Daraus folgt, wenn k von -1 verschieden ist:

$$\int_\alpha^\beta x^k dx = \frac{\beta^{k+1} - \alpha^{k+1}}{k+1}.$$

Für $k = -1$ liefert dann die Gleichung (5)

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x} = \lim_{n=\infty} n\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right] = \log \frac{\beta}{\alpha}.$$

2. Nehmen wir nun die Function

$$\log(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2),$$

die, wenn α reell und seinem absoluten Werth nach von der

Einheit verschieden ist, in jedem beliebigen endlichen Intervall in Bezug auf x endlich und stetig ist und versuchen wir das Integral

$$\int_0^\pi \log(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx$$

zu berechnen.

Wir theilen zu dem Zweck das Intervall von 0 bis π in n gleiche Intervalle $\frac{\pi}{n}$ und nehmen wieder, wie vorhin, als Werth der f_s in dem Intervall δ_s denjenigen, der dem unteren Ende entspricht, das heisst also

$$\log\left(1 - 2\alpha\cos(s-1)\frac{\pi}{n} + \alpha^2\right).$$

Es ist dann:

$$\int_0^\pi \log(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)dx = \lim \frac{\pi}{n}\log(1-\alpha)^2 +$$

$$+ \lim\left[\frac{\pi}{n}\log\left\{\left(1 - 2\alpha\cos\frac{\pi}{n} + \alpha^2\right)\left(1 - 2\alpha\cos 2\frac{\pi}{n} + \alpha^2\right)\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdots\left(1 - 2\alpha\cos(n-1)\frac{\pi}{n} + \alpha^2\right)\right\}\right].$$

Da das erste Glied rechter Hand den Grenzwerth Null hat, so reicht es aus, wenn wir uns mit dem zweiten beschäftigen.

Beachtet man, dass die Gleichung

$$y^{2n} - 1 = 0$$

zwei reelle Wurzeln -1 und 1 und, für $k = 1, 2, 3, \ldots (n-1)$, die $2n - 2$ paarweise conjugirten Wurzeln

$$e^{\frac{k\pi i}{n}}, \quad e^{-\frac{k\pi i}{n}}$$

hat, dass ferner

$$\left(\alpha - e^{\frac{k\pi i}{n}}\right)\left(\alpha - e^{-\frac{k\pi i}{n}}\right) = 1 - 2\alpha\cos\frac{k\pi}{n} + \alpha^2$$

ist, so sieht man sofort, dass das Product, von dem in der vorstehenden Gleichung der Logarithmus genommen werden soll, gleich $\frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1}$ ist. Man erhält demnach:

$$\int_0^\pi \log(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx = \lim \frac{\pi}{n} \log \frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1}.$$

Es ist also für $\alpha^2 < 1$

$$\int_0^\pi \log(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx = 0$$

und für $\alpha^2 > 1$

$$\int_0^\pi \log(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx = \pi \log \alpha^2.$$

Ist dagegen $\alpha = \pm 1$, so lässt uns das vorstehende Verfahren im Stich. Zudem wird alsdann die Function unter dem Integralzeichen für $x = 0$ und $x = \pi$ unendlich und wir wollen uns für's Erste darauf beschränken, nur Integrale von solchen Functionen zu betrachten, die in dem ganzen Integrationsintervall stets endlich sind.

3. Endlich wollen wir noch die drei punktirt unstetigen Functionen betrachten, von denen in § 62 die Rede war und die nach § 187, 2 in jedem beliebigen Intervall zwischen 0 und 1 der bestimmten Integration fähig sind.

Führt man bei diesen Functionen die Theilung des in Betracht gezogenen Intervalls der Art aus, dass man zuerst eine endliche Anzahl von Intervallen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ bildet, welche die verschiedenen Unstetigkeitspunkte einschliessen und theilt dann die übrigbleibenden Intervalle in partielle Intervalle $\delta_1, \delta_2 \ldots$, wie in § 187, 2 im Allgemeinen gezeigt wurde, so findet man leicht, dass für die erste und dritte

$$\int_0^x f(x)\,dx = x$$

ist, wenn $x < 1$ und für die zweite

$$\int_0^x f(x)\,dx = \frac{2}{3 \cdot 4^m} + \left(x - \frac{1}{2^m}\right)\frac{1}{2^{m-1}} = \frac{x}{2^{m-1}} - \frac{1}{3 \cdot 4^{m-1}},$$

worin m die Werthe $1, 2, 3, \ldots$ annehmen kann und x zwischen $\frac{1}{2^m}$ und $\frac{1}{2^{m-1}}$ (diese Endpunkte eingeschlossen) liegt.

Setzt man so z. B. $m = 1$ und $x = 1$, so hat man

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3}.$$

Vierzehntes Kapitel.

Haupteigenschaften der bestimmten Integrale.

§ 190. Wir gehen nun dazu über, auf Grund unserer Definition des bestimmten Integrals

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

dessen Haupteigenschaften für Functionen $f(x)$ zu entwickeln, die in dem endlichen Intervall (α, β) stets endlich und integrirbar sind.

1. Beachtet man, dass, wenn $\beta < \alpha$ ist, die Intervalle δ_s, in welche man das Gesammtintervall (α, β) zur Berechnung des Integrals

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

zu theilen hat, als negativ angesehen werden müssen, so ist offenbar

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx.$$

2. Ist γ eine zwischen α und β liegende Zahl und beachtet man, dass die Theilung des Intervalls (α, β) in Theilintervalle δ_s immer so vorgenommen werden kann, dass ein Theilungspunkt mit γ zusammenfällt, so findet man

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx;$$

und weil man daraus erhält:

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \int_\gamma^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx$$

und von γ vorausgesetzt wird, dass es zwischen α und β liegt, so ist die vorstehende Formel auch für den Fall bewiesen, dass γ ausserhalb des Intervalls (α, β) liegt, wenn alsdann nur die Function $f(x)$ auch in dem ausserhalb gelegenen Theil integrirbar ist oder wenigstens durch eine Function fortgesetzt wird, die der Integration fähig ist.

3. Ist $f(x) = 1$, so erhält man

$$\int_\alpha^\beta dx = \lim \Sigma \delta_s = \beta - \alpha = \text{dem Intervall.}$$

4. Wenn die Functionen

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_m(x)$$

zwischen α und β endlich und der Integration fähig sind und ihre Anzahl endlich ist, so ist offenbar auch

$$f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_m(x)$$

zwischen α und β endlich und integrirbar. Man erhält:

$$\int_\alpha^\beta [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_m(x)]\,dx$$

$$= \int_\alpha^\beta f_1(x)\,dx \pm \int_\alpha^\beta f_2(x)\,dx \pm \cdots \pm \int_\alpha^\beta f_m(x)\,dx.$$

Wenn c eine Constante bedeutet und $f(x)$ zwischen α und β endlich und integrirbar ist, so erhält man auf gleiche Art:

$$\int_\alpha^\beta c f(x)\,dx = c \int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

5. Wenn eine endliche Anzahl von endlichen Functionen

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots f_m(x)$$

zwischen α und β der bestimmten Integration fähig

ist, so gilt das Gleiche auch von ihrem Product

$$f_1(x) f_2(x) \dots f_m(x).$$

Denn setzen wir zunächst voraus, es handle sich nur um zwei Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ und bezeichnen mit D die Schwankung des Products $f_1(x) f_2(x)$, mit D_1, D_2 diejenigen der Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ in dem Intervall δ_s und mit L_1, L_2 die oberen und mit l_1, l_2 die unteren Grenzwerthe der $f_1(x)$ und $f_2(x)$ in demselben Intervall. Setzt man der Einfachheit wegen voraus, diese Grenzwerthe seien sämmtlich positiv, so ist

$$D \leq L_1 L_2 - l_1 l_2$$

und deshalb auch:

$$D \leq L_1 (L_2 - l_2) + l_2 (L_1 - l_1) \quad \text{oder} \quad D \leq L_1 D_2 + l_2 D_1 .$$

Daraus erkennt man, dass, wenn die Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ stets positiv sind und den Bedingungen der Integrabilität genügen, das Gleiche auch für ihr Product $f_1(x) f_2(x)$ gilt.

Sind ferner die Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ in dem Intervall (α, β) nicht immer positiv, so macht man sie dazu, indem man ihnen passende Constante zufügt. Alsdann ist das den neuen Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ entsprechende Product $\varphi(x) \psi(x)$ zwischen α und β integrirbar und daher gilt offenbar dasselbe auch in diesem Fall für das Product $f_1(x) f_2(x)$. Beachtet man nun, dass man von dem Fall eines Products aus zwei Functionen nach und nach zu dem Fall eines Products aus drei, vier, etc. Functionen übergehen kann, so ist damit offenbar der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Aus diesem Beweis geht weiter hervor: Wenn z. B. $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei zwischen α und β endliche und integrirbare Functionen und $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ die bekannten Intervalle sind, in die das Gesammtintervall (α, β) zerlegt wird, so ist auch:

$$\int_\alpha^\beta f(x) \varphi(x) dx = \lim \Sigma \delta_s f_s \varphi_s ,$$

worin f_s und φ_s irgend welche zwischen den unteren und oberen Grenzwerthen bezüglich von $f(x)$ und $\varphi(x)$ in dem Intervall δ_s ganz beliebig angenommene Werthe sind[1]).

1) Du Bois-Reymond, Math. Ann. Bd. 16 S. 112 u. Bd. 20 S. 122.

6. Der Quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ zweier Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$, die in einem endlichen Intervall (α, β) immer endlich und integrirbar sind, ist in demselben Intervall jedesmal dann integrirbar, wenn der Nenner $\varphi(x)$ sich zwischen α und β stets numerisch um mehr als eine bestimmte Grösse λ von Null entfernt hält.

Dann nehmen wir zunächst an, die Function $f(x)$ sei zwischen α und β immer positiv und bezeichnen mit σ eine positive beliebig kleine Zahl.

Da die beiden Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwischen α und β der Integration fähig sind, so kann das Intervall (α, β) in Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ derart zerlegt werden, dass die Summe τ derjenigen Intervalle (wenn überhaupt solche vorhanden sind), in denen die Schwankungen der $f(x)$ und $\varphi(x)$ grösser als σ sind, kleiner als eine ganz beliebige Grösse ε ist.

In jedem der andern Intervalle δ_s hat die Function $\varphi(x)$, wenigstens wenn σ (wie wir stets voraussetzen können) kleiner als λ angenommen wird, immer dasselbe Vorzeichen, wobei allerdings von Intervall zu Intervall die Vorzeichen wechseln können. Sind daher D, D_1, D_2 die bezüglichen Schwankungen der Functionen $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, $f(x)$ und $\varphi(x)$ in dem Intervall δ_s, ferner l_1 und l_2 die unteren und L_1 und L_2 die oberen Grenzwerthe der $f(x)$ und $\varphi(x)$ in demselben Intervall, so erhält man für positive l_2 und L_2

$$D < \frac{L_1}{l_2} - \frac{l_1}{L_2} \quad \text{oder} \quad D < \frac{L_1 D_2 + l_2 D_1}{l_2 L_2}$$

oder auch

$$D < \frac{L_1 + l_2}{\lambda^2}\sigma.$$

Sind dagegen l_2 und L_2 negativ, so ist

$$D \leqq \frac{l_1}{l_2} - \frac{L_1}{L_2} \quad \text{oder} \quad D \leqq \frac{l_1 - l_2}{\lambda^2}\sigma.$$

Wenn daher σ hinreichend klein genommen wird, so sind die Intervalle δ_s, in welchen die Schwankungen der Function $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ über eine beliebig kleine Zahl σ' hinausgehen, sicher nur unter denjenigen Intervallen zu suchen, in welchen die Functionen $f(x)$ oder $\varphi(x)$ grössere Schwankungen als σ machen. Weil

nun, wie gesagt, die Summe τ dieser Intervalle kleiner als eine willkürlich kleine Zahl ε vorausgesetzt werden kann, so ist damit bewiesen, dass der Quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ zwischen α und β integrirbar ist, wenn die obigen Bedingungen erfüllt sind und $f(x)$ zwischen α und β immer positiv ist.

Beachtet man ferner, dass der Quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ auch als das Product der beiden Functionen $f(x)$ und $\frac{1}{\varphi(x)}$ angesehen werden kann und diese Functionen nach der Voraussetzung und dem eben Bewiesenen beide zwischen α und β integrirbar sind, so folgt, dass der Quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ in dem Intervall (α, β) integrirbar ist, auch wenn $f(x)$ zwischen α und β nicht immer positiv ist. Damit ist jetzt der obige Satz vollständig bewiesen.

Es dürfte überflüssig sein, darauf aufmerksam zu machen, dass die Umkehrung der unter 4, 5 und 6 mitgetheilten Eigenschaften unter Umständen sehr wohl unzulässig sein kann.

7. Wenn, wie bisher, $f(x)$ eine endliche und zwischen α und β $(\alpha < \beta)$ integrirbare Function ist und wenn

$$(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n), \quad (\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_{n'}')$$

irgend zwei Systeme von Theilintervallen sind, in die das Gesammtintervall (α, β) zerlegt ist, so hat man nach den Gleichungen in § 183

$$\left|\sum_1^{n'} \delta_s' f_s' - \sum_1^{n} \delta_s f_s\right| < \sum_1^{n} \delta_s D_s + \sum_1^{n'} \delta_s' D_s'.$$

Betrachtet man nunmehr n als eine feste Zahl und bemerkt, dass bei allmählichem Abnehmen der δ_s' die Summe

$$\sum_1^{n'} \delta_s' f_s'$$

dem Werth des Integrals

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

schliesslich so nahe kommt, wie man nur will und dass

$$\sum_{1}^{n'} \delta_s' D_s'$$

nach Belieben klein gemacht werden kann, so gilt offenbar die Ungleichung

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx - \sum_{1}^{n} \delta_s f_s \right| < \sum_{1}^{n} \delta_s D_s .$$

Man kann daher behaupten: Für jedes specielle Werthsystem $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ liefert die entsprechende Summe

$$\sum_{1}^{n} \delta_s f_s$$

stets einen Näherungswerth an das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx;$$

der damit begangene Fehler ist absolut genommen nicht grösser als die Summe

$$\sum_{1}^{n} \delta_s D_s .$$

Wenn also

$$\sum_{1}^{n} \delta_s D_s < \sigma$$

ist, so ist der Fehler, den man begeht, indem man annimmt,

$$\sum_{1}^{n} \delta_s f_s$$

sei der Werth des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx,$$

numerisch geringer als σ.

Diese Resultate gelten offenbar auch, wenn $\alpha > \beta$ ist, wenn man dann nur statt der negativen Summe

$$\sum_1^n \delta_s D_s$$

ihren Absolutwerth setzt.

Bemerkt man dann insbesondere noch, dass die δ_s immer einander und $\frac{\beta-\alpha}{n}$ gleich vorausgesetzt werden können, so kommt man zu den beiden folgenden Sätzen: Der Quotient

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

des Integrals

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

durch das Integrationsgebiet kann als der Grenzwerth des arithmetischen Mittels

$$\frac{1}{n}\sum_1^n f_s$$

der n Werthe der Function in beliebigen Punkten der n Intervalle aufgefasst werden, in welche das Gesammtintervall (α, β) getheilt ist; oder auch insbesondere als der Grenzwerth des arithmetischen Mittels der n Werthe der Function in den gleichweit von einander abstehenden Punkten:

$$\alpha,\ \alpha+\frac{\beta-\alpha}{n},\ \alpha+2\frac{\beta-\alpha}{n},\cdots,\ \alpha+(n-1)\frac{\beta-\alpha}{n}$$

und: Irgend eines der gedachten arithmetischen Mittel

$$\frac{1}{n}\sum_1^n f_s$$

multiplicirt mit dem Integrationsgebiet $\beta-\alpha$ liefert einen Annäherungswerth an das Integral, der mit einem Fehler behaftet ist, welcher über das Product aus dem Integrationsgebiet in das entsprechende Mittel

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\delta_s f_s$$

der **Schwankungen nicht hinausgeht.**

8. Die eben gefundene Eigenschaft der Summen

$$\sum_{1}^{n}\delta_s f_s$$

führt zu einigen Beziehungen, die sich in der Folge nützlich erweisen werden.

Ist eine endliche Function $f(x)$ in einem Intervall (α, β) der Integration fähig, so ist sie es auch in jedem Theil dieses Intervalls. Denkt man sich also das Gesammtintervall (α, β) in die Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ getheilt, so gilt auch für die Summen

$$\sum_{1}^{i}\delta_s f_s,$$

wenn $i \leqq n$, was oben von den Summen

$$\sum_{1}^{n}\delta_s f_s$$

gesagt wurde. Man erhält also offenbar die folgenden Beziehungen:

$$\delta_1 f_1 = \int_{\alpha}^{\alpha+\delta_1} f(x)\,dx + k_1\sum_{1}^{1}\delta_s D_s$$

$$\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 = \int_{\alpha}^{\alpha+\sum\limits_{1}^{2}\delta_s} f(x)\,dx + k_2\sum_{1}^{2}\delta_s D_s$$

. . . .

$$\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 + \cdots + \delta_i f_i = \int_{\alpha}^{\alpha+\sum\limits_{1}^{i}\delta_s} f(x)\,dx + k_i\sum_{1}^{i}\delta_s D_s,$$

in welchen $k_1, k_2, \ldots, k_i$ zwischen -1 und 1 (mit Einschluss dieser Grenzen) liegende Zahlen sind. Setzt man daher

$$\sum_1^n \delta_s D_s < \sigma$$

voraus und beachtet, dass für $i < n$ dem absoluten Werth nach (das heisst auch wenn die δ_s negativ sind)

$$\sum_1^i \delta_s D_s \leqq \sum_1^n \delta_s D_s ,$$

so kann man offenbar auch setzen:

$$\begin{aligned}
\delta_1 f_1 &= \int_\alpha^{\alpha+\delta_1} f(x)\,dx + k_1 \sigma \\
\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 &= \int_\alpha^{\alpha+\sum_1^2 \delta_s} f(x)\,dx + k_2 \sigma \\
&\dots\dots\dots\dots \\
\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 + \cdots + \delta_i f_i &= \int_\alpha^{\alpha+\sum_1^i \delta_s} f(x)\,dx + k_i \sigma ,
\end{aligned}$$

worin $k_1, k_2, \dots, k_i$ andere, wieder zwischen -1 und 1 liegende Zahlen sind (diese Grenzwerthe eingeschlossen).

9. Wenn die Function $f(x)$ in einem endlichen Intervall (α, β) endlich und der Integration fähig ist und man ändert auf irgend eine Art ihren Werth in einer endlichen Anzahl von Punkten oder auch in einer unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung, jedoch so, dass die Function endlich bleibt, so ist die neue Function zwischen α und β integrirbar und der Werth des Integrals

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

ändert sich nicht.

In der That, man kann die Punkte, in denen der Werth der Function geändert worden ist, in eine endliche Anzahl von Intervallen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ einschliessen, deren Summe

kleiner als irgend eine beliebige Zahl ε_1 ist. Die übrig bleibenden Intervalle (in denen die Function keine Aenderung erlitten hat) lassen sich dann in Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots$ derart zerlegen, dass die Summe derjenigen von diesen Intervallen, in denen Schwankungen stattfinden, die grösser als eine gegebene, aber willkürlich kleine und positive Zahl σ sind, kleiner als irgend eine beliebige Zahl ε_2 ist. Bei der so erhaltenen Zerlegung des Gesammtintervalls (α, β) in die Theilintervalle $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ kann alsdann offenbar die geänderte Function $\varphi(x)$ Schwankungen, die grösser als σ sind, nur in einigen Intervallen machen, deren Summe kleiner als $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ist. Daraus lässt sich einstweilen schliessen, dass $\varphi(x)$ zwischen α und β integrirbar ist. Man kann es nun überdies so einrichten, dass die Summen

$$\Sigma \delta_s f_s + \Sigma \lambda_i f_i, \quad \Sigma \delta_s \varphi_s + \Sigma \lambda_i \varphi_i$$

(deren Grenzwerthe die Werthe der Integrale

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx, \quad \int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx$$

liefern) nur um die Summen $\Sigma \lambda_i f_i$, $\Sigma \lambda_i \varphi_i$, welche sich über die Intervalle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ erstrecken, von einander verschieden sind. Diese letzteren Summen übersteigen dann die Grösse $L(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots)$ oder $L\varepsilon_1$ nicht, wenn L die obere Grenze der absoluten Werthe der $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwischen α und β ist. Man hat daher auch offenbar

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx,$$

womit der obige Satz jetzt vollständig erwiesen ist.

Auf Grund dieses Satzes kann man schon jetzt bemerken: Während augenscheinlich der Werth des Integrals

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$$

von den Werthen abhängt, die die Function in jeder noch so kleinen Umgebung eines jeden Punktes des Integrations-

gebietes hat, hängt derselbe durchaus nicht von dem Werth ab, den die Function in jedem einzelnen speciellen für sich betrachteten Punkt besitzt, weil dieser Werth beliebig geändert werden kann, ohne dass damit der Werth des Integrals alterirt wird.

Ebenfalls auf Grund dieses Satzes und als speciellen Fall desselben, lässt sich dann behaupten: Wenn eine endliche Function $f(x)$ zwischen α und β nur im Allgemeinen stetig ist oder nur Unstetigkeiten in einer Punktmenge der ersten Gattung hat, so lässt sich die Berechnung des bestimmten Integrals

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

ausführen, indem man als Werth der Function in den Unstetigkeitspunkten einen ganz beliebigen endlichen Werth nimmt. Gerade aus diesem Grund haben die erste und dritte der punktirt unstetigen Functionen, von denen im § 62 die Rede war, zwischen 0 und x für $x < 1$ dasselbe bestimmte Integral (§ 189, 3) und dieses Integral würde auch dasselbe geblieben sein, wenn die entsprechende Function in dem in Betracht gezogenen Intervall $(0, x)$ überhaupt keine Unstetigkeiten hätte und stets gleich 1 wäre.

9*. Die beiden Integrale

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$$

sind gleich, wenn für jedes, wenn auch noch so kleine positive σ, die Punkte, in welchen sich $f(x)$ und $\varphi(x)$ um mehr als σ unterscheiden, eine nicht ausgedehnte Menge bilden[1]). Denn bei einer bestimmten Eintheilung seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ die Intervalle, in welchen Punkte vorkommen, für die $|f(x) - \varphi(x)| > \sigma$ ist, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ diejenigen, für welche in allen ihren Punkten $|f(x) - \varphi(x)| \leqq \sigma$ ist. Dann ist die Differenz

1) Harnack, Math. Ann. Bd. 19 S. 243.

$$\left|\sum_1^n \delta_s f_s - \Sigma \delta_s \varphi_s\right| = \left|\sum_1^m \lambda_s (f_s - \varphi_s) + \sum_1^p \mu_i (f_i - \varphi_i)\right|$$

$$< \sigma \Sigma \mu_i + \left|\sum_1^m \lambda_s (f_s - \varphi_s)\right|$$

$$< \sigma(\beta - \alpha) + \varDelta \Sigma \delta_s p_s,$$

wenn $\varDelta$ der grösste Werth von $|f(x) - \varphi(x)|$ ist, der zwischen α und β vorkommt, und p_s wie in § 187* bestimmt ist. Da die Menge G für jedes beliebig kleine σ nicht ausgedehnt sein soll, kann die rechte Seite der letzten Gleichung so klein gemacht werden als man will, womit der Satz bewiesen ist.

10. Allgemeiner lässt sich hinzufügen: Ist $f(x)$ zwischen α und β eine endliche und integrirbare Function, so ändert sich der Werth des Integrals

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

nicht, wenn man die Werthe der Function in einer beliebigen Punktmenge der ersten oder zweiten Gattung ändert, vorausgesetzt, dass die neue Function $\varphi(x)$ zwischen α und β noch integrirbar ist und in jedem noch so kleinen Theil des gegebenen Intervalls immer Punkte vorhanden sind, in welchen der Werth der Function unverändert geblieben ist; oder wie man auch sagen kann, wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ in einer überall dichten Punktmenge übereinstimmen. Denn alsdann kann man augenscheinlich immer annehmen, dass die Glieder der Summe $\Sigma \delta_s \varphi_s$, deren Grenzwerth das Integral

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$$

ist, in keiner Weise von den entsprechenden Gliedern der Summe $\Sigma \delta_s f_s$, deren Grenzwerth das ursprüngliche Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

ist, verschieden sind.

11. Als Folgerung aus diesem Satz und zugleich als Specialfall desselben findet man ohne Mühe: Bei allen zwischen α und β endlichen und integrirbaren Functionen $f(x)$ kann man bei der Berechnung des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

immer von denjenigen Unstetigkeiten der $f(x)$ absehen, die sich durch Aenderung des Werthes der Function in den entsprechenden Punkten beseitigen lassen; das heisst, man kann sich die Stetigkeit der Function durch die Vornahme dieser Aenderung wieder hergestellt denken. Ferner kann man in den Punkten x, in denen die Function gewöhnliche Unstetigkeiten hat, als Werth derselben irgend eine durchaus beliebige zwischen $f(x-0)$ und $f(x+0)$ liegende Zahl annehmen, ebenso wie man in den Punkten x, in denen die Function auf einer oder auf beiden Seiten Unstetigkeiten der zweiten Art hat, als Werth derselben irgend eine der Zahlen auswählen kann, die zwischen denjenigen Werthen liegen, innerhalb deren sie schliesslich bei der unbeschränkten Annäherung der x an diese Punkte hin- und herschwankt. Weil nämlich die Function $f(x)$ zwischen α und β integrirbar ist, so kann man sich immer das Intervall (α, β) in Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ derart zerlegt denken, dass die Summe der Intervalle, in welchen die Schwankungen grösser als eine positive aber beliebig kleine Zahl σ sind, kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Falls ferner die Endpunkte einiger der Intervalle $\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_{n-1}$ im Innern des Intervalls (α, β) nicht in Stetigkeitspunkte der $f(x)$ fallen, so kann man nach § 188 rechts und links von diesen Endpunkten und in einer Entfernung von ihnen, die kleiner als $\frac{\varepsilon}{4n}$ ist, stets Stetigkeitspunkte der $f(x)$ antreffen. Benutzt man dann diese Punkte als Endpunkte neuer Intervalle, so lässt sich eine neue Theilung des gegebenen Intervalls in Theilintervalle $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_{n'}'$

derart bilden, dass die Summe derjenigen, in welchen grössere Schwankungen als σ stattfinden, hinter ε zurückbleibt, und dass überdies ihre Endpunkte (höchstens mit Ausschluss von α und β) sämmtlich in Stetigkeitspunkten der $f(x)$ liegen. Bezeichnet man nun mit $\varphi(x)$ eine aus $f(x)$ dadurch, dass ihre Werthe auf die oben angegebene Art geändert wurden, abgeleitete Function, so sind offenbar in jedem noch so kleinen Theil des Intervalls (α, β) immer Punkte vorhanden, in denen $\varphi(x)$ und $f(x)$ denselben Werth haben, weil in diesem Theil stets Stetigkeitspunkte der $f(x)$ existiren. Bedient man sich dann ferner der obigen Theilung des Intervalls (α, β) in Theilintervalle $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_{n'}'$, so werden in jedem dieser Intervalle (höchstens die Endintervalle δ_1' und $\delta_{n'}'$ ausgeschlossen) die Schwankungen der $\varphi(x)$ nicht über die entsprechenden Schwankungen der $f(x)$ hinausgehen. Es wird daher auch $\varphi(x)$ zwischen α und β integrirbar und nach der eben entwickelten allgemeinen Eigenschaft, wie wir behauptet haben,

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

sein.

12. Es verdient besondere Erwähnung, dass die seither bewiesenen Eigenthümlichkeiten die Möglichkeit der Existenz unendlich vieler punktirt unstetiger Functionen $\psi(x)$ einleuchsend machen, welche in unendlich vielen Punkten jedes beliebigen noch so kleinen Theils des gegebenen Intervalls (α, β) von Null verschieden sind und für welche dennoch das über einen beliebigen Theil (α_1, β_1) des gegebenen Intervalls erstreckte Integral

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \psi(x)dx$$

immer gleich Null ist[1]). Daraus folgt dann weiter: Wenn zwei Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$, die zwischen α und β endlich und zur Integration geeignet sind, in jedem beliebigen Theil (α_1, β_1) des Intervalls (α, β) dasselbe Integral haben, so kann

1) Thomae, Einleit. Seite 14; Pasch, Math. Ann. Bd. 30 S. 150.

man nicht immer behaupten, dass diese Functionen für jeden Werth von x zwischen α und β einander gleich sein müssen, da sie sehr wohl um eine Function $\psi(x)$ von einander differiren können, deren über jeden beliebigen Theil (α_1, β_1) des gegebenen Intervall erstrecktes Integral

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \psi(x)\,dx$$

immer gleich Null ist.

13. Aus der Definition der bestimmten Integrale folgt weiter unmittelbar: Wenn die bekannte Function $f(x)$ in den Punkten, in welchen sie von Null verschieden ist, stets dasselbe Vorzeichen hat, so ist das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

entweder Null oder eine von Null verschiedene Grösse, die dasselbe oder das entgegengesetzte Vorzeichen wie $f(x)$ hat, je nachdem $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ ist. Und wenn überdies zwischen α und β ein Intervall von endlicher Ausdehnung existirt, in welchem $f(x)$ von Null um mehr als eine bestimmte Grösse abweicht, so ist das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

von Null verschieden. Es wird insbesondere stets dann von Null verschieden sein, wenn die Function $f(x)$ nicht immer Null ist und in den Punkten, in welchen sie nicht Null ist, stets dasselbe Vorzeichen hat und in wenigstens einem dieser Punkte x' auch stetig ist. Denn, wenn alsdann $f(x') = A$ und A von Null verschieden ist, so existirt eine Umgebung von x', in welcher $f(x)$ von Null um mehr als $\frac{A}{2}$ abweicht.

14. Daraus geht dann insbesondere noch hervor: Die zwischen α und β integrirbaren Functionen $\psi(x)$, deren über jeden beliebigen Theil des Intervalls (α, β)

erstrecktes Integral stets Null ist, müssen in unendlich vielen Punkten jedes beliebigen noch so kleinen Theils des Intervalls stets Null sein. Denn da in diesem Theil immer unendlich viele Punkte existiren müssen (§ 188), in denen $\psi(x)$ stetig ist, so würde, wenn in x', einem dieser Punkte, $\psi(x') = A$ und A von Null verschieden wäre, eine Umgebung $(x' - \varepsilon_1, x' + \varepsilon_2)$ von x' existiren, in welcher $\psi(x)$ zwischen $\frac{1}{2}A$ und $\frac{3}{2}A$ läge, und es wäre das Integral

$$\int_{x'-\varepsilon_1}^{x'+\varepsilon_2} \psi(x)\,dx$$

nicht Null.

In Folge dieser Bemerkung und mit Rücksicht auf § 45 lässt sich auch behaupten: Stetige Functionen, deren Integral in jedem beliebigen Theil des Intervalls (α, β) Null ist, sind immer gleich Null. Und: Wenn zwei Functionen $f(x)$ und $\psi(x)$ zwischen α und β endlich und der Integration fähig sind und in jedem beliebigen Theil (α_1, β_1) des Intervalls (α, β) immer dasselbe Integral haben, so sind sie in unendlich vielen Punkten jedes beliebigen noch so kleinen Theils dieses Intervalls (α, β) einander gleich, und wenn ihre Differenz eine zwischen α und β stetige Function darstellt, so sind sie in dem ganzen genannten Intervall (α, β) immer einander gleich.

15. Ferner: Wenn $f(x)$ eine zwischen α und β endliche und integrirbare Function ist, so ist es auch die aus den Absolutwerthen der $f(x)$ gebildete Function $f_1(x)$. Denn offenbar sind die Schwankungen der $f_1(x)$ in jedem Theil des Intervalls (α, β) niemals grösser als die entsprechenden der $f(x)$. Ueberdies, wenn $\alpha < \beta$, so ist dem Absolutwerth nach

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \right| < \int_\alpha^\beta f_1(x)\,dx.$$

16. Aehnlich folgt aus der Definition der Integrale oder auch aus dem Satz 13 dieses Paragraphen: Wenn die bei-

den Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ in dem Intervall (α, β) endlich und integrirbar sind und immer $f(x) > \varphi(x)$ ist, so gelten die Beziehungen:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx \quad \text{oder} \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx < \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx,$$

je nachdem $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ ist. Wenn ferner zwischen α und β ein Intervall von endlicher Ausdehnung existirt, in welchem $f(x)$ von $\varphi(x)$ um mehr als eine bestimmte Grösse abweicht, wie insbesondere, wenn zwischen α und β wenigstens ein Punkt existirt, in welchem die Differenz $f(x) - \varphi(x)$ von Null verschieden und stetig ist, alsdann sind die Gleichheitszeichen auszuschliessen und man hat

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx \quad \text{oder} \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx < \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx,$$

je nachdem $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ ist.

17. Hieraus in Verbindung mit der vorhergehenden Bemerkung erhält man dann: Wenn die Function $\varphi(x)$ zwischen α und β $(\alpha < \beta)$ endlich und integrirbar ist und dasselbe von der $f(x)$ oder wenigstens von dem Product $\varphi(x)f(x)$ gilt und $f(x)$ numerisch stets kleiner als eine endliche Zahl ist und man alsdann mit $\varphi_1(x)$ die aus den absoluten Werthen der $\varphi(x)$ gebildete Function bezeichnet und mit L die obere Grenze der Absolutwerthe der $f(x)$ zwischen α und β oder eine grössere Zahl, so hat man

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx \right| < L \int_\alpha^\beta \varphi_1(x)\,dx.$$

Denn entweder ist direct bekannt, dass das Product $f(x)\varphi(x)$ zwischen α und β der Integration fähig ist, oder es geht dies doch sofort aus den dann für $f(x)$ aufgestellten Bedingungen hervor (Satz 5). Und wenn $f_1(x)$ die Function ist,

welche die Absolutwerthe der $f(x)$ darstellt, so erhält man aus den beiden vorangegangenen Sätzen:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx\right| < \int_\alpha^\beta f_1(x)\varphi_1(x)dx < L\int_\alpha^\beta \varphi_1(x)dx.$$

18. Man findet ferner noch ohne Weiteres: Es sei die Function $\varphi(x)$ zwischen α und β endlich und integrirbar und habe da, wo sie von Null verschieden ist, immer dasselbe Vorzeichen, und gleichzeitig sei die Function $f(x)$ zwischen α und β stets endlich und überdies auch integrirbar oder wenigstens derart, dass das Product $f(x)\varphi(x)$ in diesem Intervall sich integriren lässt. Bezeichnet man alsdann mit L und l die obere und untere Grenze der Werthe der $f(x)$ zwischen α und β, so liegt das Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx$$

zwischen den beiden Grössen

$$L\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx \text{ und } l\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx$$

oder ist einer dieser Grössen gleich, so dass also, $\alpha < \beta$ vorausgesetzt, die Beziehungen gelten

$$L\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx > \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx > l\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx,$$

wenn $\varphi(x)$, wo sie von Null abweicht, positiv ist. Statt dessen erhält man

$$L\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx < l\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx,$$

wenn $\varphi(x)$ da, wo sie nicht Null ist, negative Werthe hat. Denn, sollte man nicht schon wissen, dass das Product $f(x)\varphi(x)$ zwischen α und β integrirbar ist, so ginge dies doch sofort aus den Bedingungen hervor, die alsdann für die $f(x)$ gelten (Satz 5). Es sind daher die Integrale

$$\int_\alpha^\beta [L - f(x)]\varphi(x)dx, \quad \int_\alpha^\beta [f(x) - l]\varphi(x)dx$$

entweder gleich Null oder haben dasjenige Vorzeichen, welches $\varphi(x)$ in den Punkten, in denen sie von Null verschieden ist, hat. Wenn überdies zwischen α und β wenigstens ein Intervall von endlicher Ausdehnung existirt, in welchem sowohl $\varphi(x)$ von Null als $f(x)$ von L und l um mehr als eine bestimmte Grösse entfernt ist, wie das letztere zum Beispiel der Fall ist, wenn $f(x)$ in einem Punkt dieses Intervalls stetig ist und einen von l und L verschiedenen Werth hat, alsdann verschwinden die Gleichheitszeichen aus den vorstehenden Beziehungen und man erhält entweder:

$$L\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx > \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx > l\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx$$

oder:

$$L\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx < \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx < l\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx.$$

19. Die vorstehenden Sätze lassen sich offenbar auch zur angenäherten Berechnung der bestimmten Integrale verwerthen oder doch wenigstens zur leichten Ermittlung von Grenzwerthen, zwischen welchen die Integrale liegen müssen.

Aus ihnen gehen dann weitere wichtige Resultate hervor; so findet man zum Beispiel auf Grund des letzten Satzes: Wenn eine Function $\varphi(x)$ in allen Punkten x zwischen α und β, in denen sie von Null verschieden ist, stets dasselbe Vorzeichen hat und wieder, wie oben, für $f(x)$ und $\varphi(x)$ oder für $\varphi(x)$ und das Product $f(x)\varphi(x)$ die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind und man bezeichnet dann mit Θ eine Zahl, die zwischen der oberen und unteren Grenze L und l der Werthe liegt, die $f(x)$ zwischen α und β annimmt (diese Grenzen L und l eingeschlossen), so ergiebt sich die folgende Gleichung:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx = \Theta \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx\,.$$

Dieselbe wird vielfach angewendet und bei Bestimmung der in ihr vorkommenden Zahl Θ kann man nach den Sätzen 9 und 10 auch von einigen Werthen der $f(x)$ zwischen α und β, z. B. von denjenigen in den Endpunkten α und β abstrahiren. Wenn man beachtet, dass, falls die Function $f(x)$ zwischen α und β stets endlich und stetig ist, wenigstens ein Werth x_1 von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen) existirt, für welchen $f(x_1) = \Theta$ ist, so erhält man noch insbesondere: In dem Fall der Stetigkeit der endlichen Function $f(x)$ zwischen α und β gilt die folgende Gleichung:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx = f(x_1)\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx\,.$$

Da $x_1 = \alpha + \varepsilon(\beta - \alpha)$, wenn ε zwischen 0 und 1 liegt (mit Einschluss dieser Grenzen), so lässt sich auch setzen

$$(6) \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx = f[\alpha + \varepsilon(\beta - \alpha)]\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich mit Leichtigkeit andere ableiten, die in dem Fall zu benutzen wären, dass $\varphi(x)$ zwischen α und β Zeichenwechseln unterworfen wäre; doch würde es auch genügen, diese Formeln auf das Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)[\varphi(x) + c]\,dx$$

anzuwenden, in welchen c eine passende Constante bedeutet, oder gelegentlich auch das Gesammtintervall (α, β) in eine endliche Anzahl von Theilintervallen zu zerlegen, in deren jedem die Function $\varphi(x)$ stets dasselbe Vorzeichen hat.

20. Nimmt man speciell an $\varphi(x) = 1$ und setzt der Einfachheit wegen $\beta - \alpha = h$, so ist

$$\int_\alpha^{\alpha+h} f(x)\,dx = \Theta h,$$

wenn Θ eine zwischen der unteren Grenze l und der oberen L der Werthe der $f(x)$ in dem Intervall (α, β) (diese Grenzen eingeschlossen) liegende Zahl bedeutet. Ist $f(x)$ in dem Intervall $(\alpha, \alpha + h)$ stetig, so erhält man:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+h} f(x)\,dx = hf(\alpha + \varepsilon h),$$

wenn ε zwischen 0 und 1 liegt (0 und 1 eingeschlossen).

Wenn in diesem Fall, wie schon gesagt, $f(x)$ zwischen α und $\alpha + h$ nicht constant ist, so ist der Werth $f(\alpha + \varepsilon h)$ weder das Maximum noch das Minimum der Werthe der $f(x)$ zwischen α und $\alpha + h$. Weil daher zwischen den Punkten μ und ν, die dem Maximum und Minimum der $f(x)$ zwischen α und $\alpha + h$ entsprechen, sich immer ein innerer Punkt x_1 finden lassen muss, in welchem $f(x)$ den Werth $f(\alpha + \varepsilon h)$ hat, so kann man offenbar ε einen zwischen 0 und 1 liegenden, aber von diesen Grenzen verschiedenen Werth beilegen.

Fünfzehntes Kapitel.

Das Integral als Function seiner oberen Grenze. (Die Integralfunction.)

§ 191. Wir fahren fort, wie bisher, unter $f(x)$ eine zwischen α und β stets endliche und integrirbare Function von x zu verstehen und gehen nun dazu über, das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$$

für alle Werthe von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen) zu untersuchen, indem wir als selbstverständlich voraussetzen, dass es für $x = \alpha$ Null ist. Dieses Integral kann offenbar, da es für alle Werthe von x zwischen α und β einen bestimmten und endlichen Werth hat, als eine endliche Function von x in diesem Intervall betrachtet werden. Wir können es daher mit $F(x)$ bezeichnen. Wenn dann $x + h$ ein

anderer beliebiger Punkt zwischen α und β (α und β eingeschlossen) rechts oder links von x ist, so ist offenbar (§ 190, 2)

$$F(x+h) = \int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx + \int_{x}^{x+h} f(x)\,dx$$

oder (§ 190, 20)

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x}^{x+h} f(x)\,dx = \Theta h, \tag{7}$$

unter Θ eine zwischen der oberen und unteren Grenze der Werthe der $f(x)$ zwischen x und $x+h$ liegende Zahl verstanden. Man schliesst deshalb: $F(x)$ oder das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$$

als Function seines oberen Grenzwerthes x betrachtet, ist, wenn $f(x)$ zwischen α und β endlich und integrirbar ist, in dem ganzen Intervall (α, β) beständig eine endliche und stetige Function von x.

Ersichtlichermassen gilt auch der Satz: Wenn α_1 eine beliebige zwischen α und β liegende Zahl ist, so ergiebt sich der Werth des Integrals

$$\int_{\alpha_1}^{x} f(x)\,dx$$

für alle Punkte x zwischen α und β stets aus der Function $F(x)$, die das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$$

darstellt, indem man eine constante Grösse von ihr hinwegnimmt. Diese letztere ist nichts weiter als der Werth $F(\alpha_1)$ des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\alpha_1} f(x)\,dx$$

und kann daher, insofern sie von dem Werth von α_1 abhängt,

jeden beliebigen zwischen dem Maximum und Minimum der Werthe des Integrals

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)dx, \; (\alpha < x < \beta \quad \text{oder} \quad \alpha > x > \beta),$$

gelegenen Werth annehmen (§ 52). Man kann folglich auch sagen: Fügt man zu der Function $F(x)$, welche das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)dx$$

darstellt, eine beliebige, zwischen passenden Grenzen liegende Constante, so erhält man stets ein neues Integral

$$\int_{\alpha_1}^{x} f(x)dx,$$

dessen untere Grenze allein verändert ist, jedoch immer zwischen α und β (α und β eingeschlossen) liegt. Diese Bemerkung führt, wenn man will, zu der Begriffsbildung der unbestimmten Integrale.

---

§ 192. Wir lassen nun mit Bezug auf die Gleichung (7) h sich gesondert entweder durch positive oder negative Werthe hindurch der Null nähern und nehmen an, die Function $f(x)$ sei im Punkt x rechts oder links, je nachdem die in Betracht gezogenen Werthe von h positiv oder negativ sind, stetig oder falls sie unstetig ist, habe sie nur eine gewöhnliche Unstetigkeit. Unter dieser Voraussetzung lässt sich zu jeder positiven und beliebig kleinen Zahl σ eine Zahl h_1 von demselben Vorzeichen wie h und derart finden, dass die Werthe der $f(x)$ für alle Punkte x des Intervalls $(x, x + h_1)$ (höchstens mit Ausschluss des Punktes x) ihrem Absolutwerth nach um weniger als σ von $f(x+0)$ abweichen oder von $f(x-0)$, je nachdem h_1 positiv oder negativ ist. Weil nun alsdann für alle Werthe von h zwischen 0 und h_1 (0 ausgeschlossen) die in der Gleichung (7) auftretende Zahl Θ und daher auch das

Verhältniss

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

von der $f(x+0)$ oder $f(x-0)$ um weniger als σ differiren, so folgt daraus, dass bei positivem h

$$\lim_{h=+0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x+0)$$

und bei negativem h

$$\lim_{h=-0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x-0)$$

ist. Das heisst: Das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$$

als Function seiner oberen Grenze x betrachtet, ist nicht nur in dem ganzen Intervall von α bis β endlich und stetig, sondern es hat auch in allen Punkten, in welchen $f(x)$ stetig ist, immer eine endliche und bestimmte Derivirte im gewöhnlichen Sinn des Wortes, welche gerade die $f(x)$ ist. Eine ähnliche Besonderheit zeigt sich auch in denjenigen Punkten, in welchen $f(x)$ Unstetigkeiten besitzt, die durch Aenderung des Werthes der Function beseitigt werden können; nur mit dem Unterschied, dass in diesen Punkten der Werth der Ableitung nicht dem Werth der Function, sondern dem Werth $f(x+0)$ oder $f(x-0)$ gleichkommt, den man der $f(x)$ ertheilen müsste, um die Unstetigkeit aufzuheben.

In denjenigen Punkten, in welchen Unstetigkeiten der ersten Art auftreten, existirt also nach den vorstehenden Resultaten eine Derivirte im gewöhnlichen Sinn nicht, wohl aber existiren die Ableitungen zur Rechten und Linken und sind bezüglich gleich $f(x+0)$ oder $f(x-0)$. Wenn daher eine der Grössen oder beide $f(x+0)$ und $f(x-0)$ eine Bedeutung haben, so haben im Allgemeinen auch die respectiven Ableitungen auf einer oder beiden Seiten des Punktes x einen bestimmten Sinn und sind jenen Grössen $f(x+0)$ oder $f(x-0)$ gleich. Hat dagegen eine der Grössen oder beide $f(x+0)$ und $f(x-0)$ im Punkt x keine Bedeutung, oder mit andern Worten, besitzt die Function $f(x)$ auf der einen

oder auf beiden Seiten von x eine Unstetigkeit der zweiten Art, alsdann kann offenbar die Ableitung der $F(x)$ rechts oder links von x nicht existiren und das entsprechende Zuwachsverhältniss

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

schwankt bei unbeschränkt abnehmendem h zwischen endlichen Grenzen derart hin und her, dass die entsprechenden Derivirten (§ 145) zwischen den Grenzzahlen enthalten sind, zwischen welchen die Schwankungen der $f(x)$ schliesslich dauernd vor sich gehen, wenn sich x von der bezüglichen Seite her dem besonderen Punkt nähert[1]).

---

§ 193. Diese Resultate führen uns zu der Bemerkung: Für jede zwischen α und β endliche und integrirbare Function $f(x)$ sind die Integrale

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx$$

zwischen α und β endliche und stetige Functionen, welche in unendlich vielen Punkten eines jeden noch so kleinen Theils dieses Intervalls (das heisst in den Stetigkeitspunkten, welche in $f(x)$ immer zu finden sind (§ 188)) eine bestimmte und endliche Derivirte im gewöhnlichen Sinn haben. Dagegen kann in vielen Fällen, besonders wenn die zu integrirende Function $f(x)$ eine punktirt unstetige Function ist, die unendlich viele gewöhnliche Unstetigkeiten hat (wie z. B. einige der Functionen, die man mittelst des Princips der Verdichtung der Singularitäten findet) die Derivirte im gewöhnlichen Sinn des Wortes auch in unendlich vielen Punkten eines jeden beliebigen noch so kleinen Theils des gegebenen Intervalls fehlen. Daraus geht denn auch klar hervor, dass, wenn wir nicht schon auf anderem Wege gefunden hätten, dass es endliche und stetige Functionen giebt, die eine Derivirte in

1) Thomae, Einleitung S. 17. Harnack, Math. Ann. Bd. 19 S. 243. Pasch, Math. Ann. Bd. 30 S. 152.

dem gewöhnlichen Sinn in unendlich vielen Punkten eines jeden noch so kleinen Theiles des gegebenen Intervalls nicht haben, wir zu diesem Resultat auch durch die vorstehenden Betrachtungen über die Integrale gekommen wären.

Man kann ferner bemerken: Wenn $f(x)$ zwischen α und β endlich und integrirbar ist, gehören die Integrale

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$$

immer zu denjenigen Functionen, die wir im § 134 Functionen der ersten Art genannt haben und haben stets eine endliche Anzahl von Maxima und Minima, oder wenn sie eine unendliche grosse Anzahl derselben haben, so verlieren sie dieselben, wenn passende Linearfunctionen $\mu x + \nu$ ihnen zugefügt oder von ihnen weggenommen werden.

---

§ 194. Wir nehmen nun an, $f(x)$ wäre in dem Intervall (α, β) immer endlich und wäre höchstens mit Ausschluss der Punkte einer Menge G der ersten Gattung (allgemeiner: einer abzählbaren aber nicht ausgedehnten Menge) auf derselben Seite der übrigen Punkte, z. B. auf der rechten, stets stetig oder habe doch nur gewöhnliche Unstetigkeiten. Wir setzen ferner voraus, dass es auf irgend eine Art möglich gewesen wäre, eine zwischen α und β endliche und stetige Function $F(x)$ von x der Art zu bestimmen, dass ihre rechtsseitige Ableitung d_x höchstens mit Ausschluss der Punktmenge G und einer andern G_1, die ebenfalls von der ersten Gattung (allgemeiner: abzählbar) ist und in denen die Frage unentschieden bleibt, der $f(x)$ oder der $f(x+0)$ gleich ist, je nachdem in diesen Punkten die Function $f(x)$ stetig oder unstetig ist.

Alsdann (§ 187, 4 bezw. § 187*) ist die Function $f(x)$ zwischen α und β zur Integration geeignet und das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$$

ist zwischen α und β eine endliche und stetige Function von

x, welche die in den früheren Paragraphen erwähnten Eigenschaften besitzt. Daher sind (wie auch die linksseitigen Ableitungen der $F(x)$ beschaffen sein mögen) die rechtsseitigen Ableitungen der beiden Functionen

$$F(x) \quad \text{und} \quad \int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$$

in allen Punkten des Intervalls (α, β) einander gleich, höchstens mit Ausnahme der Punkte der Mengen G und G_1.

Wendet man nun den Satz 5 des § 72 an, indem man ihn (wie am Ende des § 79 erwähnt wurde) auf nur einseitig in Betracht gezogene Ableitungen ausdehnt, so sieht man sofort, dass die Function $F(x)$ von dem Integral

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$$

nur um eine constante Grösse, die offenbar $F(\alpha)$ ist, differiren kann. Man erhält daher:

$$F(x) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx.$$

Wenn man also beachtet, dass die rechtsseitige Ableitung der $F(x)$ in denjenigen Punkten, in welchen $f(x)$ stetig ist, sich stets auf ihre Derivirte im gewöhnlichen Sinn reducirt (§ 148, 3), so kann man jetzt offenbar behaupten: Für die Functionen $f(x)$, welche zwischen α und β stets endlich und auch nur im Allgemeinen stetig sind und für solche zwischen α und β punktirt unstetige Functionen, welche zwar Unstetigkeiten der zweiten Art, aber, höchstens mit Ausnahme der Punkte einer Menge G der ersten Gattung (allgemeiner: einer abzählbaren aber unausgedehnten Menge), diese Unstetigkeiten sämmtlich nur auf einer und derselben Seite (rechts oder links) von den entsprechenden Punkten haben, führt die neue Definition der bestimmten Integrale auf diejenige zurück, die man gewöhnlich in den Lehrbüchern der Integralrechnung antrifft. Sie ist nur umfassender und kann auch auf die eben genannten punktirt unstetigen Functionen angewandt werden. Wir können

uns daher zur Berechnung der bestimmten Integrale dieser Functionen, wie auch um ihre Eigenschaften nachzuweisen, gleichermassen der einen wie der andern dieser Definitionen bedienen.

Wir wollen noch hervorheben, dass die gewonnenen Resultate in Folge der Sätze der §§ 150 und 152 auch dann noch ihre Gültigkeit behalten, wenn zwar $f(x)$ allen gegebenen Bedingungen genügt, man aber von $F(x)$ nur weiss, dass ihre rechtsseitige Ableitung d_x ausserhalb der Punkte der Mengen G oder G_1 nicht nur endlich, sondern auch rechts von den entsprechenden Punkten stetig ist und diese rechtsseitige Ableitung d_x in einigen Punkten eines jeden noch so kleinen Theils des gegebenen Intervalls entweder der $f(x)$ oder der $f(x+0)$ gleich ist.

§ 195. Es ist ferner zu beachten, dass, falls $f(x)$ den erwähnten Bedingungen genügt, die Existenz einer Function $F(x)$, welche zwischen α und β endlich und stetig ist und in Bezug auf ihre rechts- oder linksseitigen Ableitungen die oben genannten Eigenschaften besitzt, aus dem Umstand selbst hervorgeht, dass die $f(x)$ in dem Intervall (α, β) integrirbar ist. Existirt ferner eine solche Function $F(x)$, so besitzen auch alle anderen Functionen, welche sich aus ihr durch Hinzufügen einer beliebigen Constanten, die in dem ganzen Intervall dieselbe bleibt, und zwar ausschliesslich, die nämliche Eigenschaft und können, wie wir eben bewiesen haben, eine so gut, wie die andere, zu der Berechnung der bestimmten Integrale

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx \quad \text{oder} \quad \int_c^x f(x)\,dx$$

für alle zwischen α und β liegenden Werthe von c und x (mit Einschluss von α und β) benutzt werden.

Eine Function $\psi(x)$ ferner, die zwischen α und β Unstetigkeiten aufweist, kann offenbar für alle zwischen α und β (α und β eingeschlossen) liegenden Werthe von c und x bei der Ermittlung der bestimmten Integrale

$$\int_c^x f(x)\,dx$$

nicht in Anwendung kommen. Ist sie jedoch in allen denjenigen Intervallen, in denen sie stetig ist oder in einigen derselben dazu brauchbar, so differirt sie in jedem dieser Theilintervalle (die Endwerthe ausgeschlossen) nur um eine additive (von Intervall zu Intervall veränderliche) Constante von dem Werth einer und derselben stets endlichen und stetigen Function. Als diese letztere Function kann man das Integral

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx$$

für alle Werthe von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen) nehmen. Derartige unstetige Functionen können mit anderen Worten in den Intervallen, in denen sie sich zur Ermittlung der Integrale

$$\int_c^x f(x)\,dx$$

tauglich erweisen, sämmtlich aus der Function $F(x)$ durch Hinzufügen einer von Intervall zu Intervall veränderlichen Constanten abgeleitet werden.

---

§ 196. Wir nehmen nun an, $F(x)$ sei in dem Intervall (α, β) endlich und stetig und ihre Ableitung d_x z. B. rechts von jedem Punkt x zwischen α und β (β ausgeschlossen, wenn $\alpha < \beta$) sei stets bestimmt und endlich und sei ferner stetig oder habe höchstens gewöhnliche Unstetigkeiten (welche alsdann (§ 149) nur links von den entsprechenden Punkten sich vorfinden). Haften dagegen dieser Derivirten Unbestimmtheiten an, so möge sie diese nur in einer Punktmenge G der ersten Gattung (allgemeiner: einer abzählbaren Menge) zeigen; sowie, wenn sie Unstetigkeiten der zweiten Art aufweist, diese letzteren höchstens mit Ausnahme einer Punktmenge G_1 auch von der ersten Gattung (allgemeiner: einer abzählbaren aber

unausgedehnten Menge) nur links von den bezüglichen Punkten auftreten sollen.

Legt man alsdann d_x beliebige endliche Werthe auch in den Punkten bei, in welchen d_x unbestimmt ist, so entsteht eine in dem Intervall (α, β) integrirbare Function (§ 187, 4) und nach dem vorigen Paragraphen ist dann

$$F(x) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{x} d_x \, dx$$

für alle Werthe von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen). In diesen Fällen reproducirt man also durch die Integration der Ableitung d_x der $F(x)$ rechts von den Punkten x, die zwischen α und β fallen (β ausgeschlossen) die ursprüngliche Function $F(x)$, abgesehen von einer Constanten. Die Integration stellt alsdann das umgekehrte Verfahren, wie die Derivation dar.

Erinnert man sich an den Satz in § 162, so kann man speciell jetzt behaupten: Es sei $F(x)$ eine endliche und stetige Function, die zwischen α und β unendlich viele Maxima und Minima nicht hat und sie auch nicht bekommt, wenn man die Linearfunctionen $\mu x + \nu$ zu ihr hinzufügt (oder von ihr hinwegnimmt). Oder auch, es möge unter den unendlich vielen Functionen

$$\varphi(x) = F(x) - \mu x - \nu,$$

die man so erhält (die $F(x)$ eingeschlossen) für jeden Punkt x_0 höchstens eine $\varphi(x)$ existiren, welche in jeder rechtsseitigen Nachbarschaft von x_0 eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hat und dasselbe gelte auch für die linksseitigen Nachbarschaften von x_0. Wenn alsdann das Intervall (α, β) zu den Intervallen gehört, in welchen die Ableitungen der $F(x)$ rechts und links stets kleiner als eine endliche Zahl sind, so sind diese Ableitungen zwischen α und β der Integration fähig und sie reproduciren, wenn sie von α bis x integrirt werden, immer die ursprüngliche Function bis auf eine Constante $F(\alpha)$. Das heisst also, es gelten die Gleichungen:

$$F(x) - F(\alpha) = \int_\alpha^x d_x dx = \int_\alpha^x d_x' dx.^{1})$$

---

§ 197. Die Resultate, zu denen wir gekommen sind, sind einer weiteren Ausdehnung fähig. Wir wollen voraussetzen, die Bedingungen, unter denen diese Resultate Geltung haben, seien nicht alle erfüllt; jedoch bleibe $F(x)$ in dem Intervall (α, β) eine endliche und stetige Function und besitze in allen Punkten x dieses Intervalls (einen Endpunkt ausgeschlossen) stets eine bestimmte und endliche rechtsseitige (oder linksseitige) Ableitung d_x. Alsdann wird es natürlich zweifelhaft, ob diese Resultate überall volle Geltung behalten und ob nicht in gewissen Fällen die Function d_x zwischen α und β integrirbar bleibt, ohne dass ihr Integral von α bis x die ursprüngliche Function $F(x)$ bis auf eine Constante ergiebt und ob in anderen Fällen die Function d_x, obgleich immer von bestimmter Bedeutung, nicht möglicher Weise ihre Integrabilität einbüsst.

Der erstgenannte Zweifel nun kann vollständig gehoben werden, da, wie wir angedeutet haben, die Ergebnisse des vorigen Paragraphen ausgedehnt werden können und zwar durch Begründung eines Satzes, der sogar allgemeiner ist, als es zur Beseitigung jenes Zweifels allein erforderlich sein würde.

Dazu verhelfen uns die folgenden Bemerkungen.

Wir bezeichnen wieder mit $f(x)$ eine zwischen α und β endliche und zur Integration geeignete Function und mit $F(x)$ die Integralfunction, für welche die Gleichung gilt

$$F(x) - F(\alpha) = \int_\alpha^x f(x)\, dx.$$

Diese Function $F(x)$ ist endlich und stetig und hat in den Punkten x, in welchen auch $f(x)$ endlich und stetig ist,

---

1) Du Bois-Reymond, Abhandl. d. Bayr. Acad. II. Cl. Bd. 12 1. Abth. S. 161. Du Bois-Reymond, Math. Ann. Bd. 16 S. 115. Harnack, Math. Ann. Bd. 19 S. 245 und Bd. 24 S. 232.

$f(x)$ zur Derivirten, während in den übrigen Punkten x ihre Derivirten (§ 145) zwischen den oberen und unteren Grenzen derjenigen Werthe liegen, welche $f(x)$ in noch so kleinen Umgebungen dieser Punkte annimmt (§ 192).

Daraus folgt, dass die vier Derivirten der $F(x)$ stets endlich sind und in dem ganzen Intervall (α, β), wenn man ihnen auch in den Endpunkten α und β specielle Werthe beilegt, wahre und eigentliche endliche Functionen von x bilden. Da es nun in jedem noch so kleinen Theil dieses Intervalls (α, β) Punkte giebt, in denen $f(x)$ stetig ist, so sind auch in jedem beliebigen Theil dieses Intervalls Punkte vorhanden, in denen die genannten Derivirten einen gemeinsamen Werth haben, der genau derjenige der $f(x)$ in diesen Punkten ist.

Weil ferner $f(x)$ zwischen α und β integrirbar ist, so kann zu jeder positiven und beliebig kleinen Zahl σ eine Zerlegung des Intervalls (α, β) in solche Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ gefunden werden, dass die Schwankungen der $f(x)$ in ihnen allen, höchstens mit Ausnahme einiger, deren Summe kleiner als eine beliebig kleine Zahl ε ist, hinter $\frac{\sigma}{2}$ zurückbleiben. Wenn also a ein beliebiger Punkt in einem der ersteren Intervalle δ_s ist, so liegen die Werthe der $f(x)$ in diesem Intervall zwischen

$$f(a) - \frac{\sigma}{2} \quad \text{und} \quad f(a) + \frac{\sigma}{2}.$$

Dazu kommt, dass wir, wie in § 190, 11, voraussetzen können, die Endpunkte der Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ (höchstens α und β ausgeschlossen) lägen in Stetigkeitspunkten der $f(x)$. Alsdann ist auch für die Endpunkte von δ_s jede Ungewissheit beseitigt und es steht ausser Zweifel, dass die vier Derivirten der $F(x)$ in den Punkten des eben definirten Intervalls δ_s ebenfalls zwischen

$$f(a) - \frac{\sigma}{2} \quad \text{und} \quad f(a) + \frac{\sigma}{2}$$

liegen müssen. Ihre Schwankungen in diesem Intervall sind folglich kleiner als σ. Wir können daher offenbar behaupten, dass diese Derivirten zwischen α und β ebenfalls zur Integration geeignet sind.

Wenn wir daher, wie im elften Kapitel, diese Derivirten

mit λ_x, Λ_x, λ_x', Λ_x' bezeichnen, so können wir daraus und aus dem Früheren den Schluss ziehen (§ 190, 10), dass die Integrale

$$\int_\alpha^x \lambda_x dx, \quad \int_\alpha^x \Lambda_x dx, \quad \int_\alpha^x \lambda_x' dx, \quad \int_\alpha^x \Lambda_x' dx$$

nicht nur sämmtlich einen Sinn haben, sondern auch einen gemeinsamen Werth und dieser ist gerade der Werth des Integrals

$$\int_\alpha^x f(x) dx$$

oder $F(x) - F(\alpha)$. Damit kommen wir allgemein zu dem Satz: Wenn eine endliche und stetige Function $F(x)$ für die zwischen α und β liegenden Werthe von x bis auf eine Constante aus der Integration einer Function $f(x)$ hervorgeht, die zwischen α und β stets endlich und integrationsfähig ist, so sind ihre vier Derivirten λ_x, Λ_x, λ_x', Λ_x' sowohl endlich als integrirbar und liefern sämmtlich, wenn sie von α bis x integrirt werden, wieder die ursprüngliche Function $F(x)$ bis auf eine Constante $F(\alpha)$; das heisst also, es ist[1]):

$$F(x) - F(\alpha) = \int_\alpha^x f(x) dx = \int_\alpha^x \lambda_x dx = \int_\alpha^x \Lambda_x dx$$

$$= \int_\alpha^x \lambda_x' dx = \int_\alpha^x \Lambda_x' dx.$$

§ 198. Der soeben bewiesene Satz liefert eine allgemeine Eigenschaft der Integrale und bildet den ersten Theil des Theorems, von dem wir oben sprachen. Um nun auch zu dem zweiten Theil zu gelangen, wollen wir, ohne von vorn herein irgend eine Voraussetzung über die Art und Weise zu machen, auf welche die endliche und stetige Function $F(x)$

1) Pasch, Math. Ann. Bd. 30 S. 153.

aus andern endlichen Functionen $f(x)$ für alle Werthe von x zwischen α und β hervorgeht, unter λ_x, Λ_x, λ_x', Λ_x' wieder die vier Derivirten der $F(x)$ zwischen α und β verstehen. Wir wollen ferner voraussetzen, die unteren bezw. oberen Grenzwerthe λ und Λ der Derivirten λ_x, λ_x' bezw. Λ_x und Λ_x' seien in dem Intervall (α, β) endlich, und wenigstens von einer dieser Derivirten, z. B. von λ_x wisse man, dass sie zwischen α und β integrirt werden kann.

Unter dieser Voraussetzung kann man das Gesammtintervall (α, β) wieder in solche Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ zerlegen, dass mit Ausschluss einiger, deren Summe hinter einer ganz beliebigen Zahl ε zurückbleibt, in allen übrigen Theilintervallen die Schwankungen von λ_x kleiner als σ sind. Bezeichnet man alsdann mit $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ die entsprechenden Theilungspunkte und nimmt $\alpha < \beta$ an, so erhält man auf Grund einer bekannten Eigenschaft der Zuwachsverhältnisse und der Derivirten (§ 147) die Gleichungen:

$$\frac{F(x_1) - F(\alpha)}{\delta_1} = \lambda_1, \quad \frac{F(x_2) - F(x_1)}{\delta_2} = \lambda_2, \ldots$$

$$\frac{F(x_s) - F(x_{s-1})}{\delta_s} = \lambda_s, \ldots, \quad \frac{F(\beta) - F(x_{n-1})}{\delta_n} = \lambda_n,$$

in welchen allgemein λ_s eine bestimmte, zwischen dem oberen und unteren Grenzwerth von λ_x in dem Intervall δ_s gelegene Zahl bedeutet[1]). Es ist sonach auch:

---

1) Es ist bemerkenswerth, dass die Formeln, die wir im Text benutzen, der Gleichung entsprechen

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lambda_h,$$

in der λ_h eine bestimmte Zahl zwischen dem oberen und unteren Grenzwerth der Derivirten der $F(x)$ zwischen x und $x+h$ vorstellt. Diese Gleichung begreift die andere

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x + \Theta h), \quad (0 < \Theta < 1),$$

welche man erhält, wenn die Derivirte der $F(x)$ im gewöhnlichen Sinn des Wortes existirt, als Specialfall in sich. Sie kann als die Gleichung betrachtet werden, welche die letztere in dem Fall zu ersetzen hat, dass der endlichen und stetigen Function $F(x)$ die Derivirte im gewöhnlichen Sinn mangelt oder dass man wenigstens im Ungewissen über die Existenz oder Beschaffenheit dieser Derivirten ist.

$$F(\beta) - F(\alpha) = \sum_{1}^{n} \delta_s \lambda_s .$$

Aber es ist auch, wenn man mit $\varDelta_s$ die Schwankungen von λ_x in dem Intervall δ_s bezeichnet,

$$\sum_{1}^{n} \delta_s \varDelta_s < (\beta - \alpha)\sigma + \varepsilon(\varLambda - \lambda)$$

und es unterscheidet sich daher nach einem bekannten Satz (§ 190, 7) das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} \lambda_x \, dx \quad \text{von} \quad \sum_{1}^{n} \delta_s \lambda_s$$

oder von $F(\beta) - F(\alpha)$ um weniger als die Grösse

$$(\beta - \alpha)\sigma + \varepsilon(\varLambda - \lambda),$$

die man als beliebig klein voraussetzen kann. Es ist daher unzweifelhaft stets

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda_x \, dx$$

und, weil man statt des Intervalls (α, β) auch einen beliebigen Theil (α, x) desselben nehmen kann,

$$F(x) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{x} \lambda_x \, dx .$$

Man kommt damit auf den vorigen Satz zurück und ist offenbar zu dem Schluss berechtigt: W e n n e i n e i n e i n e m I n t e r v a l l (α, β) e n d l i c h e u n d s t e t i g e F u n c t i o n $F(x)$ d e r a r t i s t, d a s s e i n e λ_x i h r e r v i e r D e r i v i r t e n s t e t s n u m e r i s c h k l e i n e r a l s e i n e e n d l i c h e Z a h l u n d z u r I n t e g r a t i o n g e e i g n e t i s t, a l s d a n n g i l t d a s s e l b e a u c h v o n d e n ü b r i g e n D e r i v i r t e n $\varLambda_x$, λ_x', $\varLambda_x'$ u n d d i e I n t e g r a l e

$$\int_{\alpha}^{x} \lambda_x \, dx, \quad \int_{\alpha}^{x} \varLambda_x \, dx, \quad \int_{\alpha}^{x} \lambda_x' \, dx, \quad \int_{\alpha}^{x} \varLambda_x' \, dx$$

h a b e n s ä m m t l i c h e i n e n u n d d e n s e l b e n W e r t h, d e r v o n d e r u r s p r ü n g l i c h e n F u n c t i o n $F(x)$ n u r u m e i n e c o n s t a n t e G r ö s s e $F(\alpha)$ a b w e i c h t; d a s h e i s s t a l s o, e s i s t:

$$F(x) - F(\alpha) = \int_\alpha^x \lambda_x \, dx = \int_\alpha^x \Lambda_x \, dx = \int_\alpha^x \lambda_x' \, dx = \int_\alpha^x \Lambda_x' \, dx .$$

§ 199. Dieser Satz erweitert offenbar die in § 196 gewonnenen Resultate und liefert als Specialfall: Wenn die rechtsseitigen Ableitungen d_x einer endlichen und stetigen Function $F(x)$ in dem Intervall (α, β) durchgehends bestimmt und endlich sind und eine zwischen α und β integrirbare Function bilden, so ist das Integral

$$\int_\alpha^x d_x \, dx$$

von der Function $F(x)$ nur um eine Constante $F(\alpha)$ verschieden. Und wenn zu gleicher Zeit auch die linksseitigen Ableitungen d_x' der $F(x)$ existiren, alsdann lassen auch sie sich zwischen α und β integriren und die beiden Integrale

$$\int_\alpha^x d_x \, dx , \quad \int_\alpha^x d_x' \, dx$$

sind sowohl einander als auch der $F(x) - F(\alpha)$ gleich. Das heisst, es ist

$$F(x) - F(\alpha) = \int_\alpha^x d_x \, dx = \int_\alpha^x d_x' \, dx .$$

Damit wäre denn der erste der Zweifel, die wir in § 197 erhoben haben, vollständig beseitigt.

Zu beachten ist, dass dieser specielle Satz auch dann seine Gültigkeit behält, wenn zwischen α und β eine Menge G der ersten Gattung (allgemeiner: eine nicht ausgedehnte Menge) existirt, in deren Punkten man über die Existenz der Ableitungen d_x oder d_x' im Ungewissen ist, jedoch weiss, dass die vier Derivirten in den Nachbarschaften dieser Punkte stets kleiner als eine endliche Zahl bleiben. Es ist ferner zu beachten, dass ebenfalls in Folge dieses Satzes die Ergebnisse

des § 197 auch dann gültig bleiben, wenn man über die Beschaffenheit der Unstetigkeiten von d_x oder d_x' überhaupt keine Voraussetzung macht und nur annimmt, diese Functionen seien zur Integration geeignet.

---

§ 200. Also, wie gesagt, der zu Anfang des § 197 erhobene erste Zweifel ist durch den Satz im vorigen Paragraphen beseitigt.

Dasselbe ist jedoch nicht mit dem zweiten in jenem Paragraphen erhobenen Zweifel der Fall. Er ist vielmehr als gerechtfertigt anzusehen oder wird doch wenigstens durch die jetzt folgenden Betrachtungen sehr wahrscheinlich gemacht[1]).

Zu dem Ende wollen wir allgemein beweisen: Wenn eine endliche und stetige Function $F(x)$, ohne zwischen α und β stets constant zu sein, in jedem beliebigen Theil des Intervalls (α, β) Maxima und Minima oder Invariabilitätszüge aufweist, so sind ihre Derivirten in *keinem* zwischen α und β liegenden Intervall, welches nicht ein Invariabilitätszug der $F(x)$ ist (das Intervall (α, β) eingeschlossen), integrirbar.

Man sieht in der That, dass wir uns z. B. in Bezug auf die Derivirte λ_x, auf die Untersuchung des Falles beschränken können, in welchem wenigstens solche Intervalle vorhanden sind, in denen diese Derivirte endlich ist. Denn wenn es in jedem beliebigen Theil des Intervalls (α, β) Punkte gäbe, in denen λ_x unendlich gross ist oder doch wenigstens Werthe annimmt, die numerisch grösser als jede beliebige gegebene Zahl sind, alsdann wäre dasselbe auch bei den andern Derivirten der Fall und dies würde genügen (wie auch in der Folge noch klar ersichtlich wird), die Integrabilität einer jeden der verschiedenen Derivirten in allen zwischen α und β gelegenen Intervallen unmöglich zu machen[2]).

---

1) Volterra, Giorn. di Mat. Bd. 19 S. 335 giebt eine Function, deren Ableitung nicht integrirbar ist.

2) Wir greifen eigentlich dadurch, dass wir schon an dieser Stelle von Functionen $F(x)$, bei welchen die Derivirten unendlich gross sind

Nimmt man nun an, die Derivirte λ_x hielte sich in einem gewissen Intervall immer innerhalb endlicher Zahlen und es sei ferner (α_1, β_1) ein Theil dieses Intervalls und kein Invariabilitätszug der $F(x)$, so könnte man stets, auch wenn $F(\alpha_1) = F(\beta_1)$ wäre, ein anderes Intervall (α', β') aus (α_1, β_1) herausheben, in welchem man nicht $F(\alpha') = F(\beta')$ hätte. Denkt man sich alsdann dieses Intervall (α_1, β_1) oder (α', β') z. B. das letztere in Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ mit den Theilungspunkten $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ zerlegt, so gelten nach einem bekannten Satz (§ 147) wie im vorigen Paragraphen die Gleichungen:

$$\frac{F(x_1) - F(\alpha')}{\delta_1} = \lambda_1, \quad \frac{F(x_2) - F(x_1)}{\delta_2} = \lambda_2, \ldots$$
$$\ldots, \frac{F(\beta') - F(x_{p-1})}{\delta_p} = \lambda_p.$$

Daher ist auch:

$$F(\beta') - F(\alpha') = \sum_1^p \delta_s \lambda_s,$$

wenn man im Allgemeinen unter λ_s eine bestimmte Zahl zwischen der unteren und oberen Grenze der Werthe λ_x in dem Intervall δ_s versteht. Wir können also offenbar sagen, dass, unter λ_s eine solche bestimmte Zahl verstanden, die Summen

$$\sum_1^p \delta_s \lambda_s$$

und ebenso auch ihre Grenzwerthe stets die Differenz

$$F(\beta') - F(\alpha'),$$

welche nach der Voraussetzung von Null verschieden ist, wieder hervorbringen.

Nehmen wir nun z. B. an, diese Differenz sei positiv. Weil dann in den Intervallen δ_s die Function $F(x)$ unendlich viele Maxima und Minima oder Invariabilitätszüge hat, so

---

oder unbegrenzt wachsen können, den späteren Untersuchungen vor. Da es jedoch wünschenswerth war, den allgemeinen Satz schon jetzt zu begründen, so haben wir uns erlaubt, für den Augenblick von der festgesetzten Reihenfolge abzuweichen.

existiren in ihnen auch unendlich viele Punkte x, in denen λ_x negativ oder Null ist. Wenn man also in den Summen

$$\sum_1^p \delta_s \lambda_s$$

für λ_s statt der bestimmten Werthe, von denen wir eben sprachen, stets diese negativen oder verschwindenden Zahlen nimmt, so können diese Summen nicht positiv sein und den positiven Grenzwerth $F(\beta') - F(\alpha')$ haben, wie es der Fall sein müsste, wenn λ_x sich zwischen α' und β' zur Integration eignete. Es bleibt also offenbar nur übrig, dass die Function λ_x unter den gemachten Voraussetzungen im Intervall (α', β') und deshalb auch in dem Intervall (α_1, β_1) nicht integrirt werden kann. Damit wäre der Satz vollständig bewiesen.

Man erhält aus ihm als Specialfall: Wenn eine endliche und stetige Function $F(x)$, ohne zwischen α und β stets constant zu sein, Maxima und Minima oder Invariabilitätszüge in jedem beliebigen Theil des Intervalls (α, β) aufweist und zugleich ihre Derivirte $F'(x)$ im gewöhnlichen Sinn oder wenigstens die rechtsseitige d_x oder linksseitige d_x' stets bestimmt und endlich ist, so sind diese Ableitungen in keinem zwischen α und β gelegenen Intervall, welches nicht ein Invariabilitätszug der Function ist (das Intervall (α, β) eingeschlossen), integrirbar.

Dieser specielle Satz ergänzt einerseits das Theorem in § 130 und andererseits ist er es gerade, der den mehrerwähnten Zweifel zu Anfang des § 197, wenn nicht zu einem völlig berechtigten stempelt, so doch sorgfältiger Beachtung empfiehlt. Denn ebenso wie es gewiss ist, dass endliche und stetige Functionen $F(x)$ existiren, welche in jedem beliebigen Intervall zwischen α und β unendlich viele Maxima und Minima haben und auf welche folglich der oben gegebene allgemeine Satz Anwendung findet, ebenso ist es zum Mindesten sehr wahrscheinlich (und wir haben es bei einer früheren Gelegenheit sogar als Thatsache angenommen), dass auch gewisse endliche und stetige Functionen $F(x)$ existiren, die unendlich viele Maxima und Minima und doch zugleich eine Derivirte

im gewöhnlichen Sinn oder wenigstens eine einseitige Ableitung besitzen, die in jedem Punkt bestimmt und endlich ist[1].

---

§ 201. Die bisher gewonnenen Ergebnisse, besonders der §§ 197 und 198, lassen die Wichtigkeit der Zuwachsverhältnisse der Functionen und der Derivirten immer mehr hervortreten.

Es lässt sich von ihnen nun offenbar behaupten: Wenn man, von einer in einem gegebenen Intervall endlichen und integrirbaren Function $f(x)$ ausgehend, die Integralfunction

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx$$

in Betracht zieht, so ergeben die Derivirten des Integrals (wenn nicht die Ableitungen, die möglicher Weise nicht existiren) wieder die gegebene Function $f(x)$ oder gewisse endliche und integrirbare Functionen, die integrirt die Function

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx$$

reproduciren und sich daher von der ursprünglichen Function $f(x)$ nur um eine Function unterscheiden können, deren Integral Null ist. Geht man dagegen von einer endlichen und stetigen Function $F(x)$ aus, bei welcher die Derivirten zwischen α und β endlich und integrirbar sind, bestimmt diese Derivirten und integrirt sie, so erhält man immer wieder die ursprüngliche Function $F(x)$ bis auf eine Constante. In diesen Fällen und abgesehen von Functionen, deren Integral Null, und von solchen, deren Ableitung Null ist (Constanten), lässt sich also behaupten, dass Integration und Ermittlung der Derivirten umgekehrte Operationen sind.

Wir können nun das im § 194 Gesagte auf folgende

---

1) Diese Vermuthung wird bestätigt durch Köpke (Math. Ann. Bd. 29 S. 123, Bd. 34 S. 161 und Bd. 35 S. 104).

Weise verallgemeinern: Hat man eine zwischen α und β endliche und integrirbare Function $f(x)$ und findet auf irgend einem Weg eine endliche und stetige Function $F(x)$, bei welcher die rechts- oder linksseitigen Ableitungen oder die Derivirten $f(x)$ der gleich oder nur um eine Function, deren Integral Null ist, von ihr verschieden sind, alsdann differirt die Function $F(x)$ von dem Integral

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx$$

nur um eine Constante. Das heisst, es ist:

$$F(x) - F(\alpha) = \int_\alpha^x f(x)\,dx \quad \text{etc.}$$

§ 202. Diese Ergebnisse gestatten dann weitere bemerkenswerthe Folgerungen: Wenn eine der Derivirten einer Function zwischen α und β stets endlich und integrirbar ist, so sind die Grössen $\Lambda_x - \lambda_x$ und $\Lambda_x' - \lambda_x'$, die wir die rechts- bezüglich linksseitigen derivatorischen Schwankungen der $f(x)$ genannt haben (§ 145), sowie auch die Differenzen

$$\Lambda_x - \Lambda_x', \quad \lambda_x - \lambda_x'$$

sämmtlich Functionen vom Integral Null in jedem beliebigen Theil des Intervalls (α, β).

Und ähnlich: Wenn bei einer Function $F(x)$ die rechts- und linksseitigen Ableitungen d_x bezüglich d_x' zwischen α und β nicht nur bestimmt und endlich, sondern auch integrirbar sind, so ergiebt ihre Differenz $d_x - d_x'$ eine Function vom Integral Null. Erinnert man sich also, dass sich mittelst des Princips der Verdichtung der Singularitäten Functionen (wie z. B. die erste in § 116) bilden lassen, die zwar nicht stets eine Derivirte im gewöhnlichen Sinn besitzen, aber stets in jedem beliebigen endlichen Intervall eine rechts- und linksseitige bestimmte,

endliche und integrirbare Ableitung haben, so ist klar, dass das Princip der Verdichtung der Singularitäten auch dazu benutzt werden kann, unendlich viele Functionen zu bilden, deren Integral in jedem beliebigen endlichen Intervall Null ist. Man kann leicht specielle Beispiele solcher Functionen aufstellen, deren Existenz übrigens schon aus § 190, 12 deutlich hervorgeht.

---

§ 203. Wir fügen noch hinzu, dass aus den bewiesenen Sätzen auch eine Verallgemeinerung des Theorems in § 152 folgt. Sie lautet: Wenn $F(x)$ und $\varphi(x)$ zwei zwischen α und β endliche und stetige Functionen sind und wenn in jedem Punkt dieses Intervalls ihre Ableitungen, verstanden für eine und dieselbe Seite, die jedoch für beide Functionen nicht dieselbe zu sein braucht, bestimmt, endlich und integrirbar sind, und wenn in jedem beliebigen noch so kleinen Theil des Intervalls (α, β) stets Punkte existiren, in denen diese Ableitungen einander gleich sind, alsdann sind die beiden gegebenen Functionen $F(x)$ und $\varphi(x)$ einander gleich oder differiren nur um eine Constante. Denn wenn d_1 und d_2 die erwähnten Ableitungen der $F(x)$ und $\varphi(x)$ sind, so ist nach dem Satz in § 199

$$F(x) - F(\alpha) = \int_\alpha^x d_1 dx, \quad \varphi(x) - \varphi(\alpha) = \int_\alpha^x d_2 dx$$

und weil (§ 190, 10)

$$\int_\alpha^x d_1\, dx = \int_\alpha^x d_2\, dx,$$

so ist auch $F(x) - \varphi(x) = \text{const.}$

Sechzehntes Kapitel.

Mittelwerthsätze.

§ 204. Wir beweisen nun den folgenden Satz, der vielfach mit Vortheil angewendet wird: Wenn $f(x)$ eine in dem Intervall (α, β) ($\alpha < \beta$ oder auch $\alpha > \beta$) endliche und integrirbare Function ist, so liegt das Integral

$$\int_\alpha^x f(x)\, dx$$

für jeden Werth von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen) stets zwischen zwei Zahlen a und A (a und A ausgeschlossen). Das heisst also:

$$a < \int_\alpha^x f(x) dx < A. \tag{8}$$

Wenn dann $\varphi(x)$ eine zweite Function von x in demselben Intervall (α, β) ist, die stets endlich ist und, wenn x den Weg von α bis β durchläuft, niemals wächst und niemals negativ wird, alsdann ist die Function $f(x)\varphi(x)$ zwischen α und β ebenfalls integrir bar und das Integral

$$\int_\alpha^x f(x)\,\varphi(x)\, dx$$

liegt stets zwischen den Zahlen $a\varphi(\alpha)$ und $A\varphi(\alpha)$ (diese Grenzwerthe ausgeschlossen). Das heisst, es ist

$$a\varphi(\alpha) < \int_\alpha^x f(x)\,\varphi(x)\, dx < A\varphi(\alpha) \tag{9}$$

für alle Werthe von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen).

Man sieht in der That zunächst, dass $\varphi(x)$ in Folge der aufgestellten Bedingungen (§ 187, 6) zwischen α und β und deshalb auch zwischen α und x (für alle Werthe von x zwischen α und β; α und β eingeschlossen) integrirbar ist.

Daraus folgt, dass das Nämliche (§ 190, 5) auch für die Function $f(x)\varphi(x)$ gilt und dass, wenn man sich das Intervall von α bis x in Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ zerlegt denkt und unter f_s und φ_s zwischen den unteren und oberen Grenzwerthen der $f(x)$ und $\varphi(x)$ im Intervall δ_s liegende Werthe versteht, die Gleichung besteht:

$$\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx = \lim \sum_1^n \delta_s f_s \varphi_s .$$

Man kann also nach dem Abel'schen Satz (§ 89) sagen: Um die obige Eigenschaft nachzuweisen, genügt es zu zeigen, dass für jeden Werth von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen) eine besondere, von Null verschiedene und positive Zahl ε von der Beschaffenheit existirt, dass für alle hinter ε zurückbleibenden Werthe der δ_s die Summe

$$\sum_1^{n'} \delta_s f_s ,$$

deren oberer Index n' nicht grösser als n ist, sämmtlich zwischen a und A (mit Ausschluss dieser Grenzen) liegen.

Zu dem Ende bemerken wir, dass, weil das Integral

$$\int_\alpha^x f(x)dx$$

eine zwischen α und β endliche und stetige Function von x ist, die Differenz

$$A - \int_\alpha^x f(x)dx$$

für einen bestimmten Werth von x zwischen α und β effectiv ihren Minimalwerth σ annimmt. Nach der Voraussetzung ist aber diese Zahl σ von Null verschieden und positiv und weil die Function $f(x)$ zwischen α und β integrirbar ist, so giebt es eine positive Zahl ε von der Art, dass für alle Zerlegungen, deren Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ kleiner als ε sind,

$$\sum_1^n \delta_s D_s < \frac{\sigma}{2}$$

ist, wenn man mit D_s die Schwankung der $f(x)$ in dem Intervall δ_s bezeichnet.

Nach § 190, 8 erhält man dann, wenn δ_i irgend eines von den so gebildeten Intervallen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ bedeutet:

$$\left|\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 + \cdots + \delta_i f_i - \int\limits_{\alpha}^{\alpha + \sum\limits_1^i \delta_s} f(x)\, dx\right| < \frac{\sigma}{2}\cdot$$

Da nun nach den obigen Voraussetzungen das Integral

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha + \sum\limits_1^i \delta_s} f(x)\, dx$$

für jeden beliebigen Punkt x' zwischen α und β, mit welchem der Punkt

$$\alpha + \sum_1^i \delta_s$$

zusammenfällt, niemals die Zahl $A - \sigma$ überragen kann, so lässt sich behaupten: Wenn die $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ sämmtlich kleiner als ε sind, so gehen die verschiedenen Summen

$$\delta_1 f_1,\ \delta_1 f_1 + \delta_2 f_2,\ \cdots,\ \delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 + \cdots + \delta_i f_i$$

niemals über die Grösse $A - \frac{\sigma}{2}$ hinaus.

Auf ähnliche Weise findet man, dass, wenn σ_1 der Minimalwerth der Differenz

$$\int\limits_{\alpha}^{x} f(x)\, dx - a$$

für die verschiedenen Werthe von x zwischen α und β ist und $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ sämmtlich kleiner als eine gegebene positive Zahl ε_1 sind, die obigen Summen niemals hinter der Grösse $a + \frac{\sigma_1}{2}$ zurückbleiben können. Nach dem oben erwähnten Abel'schen Satz liegen daher die Summen

$$\sum_1^n \delta_s f_s \varphi_s,$$

welche zu dem Werth des Integrals

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\varphi(x)dx$$

führen, stets zwischen den beiden Grössen

$$\left(a + \frac{\sigma_1}{2}\right)\varphi(\alpha) \qquad \text{und} \qquad \left(A - \frac{\sigma}{2}\right)\varphi(\alpha)$$

und das Nämliche gilt auch von ihrer Grenze. Damit wäre der aufgestellte Satz vollständig bewiesen.

Wir bemerken noch, dass man in diesem Satz, auch wenn $\varphi(x)$ im Punkt α unstetig ist, die $\varphi(\alpha)$ immer durch $\varphi(\alpha + 0)$ oder $\varphi(\alpha - 0)$, je nachdem $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ ist, ersetzen kann. Denn nach den Voraussetzungen hat die Grösse $\varphi(\alpha + 0)$ für $\alpha < \beta$ und $\varphi(\alpha - 0)$ für $\alpha > \beta$ eine bestimmte Bedeutung (§ 25) und das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\varphi(x)dx$$

hat stets denselben Werth, auch wenn man, als Werth der $\varphi(x)$ im Punkt α, $\varphi(\alpha + 0)$ oder $\varphi(\alpha - 0)$ statt $\varphi(\alpha)$ nimmt.

---

§ 205. Wenn die Function $\varphi(x)$ statt niemals zuzunehmen so beschaffen ist, dass sie von α bis β niemals abnimmt, so kann der vorstehende Satz, auch wenn $\varphi(x)$ stets positiv bleibt, manchmal seine Gültigkeit verlieren.

In diesem Fall und auch allgemeiner hat man den Satz: Wenn $\varphi(x)$ von α bis β niemals abnimmt, übrigens auch negativ sein kann und für alle Werthe von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen) wieder die Ungleichungen (8) gelten, so ist für dieselben Werthe von x stets, wenn $\varphi(\beta)$ positiv oder gleich Null ist:

$$(10) \qquad A\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)(A - a) < \int_{\alpha}^{x} f(x)\varphi(x)dx < \\ < a\varphi(\alpha) + \varphi(\beta)(A - a)$$

oder:

$$a\varphi(\beta) - A[\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)] < \int_{\alpha}^{x} f(x)\varphi(x)dx < \tag{11}$$
$$< A\varphi(\beta) - a[\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)],$$

wenn dagegen $\varphi(\beta)$ negativ oder gleich Null ist:

$$A\varphi(\alpha) < \int_{\alpha}^{x} f(x)\varphi(x)dx < a\varphi(\alpha). \tag{12}$$

Man bemerkt in der That, dass unter der obigen Voraussetzung die Differenz $\varphi(\beta) - \varphi(x)$ zwischen α und β niemals negativ sein kann und auch niemals zunehmen kann. Man erhält also bei Anwendung der Beziehung (9)

$$a[\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)] < \int_{\alpha}^{x} f(x)[\varphi(\beta) - \varphi(x)]dx < A[\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)]$$

oder:

$$A\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)[A - \int_{\alpha}^{x} f(x)dx] < \int_{\alpha}^{x} f(x)\varphi(x)dx <$$
$$< a\varphi(\alpha) + \varphi(\beta)\left[\int_{\alpha}^{x} f(x)dx - a\right].$$

Daraus findet man bei Benutzung der Formel (8), im Fall $\varphi(\beta)$ positiv oder Null ist, ohne Weiteres (10) und dann auch (11), und falls $\varphi(\beta)$ negativ oder Null ist, so kommt man offenbar zur Beziehung (12).

---

§ 206. Man sieht ferner leicht ein: Wenn für alle Werthe von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen)

$$\left|\int_{\alpha}^{x} f(x)dx\right| < A \tag{13}$$

ist und $\varphi(x)$ von α bis β niemals abnimmt oder negativ ist, alsdann hat man auch:

$$\left|\int_{\alpha}^{x} f(x)\varphi(x)dx\right| < 2A\varphi(\beta). \tag{14}$$

Denn beachtet man, dass sich hier die Formel (10) anwenden lässt, indem man in derselben $a = -A$ setzt, so sieht man sofort, dass der absolute Werth des Integrals

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\varphi(x)\,dx$$

kleiner als $2A\varphi(\beta) - A\varphi(\alpha)$ und daher auch kleiner als $2A\varphi(\beta)$ ist.

---

§ 207. Daraus lässt sich auch der allgemeine Schluss ziehen: Es sei für die Werthe von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen)

$$\left|\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx\right| < A.$$

Die Function $\varphi(x)$ wechsele ferner zwischen α und β weder unendlich oft ihr Vorzeichen, noch mache sie eine unendlich grosse Anzahl von Schwankungen, so dass also das Intervall (α, β) in eine endliche Zahl p von Intervallen (α, β_1), (β_1, β_2), ..., (β_{p-1}, β) zerlegt werden kann, in deren jedem für sich betrachtet diese Function $\varphi(x)$ stets dasselbe Vorzeichen hat und entweder niemals wächst oder niemals abnimmt, während x von dem einen Endpunkt des Intervalls sich zum andern bewegt. Alsdann ist immer:

$$(15) \qquad \left|\int_{\alpha}^{x} f(x)\varphi(x)\,dx\right| < 2pA\varphi_0,$$

wenn φ_0 die obere Grenze der Absolutwerthe der $\varphi(x)$ zwischen α und β bedeutet.

---

§ 208. Hat ferner die Function $\varphi(x)$ zwischen α und β eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima, alsdann können die bisherigen Sätze nicht mehr angewendet werden und man wird meistens, um Grenzen zu erhalten, zwischen denen das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\varphi(x)dx$$

liegt, jedesmal ein besonderes Verfahren einschlagen müssen, das von der Beschaffenheit der Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ abhängt.

Ist jedoch die Function $\varphi(x)$ von α bis β stetig und gehört sie zu der Kategorie von Functionen, die wir früher (§ 134) als solche der ersten Art bezeichnet haben, alsdann kann man, mag sie auch zwischen α und β eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima haben, eine Function $\varphi(x) - \mu x - \nu$ bilden (unter $\mu x + \nu$ eine passend ausgewählte Linearfunction verstanden), die von α bis β immer positiv ist und entweder stets wächst oder stets abnimmt. Wendet man alsdann die obigen Formeln auf das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} [\varphi(x) - \mu x - \nu] f(x)dx$$

an, so können wir wieder untere und obere Grenzen für das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\varphi(x)dx$$

erhalten.

Wenn speciell die obere Grenze A der Werthe der Zuwachsverhältnisse der $\varphi(x)$ zwischen α und β endlich, $\alpha < \beta$ und $\mu \geqq A$ ist, so wächst die Function $\varphi(x) - \mu x - \nu$ niemals von α bis β (§ 172). Bestimmt man dann ν passend, so kann man es auch zu Wege bringen, dass sie immer positiv ist. Wenn daher für alle Werthe von x zwischen α und β

$$a < \int_{\alpha}^{x} f(x)dx < A \tag{16}$$

ist, so ist aus dem Satz in § 204 ersichtlich, dass

$$a[\varphi(\alpha) - \mu\alpha - \nu] < \int_{\alpha}^{x} [\varphi(x) - \mu x - \nu] f(x)dx < A[\varphi(\alpha) - \mu\alpha - \nu]$$

oder:

$$(17)\quad \begin{cases} a[\varphi(\alpha)-\mu\alpha-\nu]+\int\limits_\alpha^x(\mu x+\nu)f(x)dx<\int\limits_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx< \\ \qquad <A[\varphi(\alpha)-\mu\alpha-\nu]+\int\limits_\alpha^x(\mu x+\nu)f(x)dx \end{cases}$$

ist. Man hat auf diese Weise zwei Grenzen, zwischen welchen sich das Integral

$$\int\limits_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx$$

beständig hält, so lange x sich in dem Intervall (α, β) (α und β eingeschlossen) bewegt.

Diese Grenzwerthe lassen sich vereinfachen. Wenn nämlich die Bedingung (16) erfüllt ist, so erhält man aus der Formel (10), wenn man in ihr $\varphi(x)=x$ setzt und wenn $\beta \geqq 0$ ist:

$$A\alpha-\beta(A-a)<\int\limits_\alpha^x xf(x)dx<a\alpha+\beta(A-a)$$

und aus der Formel (12) für $\beta \leqq 0$

$$A\alpha<\int\limits_\alpha^x xf(x)dx<a\alpha.$$

Benutzt man nun diese Ungleichungen und die Ungleichung (16) und beachtet, dass die Zahl A (und daher auch μ) stets positiv oder gleich Null vorausgesetzt werden kann, weil sonst $\varphi(x)$ von α bis β abnähme und dann die Formel (9) angewendet werden müsste, und dass man die Zahl ν immer negativ oder gleich Null annehmen kann, da man ν andernfalls überhaupt nicht in die Rechnung hätte einzuführen brauchen, so sieht man sofort, dass (17) für $\beta \geqq 0$ sich stets auf die folgende Ungleichung reduciren lässt:

$$(18)\quad \begin{cases} a\varphi(\alpha)-[\mu(\beta-\alpha)-\nu](A-a)<\int\limits_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx< \\ \qquad <A\varphi(\alpha)+[\mu(\beta-\alpha)-\nu](A-a). \end{cases}$$

Ist dagegen $\beta \leqq 0$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} a\varphi(\alpha) + (\mu\alpha + \nu)(A - a) < \int_\alpha^x f(x)\varphi(x)\,dx < \\ < A\varphi(\alpha) - (\mu\alpha + \nu)(A - a). \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Damit haben wir zwei sehr einfache Grenzwerthe erhalten, zwischen welchen der Werth des Integrals

$$\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx$$

für alle Werthe von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen) liegen muss.

Wenn man die Zahl A kennt, kann man $\mu = A$ setzen. Damit alsdann die Function $\varphi(x) - Ax - \nu$, welche von α bis β niemals wächst, nicht etwa negativ sei, genügt es, für ν einen solchen Werth zu wählen, dass $\varphi(\beta) - A\beta - \nu \geqq 0$ wird. Man kann daher stets $\nu = \varphi(\beta) - A\beta$ setzen, sobald $\varphi(\beta) - A\beta$ negativ oder gleich Null ist.

---

§ 209. Statt der Formeln (18) und (19) lassen sich, wenn μ positiv ist (was man, wie bereits gesagt, stets voraussetzen kann), auch andere auffinden, die bei der Anwendung häufig bequemer sind.

Ist nämlich $\alpha < \beta$ und μ positiv, so wächst die Function $\mu x + \nu$ von α bis β beständig und man erhält sonach aus § 205, wenn $\mu\beta + \nu \geqq 0$ ist:

$$\begin{aligned} A(\mu\alpha + \nu) - (\mu\beta + \nu)(A - a) < \int_\alpha^x (\mu x + \nu) fx dx < \\ < a(\mu\alpha + \nu) + (\mu\beta + \nu)(A - a), \end{aligned}$$

und wenn $\mu\beta + \nu \leqq 0$:

$$A(\mu\alpha + \nu) < \int_\alpha^x (\mu x + \nu) f(x)dx < a(\mu\alpha + \nu).$$

Mithin, wenn man in (17) substituirt, für $\mu\beta + \nu \geqq 0$

$$(20)\quad \begin{cases} a\varphi(\alpha) - \mu(\beta-\alpha)(A-a) < \int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx < \\ \qquad < A\varphi(\alpha) + \mu(\beta-\alpha)(A-a); \end{cases}$$

und für $\mu\beta + \nu < 0$

$$(21)\quad \begin{cases} a\varphi(\alpha) + (\mu\alpha+\nu)(A-a) < \int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx < \\ \qquad < A\varphi(\alpha) - (\mu\alpha+\nu)(A-a), \end{cases}$$

was mit (19) übereinstimmt. Dies sind die Formeln, die wir finden wollten.

Beachtet man dann, dass, für $\mu > A$, $\varphi(\beta) - (\mu\beta + \nu) > 0$ sein muss, so ist klar, dass, falls $\varphi(\beta)$ negativ oder gleich Null ist, $\mu\beta + \nu$ auch negativ oder Null sein muss und es ausreicht, $\nu = \varphi(\beta) - \mu\beta$ zu setzen. Man erhält dann aus (21) die Formel:

$$(22)\quad \begin{cases} a\varphi(\alpha) - [\mu(\beta-\alpha) - \varphi(\beta)](A-a) < \int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx < \\ \qquad < A\varphi(\alpha) + [\mu(\beta-\alpha) - \varphi(\beta)](A-a), \end{cases}$$

welche gilt, wenn $\varphi(\beta)$ negativ oder Null ist.

Ist dagegen $\varphi(\beta) \geq 0$, so kann man sich ν derart gewählt denken, dass auch $\mu\beta + \nu$ positiv ist; für diesen Fall hat man (20). Wir können somit sagen, dass sich die Formeln (20) oder (22) stets anwenden lassen, je nachdem $\varphi(\beta)$ positiv bezüglich negativ ist. In diesen Formeln bedeutet dann μ eine beliebige Zahl, die nicht kleiner als A gewählt werden darf und es kann stets $\mu = A$ gesetzt werden.

---

§ 210. In ähnlicher Art wird der Fall behandelt, wenn der untere Grenzwerth λ der Zuwachsverhältnisse der $\varphi(x)$ zwischen α und β endlich ist und man diesen Grenzwerth λ in die Rechnung einführen will.

Uebrigens ist, wenn man einige auf diesen Fall sich beziehende Formeln ermitteln will, zu beachten, dass, wenn die

Function $\varphi(x)$ zwischen α und β thatsächlich, wie wir voraussetzen, eine endliche oder unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hat, λ negativ ist. Wenn wir dann statt der Function $\varphi(x)$ die Function $\varphi_1 = -\varphi(x)$ in Betracht ziehen, so ist die obere Grenze ihrer Zuwachsverhältnisse $-\lambda$, und auf diese Function $\varphi_1(x)$ lassen sich die früheren Formeln speciell (20) und (22) anwenden, wenn man alsdann nur unter μ eine Zahl versteht, die nicht kleiner ist als $-\lambda$ und, an Stelle von φ, φ_1 oder $-\varphi$ setzt.

Vertauscht man also in diesen Formeln φ mit $-\varphi$ und μ mit $-\mu_1$, und setzt μ_1 negativ und nicht grösser als λ voraus, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} A\varphi(\alpha) + \mu_1(\beta-\alpha)(A-a) < \int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx < \\ < a\varphi(\alpha) - \mu_1(\beta-\alpha)(A-a), \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

$$\left.\begin{aligned} A\varphi(\alpha) + [\mu_1(\beta-\alpha) - \varphi(\beta)](A-a) < \int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx < \\ < a\varphi(\alpha) - [\mu_1(\beta-\alpha) - \varphi(\beta)](A-a). \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Von diesen Ungleichungen gilt die erste für $\varphi(\beta) < 0$ und die zweite für $\varphi(\beta) \geqq 0$. Sie beziehen sich offenbar auf den Fall, den wir hier untersuchen wollten, und μ_1 ist in ihnen eine beliebige nicht über λ hinausgehende Zahl und man kann stets $\mu_1 = \lambda$ setzen.

Wenn $\varphi(x)$ zwischen α und β eine bestimmte und endliche Ableitung $\varphi'(x)$ besitzt, so sind λ und Λ bezüglich der untere und obere Grenzwerth dieser Ableitungen für die in diesem Intervall liegenden Werthe von x. Daraus geht hervor, dass die vorstehenden Formeln, die alsdann offenbar anwendbar bleiben, auch in den gewöhnlichen Fällen bei der angenäherten Berechnung bestimmter Integrale vortreffliche Dienste leisten können.

---

§ 211. Gehen wir nun dazu über, die Fälle zu untersuchen, in denen $\varphi(x)$ zwischen α und β niemals wächst oder

niemals abnimmt, so können wir aus dem Satz in § 204 neue Resultate von weittragender Bedeutung ableiten.

Wenn die Function $\varphi(x)$ von α bis β ($\alpha < \beta$ oder auch $\alpha > \beta$) niemals wächst und niemals negativ ist, so reicht es für die Anwendbarkeit der Formel (9) aus, wenn a und A bezüglich so wenig, wie man nur will, kleiner oder grösser sind als der Minimal- oder Maximalwerth des Integrals

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx$$

für ein zwischen α und β liegendes x (α und β eingeschlossen). Wenn daher m und M diese Minimal- und Maximalwerthe des Integrals

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx$$

sind und man immer voraussetzt, dass die Function $\varphi(x)$ niemals negativ wird und niemals zunimmt, so erhält man:

$$m\varphi(\alpha) < \int_\alpha^x f(x)\varphi(x)\,dx < M\varphi(\alpha), \tag{25}$$

und in dieser Ungleichung kann man statt $\varphi(\alpha)$ auch $\varphi(\alpha + 0)$ oder $\varphi(\alpha - 0)$ setzen, je nachdem $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ ist.

---

§ 212. Daraus folgt, dass, wenn die Function $\varphi(x)$ von α bis β nicht wächst und auch niemals negativ wird, das Verhältniss

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)}\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx$$

zwischen dem Minimum m und dem Maximum M der Werthe liegt, welche das Integral

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx$$

annimmt, wenn x von α bis β variirt. Wenn die Function

$\varphi(x)$ nicht abnimmt und niemals positiv ist zwischen α und β, so ist $-\varphi(x)$ niemals negativ und nimmt nie zu. Man kann also auf diese Function $-\varphi(x)$ das eben gefundene Resultat anwenden, indem man in ihm $\varphi(x)$ durch $-\varphi(x)$ ersetzt. Dadurch ändert sich aber in dem Wortlaut des Resultates gar nichts. Bemerkt man daher, dass das Integral

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx,$$

weil es eine stetige Function von x zwischen α und β ist, thatsächlich alle Werthe zwischen seinem Minimum und Maximum annimmt, so schliesst man auch: Wenn $f(x)$ in dem Intervall (α, β) endlich und integrirbar ist und $\varphi(x)$ von α bis β niemals sein Zeichen wechselt und $|\varphi(x)|$ niemals wächst, so hat man:

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)}\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx = \int_\alpha^{x'} f(x)\,dx,$$

wenn x' einen bestimmten Werth von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen) vorstellt, oder:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(\alpha)\int_\alpha^{\alpha+\Theta(\beta-\alpha)} f(x)\,dx, \tag{26}$$

wenn Θ eine bestimmte zwischen 0 und 1 (diese Grenzen eingeschlossen) liegende Zahl ist.

In dem Fall ferner, dass die Function $|\varphi(x)|$ von α bis β, ohne je Null zu werden, niemals abnimmt, erhält man, weil alsdann das Integral

$$\int_\beta^\alpha f(x)\varphi(x)\,dx$$

sich in dem Fall des vorigen Integrals befindet:

$$\int_\beta^\alpha f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(\beta)\int_\beta^{x'} f(x)\,dx,$$

worin x' eine zwischen α und β (α und β eingeschlossen) liegende Zahl ist. Es folgt dann weiter

$$(27) \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\beta)\int_{\alpha+\Theta_1(\beta-\alpha)}^\beta f(x)dx,$$

wenn Θ_1 zwischen 0 und 1 liegt (0 und 1 eingeschlossen). Man kann also jetzt behaupten: Wenn die Function $\varphi(x)$ zwischen α und β niemals das Vorzeichen wechselt und beständig in einem und demselben Sinn variirt oder constant bleibt, so gilt die Gleichung (26) oder (27), je nachdem diese $\varphi(x)$ von α bis β dem Absolutwerth nach entweder niemals wächst oder niemals abnimmt.

Es ist ferner zu merken, dass man in der Gleichung (26) $\varphi(\alpha)$ auch durch $\varphi(\alpha+0)$ oder $\varphi(\alpha-0)$ ersetzen kann, je nachdem $\alpha<\beta$ oder $\alpha>\beta$ ist und, in (27), $\varphi(\beta)$ durch $\varphi(\beta-0)$, oder $\varphi(\beta+0)$, je nachdem $\alpha<\beta$ oder $\alpha>\beta$ ist. Diese Gleichungen (26) und (27) haben weiter eine gewisse Analogie mit der Gleichung (6) in § 190. Während jedoch in dieser letzteren diejenige der beiden Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$, welche unter dem letzten Integralzeichen stehen bleibt, im Verlauf der Integration stets dasselbe Vorzeichen behält und die andere Function auch eine unendlich grosse Anzahl von Schwankungen machen kann, darf umgekehrt in den Gleichungen (26) und (27) die unter dem letzten Integralzeichen stehen bleibende Function eine unendlich grosse Anzahl von Zeichenwechseln oder Schwankungen erleiden und muss die andere überhaupt keine Schwankung machen und immer dasselbe Vorzeichen haben.

§ 213. Die gewonnenen Resultate führen zu einer Formel, die wir Weierstrass verdanken und die, ohne hinsichtlich des Vorzeichens der $\varphi(x)$ zwischen α und β irgend eine Einschränkung zu machen, zugleich die beiden Fälle umfasst, in welchen $\varphi(x)$ von α bis β niemals wächst oder niemals abnimmt.

Die Formel ist die folgende:

$$(28) \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\alpha)\int_\alpha^{\alpha+\Theta(\beta-\alpha)} f(x)dx + \varphi(\beta)\int_{\alpha+\Theta(\beta-\alpha)}^\beta f(x)dx.$$

Wir wollen, um ihre Richtigkeit nachzuweisen, die beiden Fälle, in denen $\varphi(x)$ von α bis β niemals abnimmt und niemals wächst, getrennt betrachten.

Im ersten Fall erhält man, weil die Function $\varphi(\beta) - \varphi(x)$, wenn x von α bis β fortschreitet, niemals wächst und nie negativ wird, aus Gleichung (26):

$$\int_\alpha^\beta f(x)[\varphi(\beta) - \varphi(x)]\,dx = [\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)]\int_\alpha^{x'} f(x)\,dx,$$

worin x' einen zwischen α und β (α und β eingeschlossen) liegenden Werth von x bedeutet.

Daraus ergiebt sich:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \varphi(\beta)\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \varphi(\alpha)\int_\alpha^{x'} f(x)\,dx - \varphi(\beta)\int_\alpha^{x'} f(x)\,dx,$$

die offenbar zu der Weierstrass'schen Formel führt, wenn man beachtet, dass

$$\int_\alpha^\beta = \int_\alpha^{x'} + \int_{x'}^\beta$$

ist.

Im zweiten Fall nimmt die Function $\varphi(\alpha) - \varphi(x)$, wenn x den Weg von α nach β zurücklegt, niemals ab und wird nie negativ. Benutzt man daher die Formel (27) oder auch (28), indem man dort, statt $\varphi(x)$, $\varphi(\alpha) - \varphi(x)$ substituirt, was erlaubt ist, weil $\varphi(\alpha) - \varphi(x)$ nicht abnimmt und (28) für den Fall einer nicht abnehmenden $\varphi(x)$ schon bewiesen ist, so findet man:

$$\int_\alpha^\beta f(x)[\varphi(\alpha) - \varphi(x)]\,dx = [\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)]\int_{x'}^\beta f(x)\,dx,$$

wenn x' zwischen α und β (α und β eingeschlossen) liegt. Daraus folgt:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\alpha)\int_\alpha^\beta f(x)dx - \varphi(\alpha)\int_{x'}^\beta f(x)dx +$$
$$+ \varphi(\beta)\int_{x'}^\beta f(x)dx,$$

woraus sich dann wieder die Weierstrass'sche Gleichung ergiebt, die derart für alle Fälle als richtig erwiesen ist[1]).

Auch in Gleichung (28) können $\varphi(\alpha)$ und $\varphi(\beta)$ immer durch $\varphi(\alpha+0)$ und $\varphi(\beta-0)$ oder $\varphi(\alpha-0)$ und $\varphi(\beta+0)$ ersetzt werden, je nachdem $\alpha<\beta$ oder $\alpha>\beta$ ist.

---

§ 214. Die Weierstrass'sche Formel setzt, wie gesagt, voraus, dass die Function $\varphi(x)$, wenn x das Intervall von α bis β durchläuft, constant bleibt oder sich stets in einem und demselben Sinn ändert. Wenn dagegen diese Function $\varphi(x)$ von α bis β eine endliche Anzahl von Schwankungen macht, so kann man das Intervall (α, β) in p Theilintervalle (α, β_1), (β_1, β_2), ..., (β_{p-1}, β) derart zerlegen, dass die Function $\varphi(x)$ in jedem derselben keine Schwankungen macht und wenigstens in den Punkten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-1}$ stetig ist. Man kann dann auf jedes dieser Theilintervalle die Weierstrass'sche Formel anwenden und findet, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_p$ Zahlen sind, die der Reihe nach diesen Theilintervallen (deren Endwerthe eingeschlossen) angehören, die Gleichungen:

$$\int_\alpha^{\beta_1} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\alpha)\int_\alpha^{x_1} f(x)dx + \varphi(\beta_1)\int_{x_1}^{\beta_1} f(x)dx,$$

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\beta_1)\int_{\beta_1}^{x_2} f(x)dx + \varphi(\beta_2)\int_{x_2}^{\beta_2} f(x)dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{\beta_{p-1}}^{\beta} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\beta_{p-1})\int_{\beta_{p-1}}^{x_p} + \varphi(\beta)\int_{x_p}^{\beta} f(x)d(x).$$

1) Die Weierstrass'sche Gleichung, häufig als der zweite Mittelwerthsatz bezeichnet, wurde zuerst von Du Bois-Reymond veröffentlicht (Journ. f. Math. Bd. 69 S. 78).

An Stelle der Gleichung (28) erhält man dann durch Addition:

$$\left.\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\alpha)\int_{\alpha}^{x_1} f(x)dx + \varphi(\beta_1)\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \\ + \varphi(\beta_2)\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \cdots + \varphi(\beta)\int_{x_p}^{\beta} f(x)dx.\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

---

§ 215. Wenn schliesslich die Function $\varphi(x)$ zwischen α und β eine unendlich grosse Anzahl von Schwankungen macht, aber immer stetig und von der ersten Art ist, und wenn dann μ eine von den Zahlen ist, die nicht zwischen dem unteren und oberen Grenzwerth λ und Λ der Derivirten der $\varphi(x)$ zwischen α und β gelegen sind, so macht die Function $\varphi(x) - \mu x$ zwischen α und β keine Schwankungen und man erhält aus der Weierstrass'schen Formel:

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\alpha)\int_{\alpha}^{x_1} f(x)dx + \varphi(\beta)\int_{x_1}^{\beta} f(x)dx + \\ + \mu\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)\,dx - \mu\alpha\int_{\alpha}^{x'} f(x)dx - \mu\beta\int_{x_1}^{\beta} f(x)dx,\end{aligned}$$

worin x_1 eine zwischen α und β (mit Einschluss der Endpunkte) gelegene Zahl ist. Und da man, wenn x_2 eine andere auch zwischen α und β (mit Einschluss der Endpunkte) liegende Zahl bedeutet, nach derselben Formel auch hat:

$$\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)\,dx = \alpha\int_{\alpha}^{x_2} f(x)dx + \beta\int_{x_2}^{\beta} f(x)dx,$$

so kommt man zu dem Schluss: Bei Functionen $\varphi(x)$ der ersten Art und für jeden Werth von μ, der nicht zwischen dem unteren und oberen Grenzwerth λ und Λ der Derivirten der $\varphi(x)$ (mit Einschluss von $\mu = \lambda$ oder $\mu = \Lambda$) liegt, gilt die folgende Formel:

$$(30)\quad \begin{cases} \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(\alpha)\int_\alpha^{x_1} f(x)\,dx + \varphi(\beta)\int_{x_1}^\beta f(x)\,dx - \\ \qquad\qquad - \mu(\beta-\alpha)\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx, \end{cases}$$

in welcher unter x_1 und x_2 zwei *bestimmte* zwischen α und β (mit Einschluss von α und β) gelegene Zahlen verstanden sind, von welchen die zweite x_2 manchmal auch der ersten gleich sein kann und von dem Werth, den man für μ gewählt hat, durchaus unabhängig ist.

Siebzehntes Kapitel.

Das Integral einer Function, die im Integrationsgebiet unendlich wird.

§ 216. Den seitherigen Untersuchungen liegt überall die Voraussetzung zu Grunde, dass die Function $f(x)$, welche in dem Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

auftritt, zwischen α und β stets endlich sei. Statt dessen nehmen wir jetzt an, die $f(x)$ werde in einem oder beiden Endpunkten α und β oder für gewisse Werthe von x zwischen α und β unendlich gross. Wir wollen damit für den Augenblick sowohl den Fall einschliessen, dass $f(x)$ in diesen Punkten thatsächlich unendlich gross ist, wie übrigens immer die Werthe der $f(x)$ in den Umgebungen dieser Punkte beschaffen sein mögen, als auch den Fall, in welchem bei der unbeschränkten Annäherung des x an diese Punkte von einer oder beiden Seiten die Function, wie übrigens immer ihr Werth in diesen Punkten beschaffen sei, schliesslich dahin kommt auch Werthe anzunehmen, die numerisch grösser als eine

beliebige gegebene Zahl sind (§ 26). Dies lässt dann insbesondere der Möglichkeit Raum, dass ein bestimmter Punkt x in der Bedeutung eines Unendlichkeitspunktes der Function $f(x)$ auftritt, wenn man ihn beispielsweise als lediglich seiner rechtsseitigen Nachbarschaft angehörig behandelt und dass er diesen Charakter verliert, wenn man ihn lediglich insofern ins Auge fasst, als er seine linksseitige Nachbarschaft abschliesst.

Die Function $f(x)$ eigne sich nun wie früher in allen Intervallen, in welchen sie stets endlich ist, zur Integration. Wenn alsdann $f(x)$ nur in einem der Endpunkte z. B. für $x = \beta$ (α z. B. $< \beta$) unendlich gross wird und man bezeichnet mit ε eine von Null verschiedene, aber beliebig kleine und positive Zahl, so lässt sich das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

als Grenzwerth des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\beta-\varepsilon} f(x)\,dx$$

für $\varepsilon = 0$ auffassen. Wird ferner $f(x)$ entweder nur in beiden Endpunkten α und β oder in einer endlichen Anzahl von Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ zwischen α und β (α und β z. B. ausgeschlossen) unendlich gross, so kann das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

als der Grenzwerth bezüglich des Integrals

$$\int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} f(x)\,dx$$

oder der Summe

$$\int_{\alpha}^{\alpha_1-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{\alpha_1+\varepsilon_1'}^{\alpha_2-\varepsilon_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{\alpha_m+\varepsilon_m'}^{\beta} f(x)\,dx$$

betrachtet werden, wenn die Grössen ε und ε' oder $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ und $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_m'$ durch positive Werthe hindurch nach

einem beliebigen Gesetz der Null zustreben. Die Function $f(x)$ ist dann nur in dem Fall zur bestimmten Integration zwischen α und β geeignet, wenn die Grösse, deren Grenzwerth zu ermitteln ist, einen bestimmten und endlichen Grenzwerth hat. Dagegen ist das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

unendlich gross, wenn eines oder mehrere der Integrale, die in der Grösse auftreten, deren Grenzwerth zu suchen ist, in demselben Sinn unendlich zu werden streben, während die übrigen bestimmte und endliche Grenzwerthe haben oder sich doch wenigstens so verhalten, dass keines von ihnen einen unendlich grossen Grenzwerth hat oder beliebig grosse Werthe annimmt, die das entgegengesetzte Vorzeichen haben wie die vorigen unendlich grossen Integrale. In allen andern Fällen ist das Integral unbestimmt.

---

§ 217. $f(x)$ werde ferner zwischen α und β $(\alpha < \beta)$ in einer unendlich grossen Anzahl von Punkten, die eine Menge der ersten Gattung und der ersten Art bilden, unendlich gross. Bezeichnet man dann mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Punkte der abgeleiteten Menge G' nach steigendem Zahlwerth geordnet und nimmt an, sie seien z. B. sämmtlich innerhalb des Intervalls (α, β) gelegen und die Function $f(x)$ eigne sich in allen denjenigen Intervallen zur Integration, welche keinen der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ enthalten (und welche deshalb nur eine endliche Anzahl von Punkten der Menge G in sich aufnehmen), so lässt sich das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

als Grenzwerth der Summe

$$\int_{\alpha}^{\alpha_1-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{\alpha_1+\varepsilon_1'}^{\alpha_2-\varepsilon_2} f(x)dx + \cdots + \int_{\alpha_m+\varepsilon_m'}^{\beta} f(x)dx$$

definiren, wenn ε und ε' positive Grössen sind, die nach irgend einem Gesetz der Null zustreben.

Wird dagegen $f(x)$ zwischen α und β in einer Punktmenge G der ersten Gattung und zweiten Art unendlich gross, so verstehe man unter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Punkte der abgeleiteten Menge G'' in steigender Anordnung. Nimmt man dann wie früher an, die Function $f(x)$ eigne sich in allen denjenigen Intervallen zur Integration, die nicht die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ (und also nur solche Punkte der Menge G enthalten, welche Mengen der ersten Art angehören), so lässt sich das Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

als Grenzwerth der Summe

$$\int_\alpha^{\alpha_1-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{\alpha_1+\varepsilon_1'}^{\alpha_2-\varepsilon_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{\alpha_m+\varepsilon_m'}^{\beta} f(x)\,dx$$

definiren, wenn ε und ε' wieder positive, der Null zustrebende Zahlen sind. Und so in entsprechender Weise, wenn $f(x)$ zwischen α und β in einer Punktmenge erster Gattung und $3^{\text{ter}}, 4^{\text{ter}}, \ldots, \nu^{\text{ter}}$ Art unendlich gross wird. Es bliebe also nur der Fall übrig, in welchem $f(x)$ in einer Punktmenge zweiter Gattung zwischen α und β unendlich gross wäre. Dieser Fall soll im Folgenden stets stillschweigend ausgeschlossen sein[1]).

Der Kürze wegen wollen wir von nun an für eine Summe von Integralen wie z. B.

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \cdots + \int_p^q f(x)\,dx,$$

die sich auf dieselbe Function beziehen, das Symbol

1) Hölder (Math. Ann. Bd. 24 S. 190) und Harnack (ebenda S. 220) geben Definitionen, die auch für bestimmte Mengen zweiter Gattung (abzählbare bezw. unausgedehnte) gelten.

$$\left(\int_a^b + \int_c^d + \cdots + \int_p^q\right) f(x)\, dx$$

gebrauchen.

§ 218. Nachdem somit die Integrale auch für die erwähnten Fälle, in denen die Function $f(x)$ zwischen α und β unendlich gross wird, definirt sind, drängt sich eine weitere Bemerkung auf. Die Function $f(x)$ sei in einer endlichen Anzahl von Punkten des Intervalls (α, β) oder in einer beliebigen Punktmenge der ersten Gattung effectiv unendlich gross, jedoch ohne dass ihr numerischer Werth bei der unbeschränkten Annäherung des x von der einen oder andern Seite an die Punkte $a_1, a_2, \ldots$, in denen $f(x)$ unendlich gross ist (isolirte Unendlichkeitspunkte), jemals über jede Grenze hinaus wächst. Betrachtet man dann nach einander die Fälle, wenn diese Punkte $a_1, a_2, \ldots$ in endlicher Anzahl vorhanden sind und wenn sie eine Menge der ersten Gattung und bezüglich der 1ten, 2ten, 3ten, ... Art bilden, so ergiebt sich aus der Definition sofort, dass der Werth des Integrals

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$$

der nämliche ist, als wenn die Function $f(x)$ in den Punkten $a_1, a_2, \ldots$ irgend welche endliche Werthe hätte. Wir können daher diese Art des Unendlichseins, welche in der Regel meist Unstetigkeiten darstellt, die durch Aenderung des Werthes der Function in den entsprechenden Punkten beseitigt werden können, von der Betrachtung jederzeit ausschliessen.

Man wird auch beachten müssen, dass, obgleich die Punkte einer von G abgeleiteten Menge der Menge G selbst nicht anzugehören brauchen (§ 13), dieses hier anders ist. Denn die Punkte der Mengen, welche in gewissen Fällen aus der Menge der Unendlichkeitspunkte der $f(x)$ abgeleitet werden, gehören sämmtlich der Natur der Punkte wegen, die nach § 216 als Unendlichkeitspunkte in Betracht kommen, auch

dieser ursprünglichen Menge an und figuriren in Folge dessen immer als Unendlichkeitspunkte der Function $f(x)$.

---

§ 219. Für den Fall, dass die Function $f(x)$ nur in einem Punkt im Innern des Integrationsintervalls (α, β) unendlich gross wird, nannte Cauchy unter der Voraussetzung, dass z. B. $\alpha < \beta$ ist, den Grenzwerth der Summe

$$\left(\int_{\alpha}^{\alpha-\varepsilon} + \int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta}\right) f(x)dx$$

für ein positives, der Null zustrebendes ε den Hauptwerth des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx\,.$$

Wenn wir uns nun diese Bezeichnung aneignen und beachten, dass die Summe

$$\left(\int_{\alpha}^{\alpha-\varepsilon} + \int_{\alpha+\varepsilon'}^{\beta}\right) f(x)\,dx$$

sehr wohl keinen bestimmten Grenzwerth haben kann, wenn ε und ε' unabhängig von einander der Null zustreben, dass dagegen dieser Grenzwerth vorhanden sein kann, wenn zwischen ε und ε' gewisse Beziehungen bestehen, z. B. $\varepsilon' = \varepsilon$ ist, so kann man offenbar sagen, dass wenn das gegebene Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

nicht bestimmt ist, sein Hauptwerth es sehr wohl sein kann und dass, wenn dieses Integral einen bestimmten endlichen oder unendlich grossen Werth hat, dieser stets mit dem Hauptwerth identisch ist.

---

§ 220. Cauchy[1]) bezeichnete ferner, mit Einschränkung auf solche Functionen $f(x)$, die zwischen α und β (α und β

1) Mém. prés. div. savants. Bd. I S. 599. Oeuvres Bd. 1 S. 394. Journ. Éc. polyt. Bd. 12 cahier 19 S. 590.

eingeschlossen) nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unendlich gross werden, als singuläre bestimmte Integrale für jeden solchen Punkt a (welche z. B. im Innern des Intervalls (α, β) liegen mögen) die beiden Integrale

$$\int_{a-\varepsilon}^{a-k_1\varepsilon} f(x)\,dx, \quad \int_{a+k_2\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx.$$

worin k_1 und k_2 beliebige aber feste positive Zahlen sind und ε auch positiv, aber beliebig klein und derart ist, dass zwischen die grösste und die kleinste der vier Zahlen

$$a-\varepsilon,\ a-k_1\varepsilon,\ a+k_2\varepsilon,\ a+\varepsilon$$

von den Punkten, in welchen $f(x)$ unendlich gross wird, nur der Punkt a fällt.

Wir wollen jedoch hier diese letztere Begriffsbestimmung Cauchy's modificiren. Zunächst möge noch angenommen werden, dass die Function $f(x)$ zwischen α und β nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unendlich gross werde, dann wollen wir singuläre bestimmte Integrale für jeden solchen Punkt a im Innern des Intervalls (α, β) die beiden Integrale

$$\int_{a-\varepsilon}^{a-\delta} f(x)\,dx, \quad \int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx$$

nennen, wenn ε eine von Null verschiedene positive und beliebig kleine Zahl, und δ eine andere beliebige von Null verschiedene positive Zahl bedeutet, die kleiner als ε ist, und wenn ferner ε so beschaffen ist, dass in die Intervalle

$$(a-\varepsilon,\ a-\delta),\ \ (a+\delta,\ a+\varepsilon)$$

keiner der Punkte fällt, in denen $f(x)$ unendlich gross wird. In dem Fall ferner, dass der Punkt a, in dem $f(x)$ unendlich gross wird, ein Endpunkt des Intervalls (α, β) z. B. der Endpunkt β ist, soll das Integral

$$\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta-\delta} f(x)\,dx,$$

wenn z. B. $\alpha < \beta$ ist und ε und δ die eben festgesetzte Bedeutung haben, ebenfalls ein singuläres bestimmtes Integral sein.

Wir wollen ferner annehmen, die Function $f(x)$ werde in einer Punktmenge G der ersten Gattung und der ersten Art unendlich gross und wollen mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Punkte der abgeleiteten Menge von G' (der Grenzpunkte von G) bezeichnen, welche dann (§ 218) auch Unendlichkeitspunkte von G sind.

Da nun jeder von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ verschiedene Punkt in seiner Umgebung keine unendlich grosse Anzahl Punkte von G hat, so ist klar, dass für jeden der von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ verschiedenen Punkte, sobald die Function $f(x)$ in ihm unendlich gross wird, sich auf die eben angegebene Art singuläre bestimmte Integrale bilden lassen. Ausserdem aber wird es von Vortheil sein, auch für jeden der Punkte α_s eines der beiden Integrale von der gleichen Form

$$\int_{\alpha_s - \varepsilon_s}^{\alpha_s - \delta_s} f(x)\,dx, \quad \int_{\alpha_s + \delta_s}^{\alpha_s + \varepsilon_s} f(x)\,dx$$

oder beide in Betracht zu ziehen, je nachdem α_s ein Endpunkt oder ein innerer Punkt des Intervalls (α, β) ist. Augenscheinlich sind diese letzteren Integrale von den zuerst besprochenen verschieden, insofern in wenigstens eines der beiden zu α_s gehörigen Integrationsintervalle

$$(\alpha_s - \varepsilon_s, \alpha_s - \delta_s), \quad (\alpha_s + \delta_s, \alpha_s + \varepsilon_s)$$

Punkte fallen, in denen $f(x)$ unendlich gross wird, und die Anzahl dieser Punkte zwar stets endlich ist, aber bei immer mehr abnehmendem δ_s unbeschränkt wächst. Wir wollen diese neuen Integrale singuläre bestimmte Integrale von der ersten Ordnung und die früheren singuläre bestimmte Integrale von der Ordnung Null nennen.

Wird dagegen die Function $f(x)$ in Punkten unendlich gross, die eine Punktmenge G der ersten Gattung und der zweiten Art bilden und sind dann $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ die Punkte der zweiten derivirten Menge G'', alsdann kann man für die Punkte von G und für die der ersten abgeleiteten Menge G', welche nicht mit $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ zusammenfallen, singuläre bestimmte Integrale der ersten Ordnung und der Ordnung Null bilden. Für die Punkte $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ ferner lassen sich neue singuläre bestimmte Integrale aufstellen, wie z. B. die beiden

$$\int_{\beta_s - \varepsilon_s}^{\beta_s - \delta_s} f(x)\,dx, \quad \int_{\beta_s + \delta_s}^{\beta_s + \varepsilon_s} f(x)\,dx$$

in Bezug auf den Punkt β_s (vorausgesetzt z. B., dass β_s ein innerer Punkt des Intervalls (α, β) sei). Wir wollen dieselben singuläre bestimmte Integrale der zweiten Ordnung nennen. Mit abnehmendem δ_s $(\delta_s < \varepsilon_s)$ wird wenigstens in eines der beiden entsprechenden Integrationsintervalle

$$(\beta_s - \varepsilon_s,\ \beta_s - \delta_s), \quad (\beta_s + \delta_s,\ \beta_s + \varepsilon_s)$$

stets eine unendlich grosse Anzahl der Punkte von G und zugleich eine Anzahl von Punkten der abgeleiteten Menge G' fallen, welche letztere zwar stets endlich ist, jedoch bei immer kleiner werdendem δ_s auch unbeschränkt wächst.

Auf ähnliche Weise erhält man, wenn $f(x)$ in einer Punktmenge der ersten Gattung und dritten Art unendlich gross wird, singuläre bestimmte Integrale der dritten Ordnung. Fährt man so fort, so erhält man allgemein, wenn $f(x)$ in einer Punktmenge der ersten Gattung und ν^{ten} Art unendlich gross wird, singuläre bestimmte Integrale der 1ten, 2ten, 3ten, u. s. w. bis ν^{ten} Ordnung (incl.).

---

§ 221. Mit Hülfe dieser Definitionen ist leicht einzusehen: Wenn eine Function $f(x)$ zwischen α und β in Punkten unendlich gross wird, die eine endliche oder unendlich grosse Menge G der ersten Gattung bilden, so besteht die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass sie in dem Intervall (α, β) sich zur Integration eigne, darin, dass sie den gewöhnlichen Integrabilitätsbedingungen in allen Intervallen genügt, in denen sie stets endlich ist und dass zugleich ihre singulären bestimmten Integrale der verschiedenen Ordnungen

$$\int_{a \pm \delta}^{a \pm \varepsilon} f(x)\,dx$$

$(\delta < \varepsilon)$ zum Grenzwerth Null haben, wenn sich die Endpunkte der Integration $a - \varepsilon$, $a - \delta$ und $a + \delta$, $a + \varepsilon$ dem entsprechenden singulären Punkt a immer mehr nähern.

In der That gilt nach den §§ 216 und 22 der vorstehende Satz zweifellos für den Fall, dass $f(x)$ zwischen α und β nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unendlich gross wird. Um deshalb seine allgemeine Gültigkeit nachzuweisen, genügt es, vorauszusetzen, dass er bei Mengen von der $\nu - 1^{\text{ten}}$ oder einer niedrigeren Art gelte und zu zeigen, dass er auch dann besteht, wenn G eine Menge von der ν^{ten} Art ist.

Es sei nun die Menge G von der ν^{ten} Art und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ seien die aufeinander folgenden Punkte der ν^{ten} abgeleiteten Menge in wachsender Reihenfolge. Betrachtet man dann z. B. das Integral

$$\int\limits_{\alpha_i + \varepsilon_i}^{\alpha_{i+1} - \varepsilon_{i+1}} f(x)\, dx$$

für positive ε_i und ε_{i+1}, so sieht man sofort, dass, wenn dasselbe einen bestimmten und endlichen Grenzwerth bei unbegrenzt gegen Null abnehmenden ε_i und ε_{i+1} hat, die singulären bestimmten Integrale der ν^{ten} Ordnung

$$\int\limits_{\alpha_i + \delta_i}^{\alpha_i + \varepsilon_i} f(x)\, dx, \quad \int\limits_{\alpha_{i+1} - \varepsilon_{i+1}}^{\alpha_{i+1} - \delta_{i+1}} f(x)\, dx,$$

in denen $0 < \delta_i < \varepsilon_i$ und $0 < \delta_{i+1} < \varepsilon_{i+1}$ ist, bei unbeschränkt abnehmenden ε_i und ε_{i+1} Null zum Grenzwerth haben.

Umgekehrt wird auch, wenn dies letztere für die singulären Integrale der ν^{ten} und niederer Art gilt, das Integral

$$\int\limits_{\alpha_i + \varepsilon_i}^{\alpha_{i+1} - \varepsilon_{i+1}} f(x)\, dx,$$

da es über ein Intervall $(\alpha_i + \varepsilon_i, \ \alpha_{i+1} - \varepsilon_{i+1})$ erstreckt wird, in welches nur Punkte von Mengen fallen, die von einer niedrigeren Art als der ν^{ten} sind, und da vorausgesetzt worden ist, der Satz gelte schon für Mengen von der $\nu - 1^{\text{ten}}$ oder

niederer Art, offenbar für jedes System positiver Werthe von ε_i und ε_{i+1} stets einen bestimmten und endlichen Werth haben. Dazu kommt, dass in Folge der eben gemachten Annahme, auch die singulären bestimmten Integrale der ν^{ten} Ordnung hätten Null zum Grenzwerth, die Unterschiede zwischen den Werthen, die man bei nach und nach kleiner werdenden ε_i und ε_{i+1} für das Integral

$$\int_{\alpha_i+\varepsilon_i}^{\alpha_{i+1}-\varepsilon_{i+1}} f(x)\,dx$$

erhält, schliesslich numerisch stets kleiner als irgend eine beliebige Zahl werden. Folglich haben bei der Null zustrebenden ε_i und ε_{i+1} diese Werthe ebenfalls einen bestimmten und endlichen Grenzwerth (§ 22). Auf Grund der für den vorliegenden Fall gegebenen Definition des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

kann man daher offenbar behaupten, dass, wenn der oben ausgesprochene Satz für Mengen von der $\nu-1^{\text{ten}}$ oder niedrigerer Art gilt, er auch für solche von der ν^{ten} Art Geltung hat. Es ist somit der Satz jetzt allgemein bewiesen.

Der Kürze halber werden wir uns in Bezug auf die Punkte, in denen $f(x)$ unendlich gross wird (oder ihre Grenzpunkte, welche für uns übrigens immer Unendlichkeitspunkte sind) gelegentlich der Ausdrucksweise bedienen, eine Function sei in den Umgebungen rechts oder links von diesen Punkten der Integration fähig, wenn die entsprechenden singulären bestimmten Integrale bei der unbeschränkten Abnahme der betreffenden Umgebung Null zum Grenzwerth haben. Damit also die Function $f(x)$ zwischen α und β integrirbar sei, ist es nothwendig und ausreichend, dass sie nicht nur in denjenigen Intervallen integrirt werden kann, in denen sie endlich ist, sondern auch in den Umgebungen rechts und links von den Punkten, in welchen sie unendlich gross wird.

§ 222. Auf dieselbe Art, wie bei den unendlichen Reihen zugleich mit den Summen einer jeden beliebigen Anzahl von Gliedern, die auf das n^{te} folgen, auch jene Grenzgrösse betrachtet wird, die unter dem Namen „Rest der Reihe“ bekannt ist, so hat man auch im vorliegenden Fall zugleich mit den singulären bestimmten Integralen in Bezug auf jeden singulären Punkt a, welcher z. B. im Innern des Intervalls liegen mag, manchmal die Grenzgrösse

$$\int_{a-\varepsilon_1}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx$$

in Betracht zu ziehen. Es ist dies das auf eine beliebig kleine Umgebung $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon)$ des Punktes a erstreckte Integral, welches genau die Summe

$$\left(\int_{a-\varepsilon_1}^{a-\delta_1} + \int_{a+\delta}^{a+\varepsilon}\right) f(x)\,dx$$

für $\delta_1 = +0$ und $\delta = +0$ darstellt. Auch diesem Integral wollen wir einen besondern Namen geben und es den Beitrag der Umgebung von a nennen und ihm eine Ordnungszahl beilegen, die durch die Beschaffenheit des Punktes a bestimmt wird. Wenn a sich im Innern des Intervalls (α, β) befindet, können wir es immer in zwei Intervalle

$$\int_{a-\varepsilon_1}^{a} f(x)\,dx, \quad \int_{a}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx$$

theilen, die wir bezüglich die Beiträge der Umgebungen rechts oder links von a nennen.

Wenn man diese Bezeichnungen zu Grunde legt und unter $f(x)$ wieder eine Function versteht, die zwischen α und β in Punkten unendlich gross wird, die eine endliche oder unendlich grosse Menge der ersten Gattung bilden, kann man auch behaupten: Soll $f(x)$ zwischen α und β integrirbar sein, so ist dazu nöthig und ausreichend, dass sie in allen den Intervallen, in denen sie endlich ist, die Integrabilitätsbedingungen erfüllt und dass die bezüglichen Beiträge (der verschiedenen Ordnungen) für jeden Unendlichkeitspunkt, mit der unbe-

schränkten Abnahme der betreffenden Umgebung, sämmtlich Null zum Grenzwerth haben.

Was nun die Punkte c des Intervalls (α, β) angeht, in denen $f(x)$ nicht unendlich gross wird, so kann es manchmal vorkommen, dass man auch die Beiträge

$$\int_{c-\varepsilon_1}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx,$$

die zu ihren Umgebungen gehören, so wie auch die, den singulären bestimmten Integralen analogen,

$$\int_{c\pm\delta}^{c\pm\varepsilon} f(x)\,dx$$

in Betracht ziehen muss. Diese Beiträge und Integrale haben offenbar Null zur Grenze, wenn die entsprechenden Umgebungen $(c-\varepsilon_1, c+\varepsilon)$ oder die Zahlen ε und δ beständig kleiner werden.

---

§ 223. Aus den vorstehenden Betrachtungen geht hervor, dass die Ergebnisse des § 190, 1. 2. 4. 9. 10. 11. 12. 13. 14 und 16 ihre Gültigkeit auch dann behalten, wenn alle oder einige der Functionen, die dort auftreten, zwischen α und β in Punkten unendlich gross werden, die eine endliche oder unendlich grosse Menge G der ersten Gattung bilden, wenn nur diese Functionen in dem Intervall (α, β) integrabel bleiben.

Von den übrigen Resultaten des § 190 hören einige naturgemäss auf zu bestehen, andere erleiden nur Ausnahmen. Wir verzichten indessen darauf, sie alle einzeln zu untersuchen und wollen hier nur diejenigen Modificationen nachweisen, die an den unter 5. 6. 17. 18 und 19 aufgeführten Resultaten angebracht werden müssen, wenn man voraussetzt, dass alle oder einige der Functionen, die dort auftreten, ohne in dem ganzen Intervall (α, β) ihre Integrabilität zu verlieren, in gewissen Punkten zwischen α und β unendlich gross werden.

§ 224. Wir schicken zu dem Ende die Bemerkung voraus, dass der erste Theil des Satzes § 190, 15 sich nicht vollständig auf den Fall erstreckt, in dem die Function $f(x)$ zwar in dem Intervall (α, β) integrirbar bleibt, aber in diesem Intervall in Punkten unendlich gross wird, die eine endliche oder unendlich grosse Menge G der ersten Gattung bilden. Das heisst: die Eigenschaft, dass die aus den Absolutwerthen der $f(x)$ gebildete Function $f_1(x)$ sich zwischen α und β integriren lasse, folgt jetzt nicht nothwendig aus der Bedingung, dass die Function $f(x)$ in demselben Intervall zur Integration geeignet sei.

Ist aber die Function $f(x)$ zwischen α und β integrirbar, so ist es auch die Function $f_1(x)$ ihrer Absolutwerthe in allen den Intervallen zwischen α und β, in denen $f(x)$ endlich ist (§ 190, 15). Um also entscheiden zu können, ob die letztere auch in dem Gesammtintervall (α, β) integrirbar ist oder nicht, genügt es, ihre zu den verschiedenen Unendlichkeitspunkten gehörigen singulären bestimmten Integrale zu untersuchen und sich zu überzeugen, ob sie bei der unbeschränkten Abnahme der entsprechenden Umgebungen der Null zustreben oder nicht (§ 221). Das heisst, man hat nur zu ermitteln, ob die Function $f_1(x)$ in den Umgebungen der Unendlichkeitspunkte der $f(x)$ der bestimmten Integration fähig ist oder nicht.

Ist dagegen gegeben, dass die Function $f_1(x)$ der Absolutwerthe der $f(x)$ in dem Gesammtintervall (α, β) integrirbar ist und man will sich vergewissern, ob dies auch von $f(x)$ gilt, so braucht man nur zu untersuchen, ob die letztere in allen den Intervallen zwischen α und β integrirbar ist, in welchen sie stets endlich ist. Dieses hat auf Grund der allgemeinen Sätze in den §§ 184 ff. zu geschehen.

---

§ 225. Nachdem wir dieses vorausgeschickt, beginnen wir damit, den Satz 17 des § 190 zum Theil zu erweitern, indem wir beweisen: Wenn $f(x)$ zwischen α und β (z. B. $\alpha < \beta$) niemals ihrem Absolutwerth nach über eine endliche und positive Zahl L hinausgeht; und wenn

$\varphi(x)$ zwischen α und β zwar unendlich gross wird in Punkten, die eine endliche oder unendlich grosse Menge G der ersten Gattung bilden, aber trotzdem in dem Intervall (α, β) integrirbar bleibt, ebenso wie das Product $f(x)\varphi(x)$ und die Function $\varphi_1(x)$ der Absolutwerthe der $\varphi(x)$, alsdann besteht dem Absolutwerth nach die Ungleichung:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx\right| < L\int_\alpha^\beta \varphi_1(x)\,dx.$$

Und speciell für $f(x) = 1$ folgt

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx < \int_\alpha^\beta \varphi_1(x)\,dx,$$

falls $\varphi(x)$ zwischen α und β auch dann integrirbar bleibt, wenn man ihre Werthe durch die entsprechenden Absolutwerthe ersetzt.

In der That, wenn man sich erinnert, dass dieser Satz schon in § 190, 17 für den Fall bewiesen wurde, dass $\varphi(x)$ zwischen α und β stets endlich ist, so sieht man sofort: Wenn $\varphi(x)$ in einer endlichen Anzahl von Punkten zwischen α und β: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ unendlich gross wird und z. B.

$$\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m < \beta$$

ist, so erhält man dem Absolutwerth nach:

$$\left|\int_\alpha^{\alpha_1-\varepsilon_1} f(x)\,\varphi(x)\,dx\right| < L\int_\alpha^{\alpha_1-\varepsilon_1} \varphi_1(x)\,dx < L\int_\alpha^{\alpha_1} \varphi_1(x)\,dx$$

$$\left|\int_{\alpha_1+\varepsilon_1}^{\alpha_2-\varepsilon_2} f(x)\,\varphi(x)\,dx\right| < L\int_{\alpha_1+\varepsilon_1}^{\alpha_2-\varepsilon_2} \varphi_1(x)\,dx < L\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi_1(x)\,dx$$

. . . .

und daher auch

$$\left|\left(\int_\alpha^{\alpha_1-\varepsilon_1} + \int_{\alpha_1+\varepsilon_1}^{\alpha_2-\varepsilon_2} + \cdots + \int_{\alpha_m+\varepsilon_m}^{\beta}\right) f(x)\,\varphi(x)\,dx\right| < L\int_\alpha^\beta \varphi_1(x)\,dx$$

und beim Uebergang zur Grenze:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx < L \int_\alpha^\beta \varphi_1(x)\,dx.$$

Damit wäre der aufgestellte Satz zunächst für alle Intervalle (α, β), in denen $\varphi(x)$ in einer endlichen Anzahl von Punkten unendlich gross wird, bewiesen.

Nimmt man nun an, der Satz sei für den Fall bewiesen, dass $\varphi(x)$ zwischen α und β in Punktmengen von der $(\nu-1)^{\text{ten}}$ oder niedrigerer Art unendlich gross wird, so folgt daraus sofort seine Gültigkeit auch für Punktmengen der ν^{ten} Art. Denn wenn alsdann $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Punkte der ν^{ten} derivirten Menge sind, so gelten immer noch die obigen Formeln, aus denen man stets erhält:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx < L \int_\alpha^\beta \varphi_1(x)\,dx,$$

womit der Satz auch allgemein bewiesen ist.

---

§ 226. Hieraus ergiebt sich leicht, dass man den Satz 5 des § 190 erweitern kann, indem sich beweisen lässt: Wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei derartige Functionen sind, dass sie zwar zwischen α und β in Punkten unendlich gross werden, die eine endliche oder unendlich grosse Menge der ersten Gattung bilden, aber doch in dem Intervall (α, β) zur Integration geeignet sind und niemals gleichzeitig unendlich gross werden[1], so ist ihr Product $f(x)\,\varphi(x)$ in diesem Intervall jedesmal dann integrirbar, wenn die aus den Absolutwerthen der $f(x)$ und $\varphi(x)$ gebildeten Functionen $f_1(x)$ und $\varphi_1(x)$ ebenfalls zwischen α und β integrirbar sind.

Um diesen Satz zu beweisen, bemerken wir zunächst:

---

1) Diese Bedingung schliesst nach § 218, falls $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwischen α und β in Punkten unendlich gross werden, die zwei unendlich grosse Mengen G und G_1 der ersten Gattung bilden, auch die Möglichkeit aus, dass gewisse Grenzpunkte von G mit gewissen Grenzpunkten von G_1 zusammenfallen, weil diese Grenzpunkte stets Unendlichkeitspunkte sind.

Wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$, wie vorausgesetzt, zwischen α und β integrirbar sind, so ist auch ihr Product in allen den Intervallen, in denen $f(x)$ und $\varphi(x)$ endlich sind, integrirbar (§ 190, 5). Um also solche Fälle zu ermitteln, in denen das Product auch im Gesammtintervall (α, β) integrirbar ist, genügt es, seine singulären bestimmten Integrale zu untersuchen (§ 221).

Zu diesem Zweck nehmen wir vorerst an, die Function $\varphi(x)$ werde nur in einer endlichen Anzahl von Punkten zwischen α und β unendlich gross und dasselbe sei bei $f(x)$ der Fall oder letztere sei stets endlich.

Wenn alsdann a ein Unendlichkeitspunkt der $f(x)$ oder $\varphi(x)$ z. B. der $\varphi(x)$ zwischen α und β (α und β eingeschlossen) ist, so wird sich das singuläre bestimmte Integral

$$\int_{a \pm \delta}^{a \pm \varepsilon} \varphi_1(x)\,dx$$

bei hinreichend kleinem ε und δ $(0 < \delta < \varepsilon)$ stets numerisch kleiner, als eine gegebene positive, beliebig kleine Zahl σ halten. Zugleich wird in Folge der Voraussetzung, dass die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ niemals gleichzeitig unendlich gross werden, die Function $f(x)$ in dem ganzen Integrationsintervall $(a \pm \delta,\ a \pm \varepsilon)$ numerisch stets hinter einer Zahl γ zurückbleiben. Weil also die Functionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ in dem Intervall $(a \pm \delta,\ a \pm \varepsilon)$ stets endlich und ihr Product in diesem Intervall mithin zur Integration geeignet ist, so ist nach dem vorigen Paragraphen absolut genommen

$$\int_{a \pm \delta}^{a \pm \varepsilon} f(x)\,\varphi(x)\,dx < \gamma\sigma\,.$$

Dasselbe gilt auch von den singulären bestimmten Integralen für die übrigen Unendlichkeitspunkte der $f(x)$ oder $\varphi(x)$ zwischen α und β, und so ist der obige Satz jedenfalls für den Fall einer endlichen Anzahl von Unendlichkeitspunkten der $f(x)$ oder $\varphi(x)$ zwischen α und β erwiesen.

Um nun den Beweis allgemein gültig zu machen, nehmen wir wie früher an, der Satz sei schon für den Fall bewiesen,

dass $f(x)$ oder $\varphi(x)$ zwischen α und β in Punkten unendlich gross werden, die eine Menge von der $(\nu - 1)^{\text{ten}}$ oder einer niedrigeren Art bilden und zeigen, dass er dann auch in dem Fall gilt, wenn diese Punkte bei $f(x)$ oder $\varphi(x)$ Mengen von der ν^{ten} Art bilden.

Wir wollen zu dem Zweck annehmen, $\varphi(x)$ werde in einer Punktmenge der ν^{ten} Art unendlich gross, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ seien die Punkte der ν^{ten} Ableitung dieser Menge und $f(x)$ sei entweder endlich oder werde in einer Punktmenge unendlich gross, die höchstens ebenfalls von der ν^{ten} Art ist und in diesem letzteren Fall seien $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ die Punkte der ν^{ten} abgeleiteten Menge.

Alsdann ist in allen Intervallen, welche keine von den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ oder $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ enthalten, das Product $f(x)\varphi(x)$ integrirbar. Es reicht also aus, die singulären bestimmten Integrale der ν^{ten} Ordnung, die zu den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ gehören, in Betracht zu ziehen.

Ist nun a ein solcher Punkt, z. B. einer der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, so ist das singuläre bestimmte Integral

$$\int_{a \pm \delta}^{a \pm \varepsilon} \varphi_1(x)\, dx$$

bei hinreichend kleinem ε und δ numerisch stets kleiner als eine gegebene positive und beliebig kleine Zahl σ. Ferner ist nach den in dem Satz selbst gemachten Voraussetzungen die Function $f(x)$ in dem Intervall $(a \pm \delta,\ a \pm \varepsilon)$ numerisch stets kleiner als eine endliche Zahl γ. Denn, wäre keine Umgebung von a vorhanden, in welcher $f(x)$ kleiner als eine endliche Zahl ist, so würde der Punkt a als Unendlichkeitspunkt auch der $f(x)$ figuriren (§§ 216 und 218) und die beiden Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ würden in ihm gleichzeitig unendlich gross. Das Product $f(x)\varphi(x)$ ist daher, δ und ε mögen so klein sein, wie sie wollen, zwischen $a \pm \delta$ und $a \pm \varepsilon$ stets integrirbar, weil die Unendlichkeitspunkte der $\varphi(x)$, welche in das Intervall $(a \pm \delta,\ a \pm \varepsilon)$ fallen, sämmtlich einer Gruppe von der $(\nu - 1)^{\text{ten}}$ Art angehören. Benutzt man dann den Satz im vorigen Paragraphen, so erhält man wieder

$$\int_{a\pm\delta}^{a\pm\varepsilon} f(x)\,\varphi(x)\,dx < \gamma\sigma.$$

Damit wäre unser Satz für alle Fälle bewiesen.

Zu bemerken ist noch: Wenn eine der beiden Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ z. B. $f(x)$ zwischen α und β stets endlich ist, so ist die in dem Satz gestellte Bedingung, dass die aus ihren Absolutwerthen gebildete Function $f_1(x)$ in dem Intervall (α, β) integrirbar sei, offenbar überflüssig. In diesem Fall ist sie übrigens stets schon von selbst erfüllt (§ 190, 15).

Ferner ist noch zu bemerken, dass der Satz sich auch offenbar auf das Product einer endlichen Anzahl von Functionen ausdehnen lässt, die sämmtlich den oben für die beiden Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ gestellten Bedingungen genügen.

§ 227. Aus § 224 ist nun ersichtlich: Wenn die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ des vorigen Theorems zwischen α und β integrirbar sind und man sich überzeugen will, ob es auch die aus ihren Absolutwerthen gebildeten Functionen $f_1(x)$ und $\varphi_1(x)$ sind, so genügt es, festzustellen, dass die letzteren in den Umgebungen der Unendlichkeitspunkte der $f(x)$ bezüglich der $\varphi(x)$ zur Integration geeignet sind.

Bemerkenswerth ist ferner: Der Satz des vorigen Paragraphen über die Integrirbarkeit des Products $f(x)\varphi(x)$ behält auch dann seine Gültigkeit, wenn die Bedingung, dass die aus den Absolutwerthen der $f(x)$ und $\varphi(x)$ gebildeten Functionen $f_1(x)$ oder $\varphi_1(x)$ integrirbar sein sollen, in gewissen Unendlichkeitspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ nicht erfüllt ist oder wenn man im Ungewissen darüber ist. Nur müssen dann diese besonderen Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ in endlicher Anzahl vorkommen und es darf die entsprechende Function entweder in der rechts- oder linksseitigen Umgebung, in welcher dieses Verhalten eintritt (sobald nur diese Umgebung hinreichend klein ist) ausser dem Punkt selbst weitere Unendlichkeitspunkte nicht aufweisen, während gleichzeitig die andere Function keine

Schwankungen haben darf oder dieselben doch wenigstens sämmtlich verlieren muss, wenn man eine geeignete Function ersten Grades ihr zufügt oder von ihr wegnimmt (§ 134).

Es sei a einer der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ und die gedachte Besonderheit der $f_1(x)$ zeige sich bei ihm entweder in einer der beiden Nachbarschaften von a oder in beiden, hier z. B. in der rechtsseitigen Nachbarschaft $(a, a+\varepsilon)$.

Es ist alsdann bei hinreichend kleinem ε und δ $(\delta < \varepsilon)$

$$\left|\int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx\right| < \sigma,$$

wenn σ eine gegebene positive und beliebig kleine Zahl ist. Wenn daher bei hinreichend kleinem ε die Function $\varphi(x)$ zwischen a und $a+\varepsilon$ keine Schwankungen macht und unter γ_0 die obere Grenze der absoluten Werthe der $\varphi(x)$ zwischen a und $a+\varepsilon$ verstanden wird, so hat man auch nach § 207

$$\left|\int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} f(x)\,\varphi(x)\,dx\right| < 2\sigma\gamma_0.$$

Mithin ist das Product $f(x)\,\varphi(x)$ auch in der rechtsseitigen Nachbarschaft von a der Integration fähig.

Wenn ferner $\varphi(x)$, man mag ε so klein annehmen, als man will, zwischen a und $a+\varepsilon$ eine unendlich grosse Anzahl von Schwankungen macht, sie jedoch, wenigstens wenn ε hinreichend klein ist, durch Addition einer geeigneten Function ersten Grades $\mu x + \nu$ sämmtlich verliert, alsdann gelten die Ungleichungen:

$$\left|\int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} f(x)\,[\varphi(x) + \mu x + \nu]\,dx\right| < 2\gamma_1\sigma$$

und

$$\left|\int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} f(x)\,(\mu x + \nu)\,dx\right| < 2\gamma_2\sigma,$$

in welchen γ_1 und γ_2 die oberen Grenzen der Absolutwerthe der $\varphi(x) + \mu x + \nu$ und von $\mu x + \nu$ zwischen a und $a+\varepsilon$ sind. Man erhält daher auch:

$$\left|\int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} f(x)\,\varphi(x)\,dx\right| < 2\sigma(\gamma_1 + \gamma_2).$$

Das Product $f(x)\,\varphi(x)$ ist also auch in diesem Fall in der rechtsseitigen Nachbarschaft von a integrirbar.

Aehnliche Resultate ergeben sich für alle Nachbarschaften der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_m$, in denen die erwähnten Besonderheiten auftreten. Da man nun offenbar sich das Gesammtintervall (α, β) zu einem Theil in eine endliche Anzahl von Intervallen zerlegt denken kann, welche die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ nebst ihren kritischen Nachbarschaften enthalten und in denen keine anderen Unendlichkeitspunkte der $f(x)$ oder $\varphi(x)$ vorkommen und zum anderen Theil in eine ebenfalls endliche Anzahl von Intervallen, in deren jedem der Satz des vorigen Paragraphen volle Anwendung findet, so ist damit der obige Satz offenbar bewiesen.

---

§ 228. Man kann nun speciell behaupten: Wenn $\varphi(x)$ eine zwischen α und β stets endliche Function ist, die entweder keine oder nur eine endliche Anzahl von Schwankungen macht und wenn $f(x)$ eine andere Function bezeichnet, welche zwar in einer endlichen Anzahl von Punkten zwischen α und β unendlich gross wird, aber doch in dem Intervall (α, β) integrirbar ist, so ist auch das Product $f(x)\,\varphi(x)$ in diesem Intervall der Integration fähig. Denn alsdann ist auch die Function $\varphi(x)$ nach § 187, 6 integrirbar und wir befinden uns daher wieder unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes.

---

§ 229. Wenn man nun diese Sätze benutzt, so lässt sich auch der Satz 6 in § 190, der von dem Quotienten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ handelt, in folgender Weise erweitern: Es seien $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei Functionen, die zwischen α und β höchstens in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung unendlich gross werden und die Function $f(x)$ eigne sich in dem Intervall

(α, β) zur Integration, während $\varphi(x)$ entweder überall in diesem Intervall oder doch wenigstens in den Theilen desselben, in denen es endlich ist, integrirt werden kann. Alsdann ist auch der Quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ in dem Intervall (α, β) jedesmal dann integrirbar, wenn der Nenner $\varphi(x)$ sich stets von Null um mehr als eine bestimmte Grösse λ entfernt hält und zugleich der Zähler $f(x)$ in den Nachbarschaften seiner Unendlichkeitspunkte auch bei Zurückführung auf seine Absolutwerthe seine Integrirbarkeit behält, oder wenn dies letztere zwar bei gewissen solchen Punkten auf der rechten oder linken Seite nicht der Fall oder ungewiss ist, diese Punkte aber nur in endlicher Zahl vorhanden sind und der Nenner $\varphi(x)$ in ihren entsprechenden rechts- oder linksseitigen Nachbarschaften keine Schwankungen macht oder doch wenigstens die reciproke Function $\frac{1}{\varphi(x)}$ diese Schwankungen sämmtlich durch Addition oder Subtraction gewisser geeigneter Functionen ersten Grades verliert.

In der That ist die Function $\frac{1}{\varphi(x)}$ unter diesen Voraussetzungen zwischen α und β stets endlich. Daher werden in den Nachbarschaften der Punkte, in denen $\varphi(x)$ unendlich gross ist, die entsprechenden singulären bestimmten Integrale der Function $\frac{1}{\varphi(x)}$ offenbar bei unbegrenzter Abnahme dieser Nachbarschaften der Null zustreben. Nach Satz 6 in § 190 ist aber diese Function $\frac{1}{\varphi(x)}$ in den Intervallen, in denen sie endlich ist, zur Integration geeignet. Daraus folgt, dass $\frac{1}{\varphi(x)}$ offenbar in dem ganzen Intervall (α, β) integrirbar ist. Beachtet man nun, dass, wenn eine Function $\varphi(x)$ in einem gegebenen Intervall keine Schwankungen macht, dies offenbar auch $\frac{1}{\varphi(x)}$ nicht thut und trägt man den Voraussetzungen am Ende unseres Satzes Rechnung, so folgt aus den Sätzen der vorigen Paragraphen, dass das Product der Functionen $f(x)$

und $\frac{1}{\varphi(x)}$ ebenfalls in dem Intervall (α, β) integrirbar ist. Damit wäre der Satz offenbar bewiesen.

Wir bemerken: Wäre der Nenner $\varphi(x)$ in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung gleich Null oder träte wenigstens der Fall ein, dass er bei der unbeschränkten Annäherung an diese Punkte auch Werthe annähme, die numerisch kleiner als eine beliebige gegebene Grösse sind, so könnte der eben bewiesene Satz seine Gültigkeit behalten, aber nur unter gewissen Bedingungen. So würde er z. B. bestehen bleiben, wenn man die Bedingung machte, dass diese Punkte von den Unendlichkeitspunkten des Zählers $f(x)$ verschieden sein sollen und dass die Function $\frac{1}{\varphi(x)}$ in ihren Umgebungen auch bei Zurückführung derselben auf ihre Absolutwerthe integrirbar bleiben solle etc.

---

§ 230. Benutzt man wieder den Satz in § 226, so sieht man sofort, dass die Resultate 17, 18 und 19 in § 190 in allen ihren Theilen auch dann bestehen bleiben, wenn man an allen anderen Bedingungen festhält, es aber für statthaft erklärt, dass die dort mit $\varphi(x)$ bezeichnete Function unter Beibehaltung ihrer Integrabilität in dem Intervall (α, β) in Punkten unendlich gross werden könne, die eine endliche oder unendlich grosse Menge der ersten Gattung bilden. Es muss dann nur für das Resultat in Nr. 17 zugleich noch gegeben sein, dass auch die Function $\varphi_1(x)$ der absoluten Werthe der $\varphi(x)$ in dem Intervall (α, β) integrirbar sei. Damit finden die Untersuchungen, die der § 223 in Aussicht stellte, ihren Abschluss.

---

§ 231. Auch die in den §§ 191 und den folgenden bis § 203 inclusive gewonnenen Resultate lassen sich mit unbedeutenden Aenderungen auf den Fall ausdehnen, dass die Function $f(x)$ zwar zwischen α und β in Punkten unendlich gross wird, die eine endliche oder unendlich grosse Punktmenge der ersten Gattung bilden, aber doch dabei in dem Intervall (α, β) integrirbar bleibt.

Man sieht in der That, dass auch in diesem Fall das Integral

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx,$$

wenn x ein beliebiger zwischen α und β gelegener Werth (α und β eingeschlossen) ist, stets einen bestimmten und endlichen Werth hat und deshalb eine stets endliche Function von x ist, die wir mit $F(x)$ bezeichnen können. Sind dann x und $x+h$ zwei beliebige Punkte zwischen α und β (α und β eingeschlossen), so hat man (§ 223):

$$F(x+h) = \int_\alpha^x f(x)\,dx + \int_x^{x+h} f(x)\,dx$$

oder auch

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dx. \tag{31}$$

Beachtet man, dass, wenn h numerisch hinreichend klein ist, die rechte Seite den Beitrag der Nachbarschaft $(x, x+h)$ von x rechts oder links, je nachdem h positiv oder negativ ist (§ 222), darstellt und daher Null zum Grenzwerth hat, so ergiebt sich sofort: Das Integral

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx$$

bleibt auch dann eine endliche und continuirliche Function von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen), wenn die Function $f(x)$, ohne dabei ihre Integrabilität zu verlieren, zwischen α und β in Punkten unendlich gross wird, die eine endliche oder unendlich grosse Menge der ersten Gattung bilden.

---

§ 232. Da die Gleichung (31), wie in § 191, Geltung hat, so ist überdies ersichtlich, dass für die Punkte x, die keine Unendlichkeitspunkte der $f(x)$ sind, in Bezug auf die rechts- und linksseitigen Derivirten dieselben Besonderheiten wiederkehren, die wir im § 192 in dem Fall vorfanden, dass

die Function zwischen α und β stets endlich ist. Das Nämliche gilt auch von den rechts- oder linksseitigen Ableitungen in den Unendlichkeitspunkten x der $f(x)$, wenn diese Punkte nicht in den Umgebungen von x rechts bezüglich links als solche auftreten, d. h. wenn $f(x)$ nur für den Punkt x unendlich ist, während es in einer oder in beiden Umgebungen endlich bleibt.

Wenn ferner x ein Unendlichkeitspunkt der $f(x)$ ist, der entstanden ist durch das Verhalten von $f(x)$ in den beiden Nachbarschaften von x, der rechts- und der linksseitigen oder auch nur in einer $(x, x+h)$ z. B. der rechtsseitigen und man nimmt dann an, die Werthe der $f(x)$ im Punkt x auf der rechten Seite seien stetig oder hätten nur eine gewöhnliche Unstetigkeit (§ 148, 2), das heisst, es sei

$$\lim_{h=+0} f(x+h) = +\infty \quad \text{oder} \quad = -\infty, \quad \text{z. B.} = +\infty,$$

so ist leicht ersichtlich, dass die rechtsseitige Ableitung d_x der Function $F(x)$ ebenfalls genau den Werth $+\infty$ hat.

In der That sind in diesem Fall die Werthe der $f(x)$ in den zwischen x und $x+h$ (x ausgeschlossen) liegenden Punkten x' bei positivem und hinreichend kleinem h schliesslich stets positiv und grösser als irgend eine beliebige Zahl A und man hat daher bei hinreichend kleinem, positivem oder negativem h' vermöge (31) stets:

$$\frac{F(x'+h') - F(x')}{h'} > A.$$

Daher haben offenbar die rechts- und linksseitigen Derivirten der $F(x)$ in den Punkten x' des Intervalls $(x, x+h)$ bei der unbeschränkten Annäherung der x' an x sämmtlich $+\infty$ zum Grenzwerth und es ist deshalb (§ 149, 4)

$$\lim_{h=+0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = d_x = +\infty = f(x+0),$$

was zu beweisen war.

Analoge Resultate ergeben sich, wenn die erwähnten Besonderheiten sich in der linksseitigen Umgebung von x zeigen. Die Ergebnisse des § 192 lassen sich daher auf den vorliegenden Fall ausdehnen und man kann offenbar behaupten: Das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$$

besitzt, auch wenn $f(x)$ in den mehrgenannten Punkten, ohne ihre Integrabilität zu verlieren, unendlich gross wird, überall da eine Derivirte im gewöhnlichen Sinn (die endlich oder unendlich gross von bestimmtem Vorzeichen sein kann), wo $f(x)$ stetig ist und wo sie nur solche Unstetigkeiten aufweist, die durch Aenderung des Werthes der Function in dem entsprechenden Punkt beseitigt werden können. Diese Derivirte ist dann der $f(x)$ bezüglich dem gemeinschaftlichen Werth von $f(x+0)$ und $f(x-0)$ gleich. In den Punkten dagegen, in welchen die Function $f(x)$ andere Unstetigkeiten hat, aber wie vorher wieder endlich oder unendlich gross ist, existirt die rechts- und linksseitige Ableitung des Integrals

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$$

und hat den Werth $f(x+0)$ bezüglich $f(x-0)$ jedesmal, wenn diese Grenzwerthe in bestimmter Weise endlich oder unendlich gross sind. Wenn aber eine dieser Grössen oder beide keine bestimmte Bedeutung haben oder mit anderen Worten, wenn die Function $f(x)$ auf einer oder beiden Seiten von x eine Unstetigkeit der zweiten Art hat, so kann eine Ableitung auf der entsprechenden Seite des Punktes x überhaupt nicht existiren.

Wenn ferner auch $f(x)$ zwischen α und β in einer unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung unendlich gross wird, so existiren doch in jedem beliebigen Theil des Intervalls (α, β) stets andere Intervalle von endlicher Ausdehnung, in denen $f(x)$ stets endlich ist (§ 14). Aus dem eben Gesagten oder auch aus § 192 geht dann hervor, dass das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$$

stets eine endliche und stetige Function ist, die in unendlich vielen Punkten jedes beliebigen Theils des Intervalls (α, β)

ihre bestimmte und endliche Derivirte im gewöhnlichen Sinn des Wortes hat. Nach § 14 existiren ferner in jedem Theil des Intervalls immer andere Intervalle, in welchen das Integral eine Function der ersten Art ist (§ 134), das heisst, entweder nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt oder sie doch sämmtlich verliert, wenn man eine geeignete Function ersten Grades von ihr wegnimmt oder zu ihr zufügt.

§ 233. Auch in dem vorliegenden Fall kann, wenn die Function $f(x)$ zwischen α und β integrirbar und α_1 eine beliebige in diesem Intervall liegende Zahl ist, der Werth des Integrals

$$\int_{\alpha_1}^{x} f(x)dx,$$

dessen untere Grenze in α_1 liegt, für alle Werthe von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen) aus der Function

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(x)dx$$

durch Addition einer passenden Constanten $= - F(\alpha_1)$ abgeleitet werden.

Wenn umgekehrt $f(x)$ zwischen α und β nur in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung unendlich gross wird und sich in den Intervallen, in welchen sie endlich ist, zur Integration eignet, und wenn ausserdem $\varphi(x)$ eine Function vorstellt, die in dem Intervall (α, β) stets endlich und stetig ist und, abgesehen von einer Constanten $-\varphi(a)$, die nur von der Zahl a abhängt, den Werth der bestimmten Integrale

$$\int_{a}^{x} f(x)dx$$

für alle Werthe von x und a, die keine Unendlichkeitspunkte der $f(x)$ zwischen sich begreifen, darstellt, *alsdann* ist die gegebene Function $f(x)$ in dem

ganzen Intervall (α, β) integrirbar und die Gleichung

$$\int_c^x f(x)dx = \varphi(x) - \varphi(c) \tag{32}$$

gilt für alle Werthe von c und x zwischen α und β (α und β eingeschlossen).

Setzen wir zunächst voraus, die Function $f(x)$ werde nur in einer endlichen Anzahl von Punkten zwischen α und β unendlich gross und diese Punkte seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Nimmt man dann z. B. $\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m < \beta$ und bezeichnet mit $\varepsilon_1, \varepsilon_1', \varepsilon_2, \varepsilon_2', \ldots$ positive und beliebig kleine Zahlen, so erhält man für ein zwischen α_t und α_{t+1} liegendes x, das heisst:

$$\alpha_t < x < \alpha_{t+1},$$

die Gleichungen:

$$\varphi(\alpha_1 - \varepsilon_1) - \varphi(\alpha) \qquad = \int_\alpha^{\alpha_1 - \varepsilon_1} f(x)dx,$$

$$\varphi(\alpha_2 - \varepsilon_2) - \varphi(\alpha_1 + \varepsilon_1') = \int_{\alpha_1 + \varepsilon_1'}^{\alpha_2 - \varepsilon_2} f(x)dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi(x) - \varphi(\alpha_t + \varepsilon_t') \qquad = \int_{\alpha_t + \varepsilon_t'}^{x} f(x)dx.$$

Bei unbegrenzt abnehmenden ε und ε' erlangen die linken Seiten dieser Gleichungen sämmtlich bestimmte und endliche Grenzwerthe, weil $\varphi(x)$ auch in den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ stetig ist. Addirt man daher, so sieht man, dass $f(x)$ auch in dem Intervall (α, x) integrirbar ist und dass die Gleichung gilt:

$$\varphi(x) - \varphi(\alpha) = \int_\alpha^x f(x)dx.$$

Ist ferner x einer der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, z. B. α_{t+1}, so ist die letzte der vorstehenden Gleichungen zu ersetzen durch:

$$\varphi(x - \varepsilon_{l+1}) - \varphi(\alpha_l + \varepsilon_l') = \int_{\alpha_l + \varepsilon_l'}^{x - \varepsilon_{l+1}} f(x)dx,$$

die in Verbindung mit den übrigen wieder zu demselben Schluss führt. Da man auch dann zu diesem Resultat gelangt, wenn man annimmt, x liege zwischen α und α_1 oder zwischen α_m und β, oder wenn einer oder die beiden Endpunkte α und β Unendlichkeitspunkte der $f(x)$ sind, so ist $f(x)$ in dem ganzen Intervall (α, β) zur Integration geeignet und die Gleichung

$$\varphi(x) - \varphi(\alpha) = \int_{\alpha}^{x} f(x)dx$$

gilt für alle Werthe von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen).

Setzt man $x = c$, so erhält man

$$\varphi(c) - \varphi(\alpha) = \int_{\alpha}^{c} f(x)dx.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so erhält man genau die Formel (32). Damit ist der obige Satz für den Fall bewiesen, dass $f(x)$ zwischen α und β nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unendlich gross wird. Um den Beweis allgemein gültig zu machen, genügt es wie früher anzunehmen, er gelte für den Fall, dass $f(x)$ zwischen α und β in einer Punktmenge von $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ oder einer geringeren Art unendlich gross wird und zu zeigen, dass er dann auch Geltung hat, wenn $f(x)$ in einer Punktmenge von der ν^{ten} Art unendlich gross wird.

Nimmt man also an, der obige Satz bestände zu Recht im Fall von Mengen von der $(\nu - 1)^{\text{ten}}$ oder niedrigerer Art und setzt voraus, $f(x)$ werde in den Punkten einer Menge von der ν^{ten} Art unendlich gross und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ seien die Punkte der ν^{ten} aus ihr abgeleiteten Menge, so erkennt man leicht, dass die obigen Formeln und die früheren Ergebnisse ihre Geltung behalten. Denn beim successiven Verkleinern der $\varepsilon_1, \varepsilon_1', \varepsilon_2, \varepsilon_2', \ldots$ fallen in die Intervalle

$$(\alpha, \alpha_1 - \varepsilon_1), \ (\alpha_1 + \varepsilon_1', \ \alpha_2 - \varepsilon_2), \ldots$$

immer nur höchstens Punkte von der $(\nu - 1)^{\text{ten}}$ Art. Damit wäre der obige Satz nunmehr vollständig bewiesen.

§ 234. Dieser Satz hat insofern besondere Wichtigkeit, als er uns offenbar ein Mittel an die Hand giebt, zu erkennen, ob eine Function $f(x)$, die zwischen α und β in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung unendlich gross wird und die in allen Intervallen, in denen sie endlich ist, integrirbar ist, sich auch in dem ganzen Intervall (α, β) zur Integration eignet. Denn es genügt zu diesem Zweck, sich von der Existenz einer Function $\varphi(x)$ zu überzeugen, die in dem ganzen Intervall (α, β) endlich und stetig und ausserdem so beschaffen ist, dass für alle Intervalle, in denen $f(x)$ endlich ist, immer die Gleichung gilt:

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x f(x)dx.$$

Ueberdies setzt uns die Kenntniss dieser Function $\varphi(x)$, wenn sie existirt, in den Stand, das Integral auch zwischen zwei beliebigen in dem Intervall (α, β) gelegenen Punkten c und a zu berechnen, da man für jedes Intervall (c, x) immer hat:

$$\varphi(x) - \varphi(c) = \int_c^x f(x)dx.$$

Derselbe Satz erlaubt uns ferner, in gewissen Fällen zu ermitteln, ob eine Function $\varphi(x)$ zwischen α und β Unstetigkeiten hat oder unendlich gross wird. Denn weiss man z. B., dass die gegebene Function $f(x)$ in allen Intervallen, in denen sie endlich ist, integrirbar ist, ohne es in dem ganzen Intervall (α, β) zu sein und dass zugleich die Function $\varphi(x)$ bis auf eine Constante $-\varphi(a)$ in allen Intervallen (a, x), in denen $f(x)$ endlich ist, das Integral

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

liefert, alsdann kann man unmittelbar schliessen, dass diese

Function $\varphi(x)$ in allen oder gewissen Punkten zwischen α und β, in denen $f(x)$ unendlich gross wird, unendlich gross oder unstetig ist.

§ **235.** Es ist vielleicht nicht unzweckmässig, auf die freilich selbstverständliche Thatsache hinzuweisen, dass die Umkehrung der zuletzt nachgewiesenen Eigenschaft unter Umständen nicht statthaft ist. So darf daraus, dass eine Function $\varphi(x)$ gefunden wurde, die in den Unendlichkeitspunkten der $f(x)$ unstetig, dagegen in den Intervallen (a, x), in denen $f(x)$ endlich ist, stetig verläuft und die Gleichung

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x f(x)dx$$

liefert, keineswegs geschlossen werden, dass $f(x)$ zwischen α und β nicht zur Integration geeignet ist. Denn es kann sehr wohl sein, dass die unstetige Function $\varphi(x)$ aus der endlichen und stetigen Function, die das Integral

$$\int_a^x f(x)dx$$

darstellt, auf die Weise hervorgegangen ist, dass man zu der letzteren in einigen der Intervalle, in welchen $f(x)$ endlich ist, eine gewisse Constante und in andern Intervallen eine andere hinzugefügt hat.

Wohl aber gilt der Satz: Wenn $\varphi(x)$ nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten hat, die sämmtlich von der zweiten Art sind und in Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ zwischen α und β, in denen $f(x)$ unendlich gross ist, liegen, während in allen Intervallen (a, b), in denen $f(x)$ stetig ist, $\varphi(x)$ den Werth des entsprechenden Integrals

$$\int_a^b f(x)dx$$

darstellt, alsdann eignet sich $f(x)$ in den Umgebungen der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ und daher auch in dem

ganzen Intervall (α, β) nicht zur Integration. Denn es besteht z. B. rechts vom Punkt α_1 die Gleichung

$$\varphi(\alpha_1 + \varepsilon) - \varphi(\alpha_1 + \delta) = \int\limits_{\alpha_1+\delta}^{\alpha_1+\varepsilon} f(x)dx \tag{33}$$

und wenn $\varphi(x)$ rechts von α_1 eine Unstetigkeit der zweiten Art hat, so strebt das singuläre bestimmte Integral

$$\int\limits_{\alpha_1+\delta}^{\alpha_1+\varepsilon} f(x)dx$$

nicht dem Grenzwerth Null zu.

Man kann noch hinzufügen: Wenn die Function $f(x)$ in allen Theilintervallen zwischen α und β, in welchen sie endlich ist, integrabel ist, so kann zur Rechten eines Punktes α_1, bei einer Function $\varphi(x)$, welche zur Berechnung der bestimmten Integrale dient, die sich über alle Theilintervalle rechts von α_1, die den Punkt α_1 nicht enthalten, erstrecken, eine Unstetigkeit der zweiten Art nur dann eintreten, wenn α_1 ein Unendlichkeitspunkt der $f(x)$ ist. Denn sonst würde die Formel (33) ergeben

$$\varphi(\alpha_1 + \varepsilon) - \varphi(\alpha_1 + \delta) = \Theta(\varepsilon - \delta),$$

worin Θ eine Grösse wäre, die numerisch kleiner als eine endliche Zahl ist und $\varphi(x)$ hätte daher in dem Punkt α_1 auf der rechten Seite die vorausgesetzte Unstetigkeit der zweiten Art nicht.

Diese Bemerkung vervollständigt den letzten Satz in § 74.

---

§ 236. Ferner führt der Lehrsatz des § 233 unmittelbar auch zur Verallgemeinerung der in den §§ 194 und 196 erhaltenen Resultate.

Wir wollen voraussetzen, $f(x)$ sei eine Function von x, die in dem Intervall (α, β) stets endlich ist oder nur in einer Punktmenge G der ersten Gattung unendlich gross wird und mit Ausschluss höchstens der Punkte einer Menge G_1 ebenfalls von der ersten Gattung (allgemeiner: einer abzählbaren

nicht ausgedehnten Menge) auf der nämlichen Seite der übrigen Punkte z. B. auf der rechten immer stetig verläuft oder nur gewöhnliche Unstetigkeiten aufweist. Wir nehmen ferner an, die Function $\varphi(x)$ sei zwischen α und β endlich und stetig und derart, dass sie höchstens mit Ausschluss der Punkte der Menge G und G_1 und derjenigen einer andern Menge G_2 von der ersten Gattung (allgemeiner: einer abzählbaren Menge), in denen die Ableitung unbestimmt ist, in allen übrigen Punkten eine rechtsseitige Ableitung besitze, die $= f(x)$ oder $= f(x+0)$ ist, je nachdem $f(x)$ in diesen Punkten zur Rechten stetig oder unstetig ist.

Alsdann lässt sich $f(x)$ in allen Intervallen, in denen sie endlich ist (§ 187, 4) integriren und für diese Intervalle (a, x) gilt die Gleichung (§ 194):

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x f(x)dx.$$

Daher eignet sich die Function $f(x)$ nach § 233 auch in dem ganzen Intervall (α, β) zur Integration und man hat für alle in diesem Intervall gelegenen Punkte c und x (α und β eingeschlossen):

$$\varphi(x) - \varphi(c) = \int_c^x f(x)dx.$$

Das heisst aber: Bei den eben charakterisirten Functionen $f(x)$ kann die Berechnung der bestimmten Integrale zwischen α und β nach denselben Methoden ausgeführt werden, die in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Integralrechnung für die stets endlichen Functionen gegeben zu werden pflegen. Dabei sind diese Methoden, wie im § 194 erwähnt, derart zu erweitern, dass sie auf alle die genannten Functionen anwendbar werden und ist gleichzeitig vorauszusetzen, dass die Function $\varphi(x)$, welche nach diesen Methoden zur Berechnung der Integrale dienen soll, zwischen α und β stets endlich und stetig sei.

Es ist ferner zu bemerken, dass für jede Function $f(x)$, welche in den Intervallen, in denen sie endlich ist, den oben angegebenen Bedingungen genügt, die Bedingung, auch in den Umgebungen ihrer Unendlichkeitspunkte zwischen α und β

integrirbar zu sein, stets dann erfüllt ist, wenn die Function $\varphi(x)$, wie sie durch die gewöhnlichen Methoden der Integralrechnung geliefert wird, zwischen α und β endlich und stetig ist. Offenbar kann in gewissen Fällen diese Bemerkung auch dazu dienen, über die Integrirbarkeit einer gegebenen Function $f(x)$ zwischen α und β Aufklärung zu verschaffen.

Ist z. B. die Function

$$\frac{\cos\frac{1}{x}}{x\sin^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}} - \frac{3}{2}\sin^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x}$$

gegeben, die in den Punkten $0, \pm\frac{1}{\pi}, \pm\frac{1}{2\pi}, \pm\frac{1}{3\pi}\cdots$ unendlich gross wird, welche eine Menge der ersten Gattung bilden und für welche der Punkt 0 ein Grenzpunkt ist, so schliesst man sofort, dass sie in jedem beliebigen endlichen Intervall integrirbar ist, auch wenn dieses Intervall den Punkt Null enthält. Denn die gewöhnlichen Methoden der Integralrechnung zeigen, dass das Integral dieser Function in den Intervallen (a, x), in denen sie endlich ist, nur um eine constante Grösse von der endlichen und stetigen Function abweicht, die für von Null verschiedene x gleich $-\frac{3}{2}x\sin^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x}$ und für $x = 0$ Null ist.

Folglich eignen sich auch die Functionen

$$\frac{\cos\frac{1}{x}}{x\sin^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}} \quad \text{und} \quad \frac{\cos\frac{1}{x-a}}{(x-a)\sin^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x-a}} + \frac{\cos\frac{1}{x}}{x\sin^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}},$$

in welch letzterer a eine beliebige Constante bedeutet, in jedem beliebigen endlichen Intervall zur Integration.

Auch hier darf man sich durch das Auffinden von Unstetigkeiten in einer Function $\varphi(x)$, welche nach den gewöhnlichen Methoden der Integralrechnung dazu dient, die bestimmten Integrale einer Function $f(x)$ (wie der obigen) in allen Intervallen, in denen $f(x)$ endlich ist, zu liefern, nicht dazu verleiten lassen, auch umgekehrt den Schluss zu ziehen, dass $f(x)$ in dem ganzen Intervall (α, β) nicht integrirbar sei. Man würde zu diesem Schluss nur berechtigt sein, wenn die

Unstetigkeiten der $\varphi(x)$ sämmtlich wenigstens auf einer Seite der entsprechenden Punkte von der zweiten Art wären und in unendlich grosser Zahl auftreten würden (vergleiche den vorigen Paragraphen).

---

§ 237. Wir wollen nun voraussetzen, die Function $F(x)$ sei in dem Intervall (α, β) endlich und stetig und ihre Ableitung d_x z. B. rechts von jedem Punkt x zwischen α und β (β ausgeschlossen) sei stets bestimmt und endlich oder werde nur in einer Punktmenge G der ersten Gattung[1]) unendlich gross und sei in den übrigen Punkten immer stetig oder besitze höchstens gewöhnliche Unstetigkeiten (die nach § 149 dann nur auf der linken Seite der entsprechenden Punkte auftreten können). Sollte dagegen die Ableitung d_x Unbestimmtheiten zeigen, so mögen diese nur in einer Punktmenge G_1 ebenfalls von der ersten Gattung vorkommen, und wenn sie Unstetigkeiten von der zweiten Art aufweist, so mögen diese, nach Ausschliessung wieder von höchstens einer Punktmenge erster Gattung G_2, nur auf einer und derselben Seite der entsprechenden Punkte eintreten. (Allgemeiner braucht G_1 nur abzählbar und G_2 nur abzählbar und nicht ausgedehnt zu sein.)

Legt man alsdann d_x auch in den Punkten, in welchen es unbestimmt ist, willkürliche Werthe bei, so erhält man eine Function, die nach dem vorigen Paragraphen in dem ganzen Intervall (α, β) integrirbar ist und es ist:

$$F(x) - F(\alpha) = \int_\alpha^x d_x\, dx$$

für alle Werthe von x zwischen α und β (α und β einge-

1) Unter die Unendlichkeitspunkte von d_x haben wir jetzt auch die Punkte zu rechnen, in deren rechts- oder linksseitiger Nachbarschaft, sei sie auch noch so klein, d_x zwar Werthe annimmt, die numerisch grösser als irgend eine gegebene Grösse sind, aber im Punkt x selbst doch endlich bleibt oder nicht existirt. Dies ist beispielsweise für den Punkt $x = 0$ der Fall, wenn $F(x)$ eine Function darstellt, die für ein von Null verschiedenes und positives x gleich $x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}$ und für $x = 0$ Null ist.

schlossen). Auch in diesen Fällen gelangt man also durch die Integration der Ableitung d_x der $F(x)$ rechts von den Punkten x, welche zwischen α und β liegen (β ausgeschlossen), bis auf eine Constante wieder zu der ursprünglichen Function $F(x)$, und die Integration stellt sich damit als eine Umkehrung der Derivation dar.

Erinnert man sich daher des Satzes in § 162, so lässt sich jetzt speciell behaupten: $F(x)$ sei eine endliche und stetige Function, die zwischen α und β nicht unendlich viele Maxima und Minima hat und sie auch nicht durch Subtraction (oder Addition) von Functionen ersten Grades $\mu x + \nu$ erlangt. Oder auch, es existire unter den unendlich vielen Functionen

$$\varphi(x) = F(x) - \mu x - \nu,$$

die sich so ergeben (die $F(x)$ eingeschlossen), für jeden Punkt x_0 zwischen α und β höchstens eine, die in jeder rechtsseitigen Nachbarschaft von x_0 eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima besitzt und es sei dasselbe auch bei den linksseitigen Nachbarschaften von x_0 der Fall. Wenn alsdann das Intervall (α, β) zu denjenigen gehört, in welchen die rechts- und linksseitigen Ableitungen der $F(x)$ stets endlich sind oder nur in Punkten unendlich gross werden, die eine endliche oder unendlich grosse Menge der ersten Gattung bilden, so sind diese Ableitungen d_x und d_x' zwischen α und β integrirbar und liefern, wenn sie von α bis x integrirt werden, immer wieder die ursprüngliche Function $F(x)$ bis auf eine Constante $F(\alpha)$. Das heisst, es ist

$$F(x) - F(\alpha) = \int_\alpha^x d_x\, dx = \int_\alpha^x d_x'\, dx\,.$$

---

§ 238. Diese Resultate bilden offenbar die vollständige Erweiterung der Sätze in den §§ 194, 195 und 196, die also aus diesen Sätzen selbst und aus § 218 hervorging. Wie

schon im § 197 in Bezug auf die Ergebnisse der angezogenen Paragraphen gesagt wurde, so kann auch hier wiederholt werden, dass die gewonnenen Resultate aufhören ihre volle Gültigkeit zu behalten, wenn die für sie gegebenen Bedingungen nicht sämmtlich erfüllt sind.

Auf ähnliche Weise lassen sich auch die Sätze in den §§ 197, 198, 199, die von den Integralen der Derivirten und der rechts- oder linksseitigen Ableitungen einer endlichen und stetigen Function handeln, auf den Fall ausdehnen, dass diese Grössen nicht stets endlich sind, sondern auch in einer Punktmenge erster Gattung unendlich gross werden können. — Diese Erweiterungen erhält man also sehr leicht auf Grund der Sätze selbst und des § 233. So findet man:

1. Es stelle eine endliche und stetige Function $F(x)$ für die Werthe von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen) bis auf eine Constante das Integral einer andern Function $f(x)$ dar, die zwar in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung zwischen α und β unendlich gross wird, jedoch in diesem Intervall zur Integration geeignet bleibt. Alsdann sind die Derivirten der Integralfunction $F(x)$ ebenfalls integrationsfähig und können von der Function $f(x)$ nur um eine Function abweichen, deren Integral Null ist.

2. Wenn bei einer Function $F(x)$, die in einem ganzen Intervall (α, β) endlich und stetig ist, eine der vier Derivirten in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung unendlich gross wird, aber in allen Intervallen, in denen sie endlich ist, integrirbar ist, alsdann ist diese sowohl wie die übrigen Derivirten in dem ganzen Intervall (α, β) integrirbar und liefert bei der Integration wieder die gegebene Function $F(x)$ bis auf eine Constante.

---

§ 239. Will man bei einer Function $f(x)$, die zwischen α und β in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge in der ersten Gattung unendlich gross wird und sich

in den Intervallen, in denen sie endlich ist, zur Integration eignet, erkennen, ob sie auch in dem ganzen Intervall (α, β) integrirbar ist, so genügt es, auf die Definition und die Unterscheidungsmerkmale zurückzugehen, die sich aus den vorstehenden Betrachtungen ergeben. In vielen Fällen jedoch, wenn die Anzahl der Punkte endlich ist, in denen $f(x)$ zwischen α und β unendlich gross wird, ist es zur Entscheidung dieser Sache viel bequemer, den folgenden Satz zu benutzen, der häufig eine äusserst einfache Anwendung gestattet. Er lautet: Wenn die Function $f(x)$ zwischen α und β nur für $x = \beta$ unendlich gross wird und zwischen α und $\beta - \varepsilon$, wenn $\alpha < \beta$ ist, so klein man auch die positive Zahl ε nehmen mag, stets endlich und integrirbar ist, so ist das Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

jedesmal dann bestimmt und endlich, wenn $f(x)$ für $x = \beta$ (auf der linken Seite) unendlich gross von einer Ordnung wird, die kleiner oder ebenso gross oder auch nur nicht grösser ist (§ 27), als die Ordnung irgend einer der Functionen:

$$\frac{1}{(\beta - x)^{1-\mu}},\quad \frac{1}{(\beta - x)[1(\beta - x)]^{1+\mu}},\quad \frac{1}{(\beta - x)\,1(\beta - x)[1^2(\beta - x)]^{1+\mu}} \cdots,$$

worin μ eine bestimmte, von Null verschiedene positive Grösse ist (welche in der ersten Function kleiner als die Einheit vorauszusetzen ist, weil sonst $f(x)$ auch für $x = \beta$ endlich ausfallen würde). Dasselbe Integral wird dagegen jedesmal dann unendlich gross, wenn bei unbegrenzter Annäherung des x an β von der linken Seite her die Function schliesslich stets dasselbe Vorzeichen behält und für $x = \beta$ unendlich gross von einer Ordnung wird, die grösser, ebenso gross oder nur nicht kleiner ist, als die Ordnung einer der Functionen[1]):

---

1) Riemann, Ueber die Darstellbarkeit u. s. w. Seite 22; Werke Seite 229. Pringsheim, Math. Ann. Bd. 37 Seite 591.

$$(34) \qquad \frac{1}{\beta - x}, \quad \frac{1}{(\beta - x)\,\mathrm{l}\,(\beta - x)}, \quad \frac{1}{(\beta - x)\,\mathrm{l}\,(\beta - \alpha)\,\mathrm{l}^2\,(\beta - x)} \cdots$$

Dabei ist der Einfachheit wegen angenommen, dass bei der aufeinander folgenden Berechnung der hier auftretenden Logarithmen stets die Absolutwerthe derselben genommen werden, so dass z. B., wenn $\mathrm{l}\,(\beta - x)$ negativ ist, die Grösse $\mathrm{l}^2\,(\beta - x)$ durch $\mathrm{l}\,[-\,\mathrm{l}\,(\beta - x)]$ oder $\mathrm{l}^2\,\frac{1}{\beta - x}$ dargestellt wird, u. s. w.

Wir beginnen damit, den ersten Theil des Satzes zu beweisen und bemerken zu dem Zweck, dass sich nach den in diesem Fall geltenden Voraussetzungen eine positive und so kleine Zahl ε finden lässt (§ 27), dass wenigstens eine der Grössen:

$$f(x)\,(\beta - x)^{1-\mu}; \quad f(x)\,(\beta - x)\,[\mathrm{l}\,(\beta - x)]^{1+\mu},$$
$$f(x)\,(\beta - x)\,\mathrm{l}\,(\beta - x)\,[\mathrm{l}^2\,(\beta - x)]^{1+\mu}, \ldots$$

für die Werthe von x zwischen $\beta - \varepsilon$ und β (β ausgeschlossen) numerisch stets kleiner als eine endliche und positive Grösse c bleibt.

Daraus ergiebt sich dann sofort, dass das singuläre bestimmte Integral

$$\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta-\delta} f(x)\,dx$$

$(0 < \delta < \varepsilon)$ numerisch kleiner ist als eine der Grössen:

$$c\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta-\delta} \frac{dx}{(\beta - x)^{1-\mu}}, \quad c\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta-\delta} \frac{\delta x}{(\beta - x)\,[\mathrm{l}\,(\beta - x)]^{1+\mu}},$$
$$c\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta-\delta} \frac{dx}{(\beta - x)\,\mathrm{l}\,(\beta - x)\,[\mathrm{l}^2\,(\beta - x)]^{1+\mu}}, \ldots$$

welche bezüglich die Werthe haben

$$\frac{c}{\mu}\,(\varepsilon^\mu - \delta^\mu), \quad \frac{c}{\mu}\,[(\mathrm{l}\,\varepsilon)^{-\mu} - (\mathrm{l}\,\delta)^{-\mu}],$$
$$\frac{c}{\mu}\,[(\mathrm{l}^2\,\varepsilon)^{-\mu} - (\mathrm{l}^2\,\delta)^{-\mu}], \ldots$$

Daraus folgt offenbar

$$\lim_{\varepsilon=0}\int\limits_{\beta-\varepsilon}^{\beta-\delta} f(x)\,dx = 0$$

für jeden Werth von δ, der kleiner als ε ist. Damit wäre der erste Theil des Satzes bewiesen.

Um nun auch den zweiten Theil zu beweisen, beachte man, dass, wenn ε eine schon hinreichend kleine Zahl ist, zwischen α und $\beta - \varepsilon$ eine derartige Zahl γ existiren muss, dass für alle Werthe von x zwischen γ und β (β höchstens ausgeschlossen) die Function $f(x)$ stets dasselbe Vorzeichen behält, ausserdem aber so beschaffen ist, dass wenigstens eine der Grössen:

$$f(x)(\beta - x),\quad f(x)(\beta - x)\,\mathrm{l}(\beta - x),$$
$$f(x)(\beta - x)\,\mathrm{l}^2(\beta - x),\ldots$$

absolut genommen stets grösser als eine von Null verschiedene und positive Zahl c ist.

Da ferner

$$\int\limits_\alpha^{\beta-\varepsilon} f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^{\gamma} f(x)\,dx + \int\limits_\gamma^{\beta-\varepsilon} f(x)\,dx$$

ist, so reicht es, um den Grenzwerth des Integrals

$$\int\limits_\alpha^{\beta-\varepsilon} f(x)\,dx$$

zu erhalten, aus, denjenigen des Integrals

$$\int\limits_\gamma^{\beta-\varepsilon} f(x)\,dx$$

zu ermitteln. Da nun nach dem Vorigen dieses letztere Integral numerisch grösser als eine der Grössen

$$c\int\limits_\gamma^{\beta-\varepsilon}\frac{dx}{\beta - x},\quad c\int\limits_\gamma^{\beta-\varepsilon}\frac{dx}{(\beta - x)\,\mathrm{l}(\beta - x)},\quad c\int\limits_\gamma^{\beta-\varepsilon}\frac{dx}{(\beta - x)\,\mathrm{l}(\beta - x)\,\mathrm{l}^2(\beta - x)},\ldots$$

ist, das heisst grösser als einer der Werthe

$$c[\mathrm{l}\,\varepsilon - \mathrm{l}(\beta - \gamma)],\quad c[\mathrm{l}^2\varepsilon - \mathrm{l}^2(\beta - \gamma)],\quad c[\mathrm{l}^3\varepsilon - \mathrm{l}^3(\beta - \gamma)],\ldots$$

die bei nach und nach abnehmendem ε über jedes Maass hinaus wachsen, so kommt man zu dem Schluss, dass

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int_{\alpha}^{\beta - \varepsilon} f(x)\,dx = \pm\infty$$

sein muss. Damit wäre dann auch der zweite Theil unseres Satzes bewiesen.

---

§ 240. Wir möchten noch bemerken, dass der erste Theil dieses Satzes auch dann seine Gültigkeit behält, wenn $f(x)$ in einer endlichen Anzahl von Punkten zwischen α und β unendlich gross wird, wenn nur für jeden Punkt die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind. Denn das gegebene Integral kann alsdann offenbar in eine endliche Anzahl von Integralen zerlegt werden, in deren jedem $f(x)$ nur in einem der Grenzpunkte unendlich gross wird. Auch der zweite Theil bleibt gültig, wenn $f(x)$ in einer endlichen Anzahl von Punkten zwischen α und β unendlich gross wird; es müssen dann nur für einige dieser Punkte nicht nur die Bedingungen des Satzes erfüllt sein, sondern es muss auch das Vorzeichen der Function in hinreichend kleinen Umgebungen dieser Punkte immer dasselbe sein und in den Umgebungen der übrigen Unendlichkeitspunkte, die diese Bedingungen nicht erfüllen, muss sich die Function zur Integration eignen.

Aus unserer Beweisführung geht ferner hervor, dass der zweite Theil des Satzes auch dann noch gilt, wenn $f(x)$ im Punkt β wieder den am Schluss des Satzes gegebenen Bedingungen entspricht, ausserdem aber in unendlich vielen Punkten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ in den linksseitigen Nachbarschaften von β unendlich gross wird, falls dann nur β für diese Punkte die Bedeutung eines Grenzpunktes hat. Und zwar gilt dieses nicht nur für den Fall, dass die Function in den Umgebungen eines jeden dieser Punkte integrirbar ist, sondern auch offenbar dann, wenn dieses nicht der Fall ist.

---

§ 241. Aus dem Beweis des zweiten Theiles des Satzes in § 239 folgt dann schliesslich noch weiter: Wenn sich x dem β (von der linken Seite her) nähert und die Function $f(x)$ dabei beständig das Vorzeichen wechselt, so kann, auch wenn $f(x)$ wieder unendlich gross von einer Ordnung wird, die ebenso gross, grösser oder auch nur nicht kleiner als die Ordnung einer der Functionen (34) ist, das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

aufhören unendlich gross zu sein. Das Gleiche kann auch der Fall sein, wenn die Function $f(x)$ bei der Annäherung von x an β zwar auch Werthe annimmt, die numerisch grösser als jede beliebige gegebene Zahl sind, aber sich in einem jener am Schluss des § 29 besprochenen Fälle befindet, in denen ihre Unendlichkeitsordnung mit derjenigen der Functionen (34) sich nicht vergleichen lässt. Die Function $f(x)$ kann in dem letztern Fall zugleich auch der Art sein, dass sie, wenn man sich darauf beschränkt sie nur in einer passenden Menge von (discreten) Werthen von x, für welche β ein Grenzpunkt ist, in Betracht zu ziehen, sich als eine Grösse betrachten lässt, die bei der Annäherung von x an β unendlich gross von einer Ordnung wird, die grösser oder ebenso gross ist, als die Ordnung einiger oder aller jener Grössen (34). Es ist dies z. B. bei den beiden Integralen

$$\int_0^b \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2}\,dx, \qquad \int_0^b \left(\sin \frac{1}{x} - 2\,\frac{\cos \frac{1}{x}}{x}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

der Fall, von denen das erste nicht als unendlich gross, sondern lediglich als unbestimmt anzusehen ist, da es aus dem Grenzwerth der Grösse $\cos \frac{1}{b} - \cos \frac{1}{\varepsilon}$ für $\varepsilon = 0$ hervorgehen würde, und das zweite offenbar den bestimmten und endlichen Werth $2\sqrt{b}\,\sin \frac{1}{b}$ hat.

Achtzehntes Kapitel.

Integrale über unendlich grosse Intervalle.

§ 242. Wir haben bisher die Functionen $f(x)$ nur in Intervallen (α, β) von endlicher Ausdehnung betrachtet. Jetzt wollen wir voraussetzen, eine Function $f(x)$ sei in Intervallen von unendlich grosser Ausdehnung gegeben (das heisst auch für Werthe von x, die grösser als eine beliebige gegebene Zahl sind) und wollen auch die Integrale solcher Functionen in solchen Intervallen untersuchen.

Zu dem Ende ist zunächst zu sagen: Wenn eine Function $f(x)$ in jedem endlichen aber willkürlich grossen Theil desjenigen Intervalls, in welchem sie in Betracht kommt, integrirbar ist (wobei $f(x)$ in diesen Theilen in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung auch unendlich gross werden kann), so wird bei endlichem α unter dem Werth des bestimmten Integrals

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{oder} \quad \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx$$

der Grenzwerth des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \quad \text{bezüglich} \quad \int_{-\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$$

verstanden, falls man β durch positive Werthe hindurch unbeschränkt wachsen lässt. Ferner versteht man bei derselben Voraussetzung unter dem Werth des bestimmten Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

den Grenzwerth des Integrals

$$\int_{-\alpha}^{\beta} f(x)\,dx,$$

wenn α und β durch positive Werthe hindurch und unabhängig von einander unbeschränkt wachsen. Unterscheidet man dann wie bisher die Fälle, in denen diese Grenzwerthe bestimmt

und endlich oder unendlich gross oder unbestimmt sind, so sagt man eine Function $f(x)$ sei zwischen α und $+\infty$ oder α und $-\infty$ oder zwischen $-\infty$ und $+\infty$ zur bestimmten Integration geeignet nur dann, wenn das entsprechende Integral

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx, \quad \int_{\alpha}^{-\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

einen bestimmten und endlichen Werth hat.

§ 243. Ferner bezeichnen wir nach Cauchy mit Hauptwerth des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

den Grenzwerth des Integrals

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$$

bei unbeschränkt wachsendem positivem α. Der Hauptwerth des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

kann bestimmt (endlich oder unendlich gross) sein, auch wenn es das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

selbst nicht ist, und wenn das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

bestimmt ist, so ist sein Werth immer mit dem Hauptwerth identisch.

Wenn ferner Cauchy für die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx, \quad \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

die eine oder die andere der Grössen

$$\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)dx, \quad \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} f(x)dx$$

oder auch beide als singuläre bestimmte Integrale definirte, vorausgesetzt, dass in ihnen μ und ν irgend welche positive Zahlen und ε eine ebenfalls positive, übrigens willkürlich kleine Grösse bedeutet, so erscheint es hier zweckmässiger, als singuläre bestimmte Integrale die Ausdrücke

$$\int_{-\beta-\gamma}^{-\beta} f(x)dx, \quad \int_{\beta}^{\beta+\gamma} f(x)dx$$

einzuführen, in denen unter β eine positive und beliebig grosse, unter γ irgend eine positive Zahl verstanden ist. An der Hand dieser Definition lässt sich auf Grund des § 23 offenbar der Satz aufstellen: Soll eine Function $f(x)$ in einem Intervall von unendlich grosser Ausdehnung $(\alpha, +\infty)$ oder $(-\infty, \alpha)$ oder $(-\infty, +\infty)$ sich zur bestimmten Integration eignen, so ist dazu nothwendig und ausreichend, dass sie in jedem beliebigen endlichen, aber willkürlich grossen Theil dieses Intervalls integrirbar sei und dass die entsprechenden singulären bestimmten Integrale

$$\int_{-\beta-\gamma}^{-\beta} f)x)\,dx, \quad \int_{\beta}^{\beta+\gamma} f(x)dx$$

für $\beta = +\infty$, bei beliebigem positivem γ Null zum Grenzwerth haben.

Nach Analogie der bei den unendlichen Reihen gebräuchlichen Ausdrucksweise nennen wir den Werth des Integrals

$$\int_{\beta}^{+\infty} f(x)dx$$

bei positivem und willkürlich grossem β den Rest des Integrals

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx.$$

Ebenso soll der Rest des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$$

der Werth des Integrals

$$\int_{-\infty}^{-\beta} f(x)dx$$

sein, wenn β wieder positiv und willkürlich gross angenommen wird. Handelt es sich dagegen um das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

so werden wir die beiden Reste

$$\int_{-\infty}^{-\beta} f(x)dx \quad \text{und} \quad \int_{\beta}^{+\infty} f(x)dx$$

getrennt betrachten. Bei Einführung dieser Reste in unsere Betrachtung hat man daher den Satz: Damit eine Function $f(x)$ in einem Intervall von unendlich grosser Ausdehnung integrirbar sei, dazu ist es nothwendig und ausreichend, dass sie sich in jedem endlichen, aber wie immer grossen Theil des Intervalls integriren lasse und dass die entsprechenden Reste

$$\int_{-\infty}^{-\beta} f(x)dx, \quad \int_{\beta}^{+\infty} f(x)dx$$

bei unbeschränkt wachsendem (positivem) β Null zum Grenzwerth haben.

---

§ 244. Die Ergebnisse unter 1, 2, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 14 und 16 in § 190, von denen wir schon im § 123 sagten, dass sie sich auf Functionen ausdehnen lassen, die in einem

endlichen Intervall (α, β) zwar integrirbar bleiben, aber zwischen α und β in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung unendlich gross werden, behalten offenbar auch dann Geltung, wenn eine der Integrationsgrenzen oder beide unendlich gross sind und die entsprechenden (endlichen oder unendlich grossen) Functionen in dem unendlich grossen Intervall, in dem sie in Betracht kommen, integrirbar sind.

Einige der übrigen Resultate des § 190 verlieren auch hier ihre Gültigkeit oder sie erleiden wenigstens Ausnahmen, die einer näheren Beleuchtung bedürfen. Wir beschränken uns dabei von jetzt an auf die Untersuchung der Integrale

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

in denen die obere Grenze $+\infty$ und die untere eine endliche Grösse α ist; denn die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

in welchen die beiden Grenzen unendlich gross sind, können in die beiden

$$\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx, \quad \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx$$

zerlegt werden, von denen das erste sich auf das zweite zurückführen lässt, wenn man $-x$ statt x zur Variabeln nimmt.

---

§ 245. Wir beginnen mit der Betrachtung des Products von zwei oder mehr Functionen, z. B. von zwei, und beweisen zunächst den folgenden Satz, der die in § 190, 6 und den §§ 226 und 227 gewonnenen Resultate auf unendlich grosse Integrationsintervalle ausdehnt.

Es seien $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei Functionen von x, die in einem Intervall von unendlich grosser Ausdehnung z. B. von α bis $+\infty$ stets endlich bleiben

oder in Punkten unendlich gross werden, die in jedem zwischen α und β liegenden Intervall von endlicher Ausdehnung nur endliche oder unendlich grosse Mengen der ersten Gattung bilden. Es sei zu gleicher Zeit wenigstens eine dieser Functionen z. B. $f(x)$ zwischen α und $+\infty$ integrirbar und das Product $f(x)\varphi(x)$ sei ebenfalls in jedem beliebigen endlichen Theil (α, β) des Intervalls $(\alpha, +\infty)$ zur Integration geeignet. Alsdann ist dieses Product $f(x)\varphi(x)$ auch zwischen α und $+\infty$ integrirbar, wenn die eine oder die andere von den beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Von einem bestimmten endlichen Werth x' von x an aufwärts muss sich die Function $\varphi(x)$ numerisch stets kleiner als eine endliche Zahl halten und die Function $f(x)$ muss von x' bis $+\infty$, auch wenn sie auf ihre Absolutwerthe $f_1(x)$ reducirt wird, integrirbar bleiben.

2. Von einem gewissen endlichen Werth x' von x an bis zur Unendlichkeit müssen die beiden Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ numerisch stets kleiner als eine endliche Zahl bleiben und die Function $\varphi(x)$ darf niemals Schwankungen machen.

Im ersten Fall besteht, wenn man mit σ eine positive und beliebig kleine Zahl, und mit β irgend eine Zahl bezeichnet, die grösser als eine gewisse über x' hinaus gelegene Zahl ist, für jede positive Zahl γ die Ungleichung

$$\int_{\beta}^{\beta+\gamma} f_1(x)\,dx < \sigma.$$

Wenn daher L die obere Grenze der Absolutwerthe der $\varphi(x)$ zwischen x' und $+\infty$ angiebt, so ist nach § 225

$$\left|\int_{\beta}^{\beta+\gamma} f(x)\varphi(x)\,dx\right| \leqq L\int_{\beta}^{\beta+\gamma} f_1(x)\,dx < L\sigma$$

und das beweist (§ 243) zunächst den ersten Theil des Satzes.

In dem zweiten Fall besteht, wenn σ, β und L dieselbe Bedeutung wie vorhin haben, für jede positive Zahl γ die Ungleichung

$$\int_{\beta}^{\beta+\gamma} f(x) < \sigma,$$

und nach § 207 ist

$$\left|\int_{\beta}^{\beta+\gamma} f(x)\varphi(x)\,dx\right| < 2L\sigma.$$

Damit ist dann auch der zweite Theil des Satzes bewiesen.

Man sieht ohne Weiteres ein, dass sich dieser Satz auch auf das Product einer grösseren Anzahl von Functionen ausdehnen lässt.

---

§ 246. Nachdem so die Sätze über die Integrabilität der Producte mehrerer Functionen auch auf die Intervalle von unendlich grosser Ausdehnung anwendbar gemacht sind, ergiebt sich mit Leichtigkeit eine analoge Erweiterung des Satzes 6 in § 190 und des Satzes in § 229 in Bezug auf den Quotienten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Denn betrachtet man diesen Quotienten als das Product zweier Functionen $f(x)$, $\frac{1}{\varphi(x)}$, so folgt aus dem vorigen Paragraphen sofort: Wenn der Zähler $f(x)$ in dem Intervall $(\alpha, +\infty)$ und der Quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ in jedem beliebigen endlichen Theil (α, β) des nämlichen Intervalls $(\alpha, +\infty)$ integrirbar ist, so eignet sich auch $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ von α bis ∞ zur Integration, falls wenigstens von einem gewissen, endlichen Werth x' von x bis zur Unendlichkeit der Nenner $\varphi(x)$ sich stets von Null um mehr als eine bestimmte Grösse λ entfernt hält und entweder die Bedingung erfüllt ist, dass der Zähler $f(x)$ auch bei der Reduction auf seine Absolutwerthe integrirbar bleibe oder dass von x' aufwärts der Zähler

$f(x)$ seinem Absolutwerth nach eine endliche Zahl niemals überrage und der Nenner keine Schwankungen mache.

---

§ 247. Auf gleiche Weise behalten die Ergebnisse in § 190, 17, 18 und 19, die bereits in § 230 auf Functionen ausgedehnt wurden, die in einem endlichen Integrationsintervall auf die dort geschilderte Weise unendlich gross werden, ihre Gültigkeit auch dann, wenn das Integrationsgebiet unendlich gross wird, wobei freilich ebenso wie in § 230 für das Ergebniss (17) vorauszusetzen ist, dass die dort $\varphi(x)$ genannte Function in dem betrachteten Interva'l integrirbar bleibt, auch wenn sie durch ihre Absolutwerthe ersetzt wird.

---

§ 248. Auch die Resultate 7 und 8 des § 190 können mit gewissen Einschränkungen auf den Fall ausgedehnt werden, dass die Function $f(x)$ stets endlich bleibt, aber das Integrationsintervall unendlich gross wird. Um jedoch diese Ausdehnung streng durchführen zu können, ist es nöthig, zuerst die Frage zu entscheiden, ob und unter welchen Umständen die Definition, die wir bei endlichen Integrationsintervallen für die bestimmten Integrale aufgestellt haben, auf Integrale zwischen unendlich weit von einander entfernten Grenzen angewandt werden kann. Das heisst also, es ist zu ermitteln, ob das Integral

$$\int_\alpha^\infty f(x)dx,$$

wenn man sich das unendlich grosse Intervall $(\alpha, +\infty)$ in eine unendlich grosse Anzahl von Theilintervallen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, \ldots$ zerlegt denkt, als Grenzwerth der Summe der Reihe

$$\sum_1^\infty \delta_s f_s$$

aufgefasst werden kann, in welcher f_s wie bisher eine Zahl bedeutet, die zwischen der unteren und oberen Grenze der

Werthe der Function in den zugehörigen Intervallen δ_s liegt (diese Grenzen eingeschlossen) und vorausgesetzt, dass der gedachte Grenzwerth in der Art gebildet wird, dass man die Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ nach einem durchaus willkürlichen Gesetz unbeschränkt gegen Null abnehmen lässt.

In der That würde die so gewonnene Definition der bestimmten Integrale

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$$

an sich nicht mit derjenigen Begriffsbestimmung zusammenfallen, von der wir bisher Gebrauch gemacht haben, und es bedarf daher zweifellos einer Entscheidung der Frage, ob diese beiden Definitionen mit einander verträglich sind. Wir fügen hinzu:

Wenn man mit β eine endliche aber willkürlich grosse Zahl, mit $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ $n-1$ Werthe von x zwischen α und β und mit $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ die entsprechenden Intervalle $x_1 - \alpha, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, \beta - x_{n-1}$ bezeichnet, so gilt als Definition:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{\delta_s = 0} \sum_{1}^{n} \delta_s f_s,$$

worin f_s wieder die obige Bedeutung hat. Auf Grund der wahren Definition des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$$

folgt daher:

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta = \infty} \left[\lim_{\delta_s = 0} \sum_{1}^{n} \delta_s f_s \right].$$

Da nun auf der rechten Seite zuerst der Grenzwerth in Bezug auf die Grössen δ_s und dann derjenige bezüglich β zu bilden ist, so ist offenbar ersichtlich, dass das Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx,$$

wenigstens ohne einen geeigneten Beweis, nicht immer als der Grenzwerth der Summe der Reihe

$$\sum_1^n \delta_s f_s$$

für unbegrenzt abnehmende δ_s aufgefasst werden darf. Denn in dem letzteren Fall hat man zuerst den Grenzwerth in Bezug auf β (weil das Integrationsintervall von vorn herein als unendlich gross angenommen wird) und nachher erst denjenigen in Bezug auf die Intervalle δ_s zu bilden und kehrt auf diese Weise die Reihenfolge der Grenzübergänge um.

---

§ 249. Bei der Aufsuchung der Bedingungen, unter welchen die beiden genannten Definitionen des bestimmten Integrals

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$$

sich als gleichwerthig erweisen, unter welchen also die Gleichung gilt:

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \lim_{\delta_s = 0} \sum_1^\infty \delta_s f_s,$$

stellen wir die folgenden Sätze voran: Wenn die Function $f(x)$ zwischen α und ∞ immer endlich ist und die Summe

$$\sum_1^\infty \delta_s f_s,$$

falls man die $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ nach irgend einem *speciellen* bestimmten Gesetz bildet und sie gegen Null abnehmen lässt, einen bestimmten und endlichen Grenzwerth hat, alsdann ist die Function $f(x)$ zwischen α und ∞ integrirbar und der Grenzwerth der Summe stellt genau den Werth des Integrals

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$$

dar. Ferner: Die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass die (als convergent vorausgesetzte) Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \delta_s f_s$$

für ein gegebenes System *specieller* Werthe der δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ einen bestimmten und endlichen Grenzwerth habe, ist wieder in der bekannten Integrabilitätsbedingung

$$\lim \sum_{1}^{\infty} \delta_s D_s = 0$$

zu suchen, wenn man dieselbe in dem unendlich grossen Gebiet (α, ∞) auf jene besonderen Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ zur Anwendung bringt. Das heisst also, die Gleichung

$$(35) \qquad \int_{\alpha}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{\delta_s = 0} \sum_{1}^{\infty} \delta_s f_s$$

ist jedesmal dann durchaus gültig, wenn die rechte Seite einen bestimmten und endlichen Werth hat oder wenn die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \delta_s f_s,$$

wenigstens nachdem die δ_s hinreichend klein geworden sind, convergirt und gleichzeitig die bekannte Grösse

$$\sum_{1}^{\infty} \delta_s D_s$$

Null zum Grenzwerth hat. Dabei ist stets vorausgesetzt, dass die Zahlen f_s beliebig zwischen dem oberen und unteren Grenzwerth L_s und l_s der $f(x)$ in dem entsprechenden Intervall δ_s (mit Einschluss dieser Grenzen) gewählt werden, während es für die Intervalle δ_s ausreicht, wenn sie nach speciellen bestimmten Gesetzen, die aber beliebig sein können, gebildet werden.

Um diese Sätze zu beweisen, nehmen wir zunächst an, die Reihe

$$\sum_1^\infty \delta_s f_s$$

habe einen bestimmten und endlichen Grenzwerth A, wie auch die Werthe von f_s in den Intervallen δ_s beschaffen sein mögen. Diese Reihe ist dann, wenigstens wenn die δ_s hinreichend klein geworden sind, convergent und man erhält

$$\lim \sum_1^\infty \delta_s f_s = \lim \sum_1^\infty \delta_s l_s = \lim \sum_1^\infty \delta_s L_s = A,$$

also auch

$$\lim \sum_1^\infty \delta_s D_s = 0.$$

Bezeichnet man also mit n und n' zwei ganze Zahlen, die mit den Intervallen δ_s sich ändern und übrigens so bestimmt sind, dass δ_n das erste der Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ ist, dessen obere Grenze grösser als eine gewisse Zahl α_1 ist und $\delta_{n'}$ das letzte derselben Intervalle, dessen untere Grenze kleiner als eine andere Zahl β_1 $(\beta_1 > \alpha_1)$ ist, so erkennt man leicht, dass, da die Grössen $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ sämmtlich positiv sind, auch die Summe

$$\sum_n^{n'} \delta_s D_s$$

schliesslich, das heisst, wenn die $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ hinlänglich klein geworden sind, dauernd kleiner ausfallen wird, als eine beliebig kleine vorgeschriebene Grösse σ. Daraus folgt zunächst, dass sich die Function $f(x)$ in jedem beliebigen Intervall von endlicher Ausdehnung (α, β) zur bestimmten Integration eignet.

Es geht daraus weiter hervor (§ 190, 8), dass für jedes System von Werthen der Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ und wie auch n beschaffen sein möge, die Gleichung gilt:

$$\sum_1^n \delta_s f_s = \int_\alpha^{\alpha+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n} f(x)\,dx \qquad + k_n \sum_1^n \delta_s D_s,$$

wobei k_n eine zwischen -1 und 1 (-1 und 1 eingeschlossen)

liegende Zahl bedeutet. Man kann daher offenbar, wenn die δ_s so klein sind, dass stets

$$\sum_1^\infty \delta_s D_s < \sigma$$

ist, setzen:

$$(36)\quad \sum_1^n \delta_s f_s = \int_a^{a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n} f(x)\,dx + k_n'\sigma, \text{ wenn } -1 \leq k_n' \leq 1.$$

Andererseits hat man, da die Reihe

$$\sum_1^\infty \delta_s f_s$$

convergirt, auch:

$$\sum_1^\infty \delta_s f_s = \sum_1^n \delta_s f_s + \sum_{n+1}^\infty \delta_s f_s$$

oder:

$$\sum_1^n \delta_s f_s = \sum_1^\infty \delta_s f_s - \sum_{n+1}^\infty \delta_s f_s.$$

Und für jedes specielle Werthesystem der $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ wird eine Zahl m existiren, die von den Werthen der $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ abhängig, aber stets endlich und derart ist, dass für jeden hinter m nicht zurückbleibenden Werth von n die Summen

$$\sum_{n+1}^\infty \delta_s f_s$$

für die nämlichen Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ numerisch stets kleiner ausfallen als σ. Da man nun auch annehmen kann, diese $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ seien bereits so klein genommen, dass die entsprechende Summe

$$\sum_1^\infty \delta_s f_s$$

von A sich um weniger als σ unterscheidet, so folgt daraus, dass für jedes specielle System hinreichend kleiner Werthe der $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \ldots$ die Differenz

$$A - \int_{\alpha}^{\alpha+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n} f(x)\,dx$$

bei unbeschränkt wachsendem n numerisch dauernd kleiner als 3σ bleibt.

Wenn dagegen β irgend eine Zahl ist, die den Werth

$$\alpha + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_m$$

überragt, so kann man immer eine Zahl $n > m$ von der Beschaffenheit finden, dass die obere Grenze

$$\alpha + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n$$

des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n} f(x)\,dx$$

von β um weniger als δ_{n+1} differirt, so dass also das Integral selbst von

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

sich um weniger als die Grösse εL unterscheidet, wenn man unter L den oberen Grenzwerth der $f(x)$ zwischen α und ∞ versteht und ε so gewählt ist, dass keines der Intervalle δ_s es an Ausdehnung erreicht. Weil nun auch ε beliebig klein vorausgesetzt werden kann, so folgt, dass, wenn σ_1 eine willkürlich kleine gegebene Zahl ist, die Differenz

$$A - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

bei immer mehr wachsendem β schliesslich numerisch kleiner als diese Zahl σ_1 wird und dann auch dauernd bleibt. Die Function $f(x)$ eignet sich daher auch zwischen α und ∞ zur Integration und es ist

$$\lim_{\beta=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = A$$

oder

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim \sum_1^\infty \delta_s f_s .$$

Damit ist vorläufig ein Theil unseres Satzes bewiesen.

Um nun auch den anderen Theil zu beweisen, setzen wir voraus, man wüsste, dass, wenn die $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ nach einem gewissen, speciellen, bestimmten Gesetz gebildet sind, die Reihe

$$\sum_1^\infty \delta_s f_s ,$$

wenigstens nachdem die δ_s hinreichend klein geworden sind, stets convergirt und dass die Reihe

$$\sum_1^\infty \delta_s D_s$$

bei gegen Null abnehmenden $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ Null zum Grenzwerth hat.

Betrachtet man alsdann die beiden Reihen

$$\sum_1^\infty \delta_s f_s , \quad \sum_1^\infty \delta_s' f_s' ,$$

die zwei beliebigen hinreichend kleinen Werthsystemen der $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ entsprechen, welche die δ_s bei ihrer Abnahme gegen Null hin nach einander annehmen, so lässt sich offenbar eine Zahl m von der Beschaffenheit finden, dass für die so gewählten δ_s und δ_s' und für Werthe von n und n', die nicht hinter m zurückbleiben, die entsprechenden Summen

$$\sum_1^n \delta_s f_s , \quad \sum_1^{n'} \delta_s' f_s'$$

von den Summen S_δ, $S_{\delta'}$ der beiden Reihen

$$\sum_1^\infty \delta_s f_s , \quad \sum_1^\infty \delta_s' f_s'$$

bezüglich um weniger als irgend eine willkürliche Zahl σ abweichen. Man kann daher bei solchen n und n', die grösser als m sind, stets setzen:

$$S_\delta - S_{\delta'} = \sum_1^n \delta_s f_s - \sum_1^{n'} \delta_s' f_s' + 2 k_n \sigma,$$

wenn k_n eine zwischen -1 und 1 liegende Zahl ist.

Wir wollen nun die $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots, \delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_{n'}', \ldots$ sämmtlich kleiner als eine gegebene beliebig kleine Zahl ε und derart auswählen, dass die Summen

$$\sum_1^\infty \delta_s D_s, \quad \sum_1^\infty \delta_s' D_s'$$

beide kleiner als σ sind. Weiter wollen wir annehmen, die Zahlen n und n' seien nicht nur beide grösser als das m, welches zu jenen in Betracht gezogenen Werthen der $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots, \delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_{n'}', \ldots$ gehört, sondern auch so gewählt, dass die beiden Summen

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n, \quad \delta_1' + \delta_2' + \cdots + \delta_{n'}'$$

entweder einander gleich oder doch wenigstens um weniger als ε von einander verschieden seien.

Weil nun die Voraussetzung, dass

$$\lim \sum_1^\infty \delta_s D_s = 0$$

ist, wie oben gesagt, die Wirkung hat, dass die Function $f(x)$ sich zwischen zwei endlichen beliebigen Zahlen integriren lässt, so kann man die Formel (36) anwenden und erhält:

$$\sum_1^n \delta_s f_s = \int_\alpha^{\alpha + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n} f(x)\, dx + k_n' \sigma,$$

$$\sum_1^{n'} \delta_s' f_s' = \int_\alpha^{\alpha + \delta_1' + \delta_2' + \cdots + \delta_{n'}'} f(x)\, dx + k_n'' \sigma,$$

wobei k_n' und k_n'' zwischen -1 und 1 liegen. Daraus ist ersichtlich, dass die beiden Summen

$$\sum_1^n \delta_s f_s, \quad \sum_1^{n'} \delta_s' f_s'$$

sich um weniger als die Grösse $2\sigma + \varepsilon L$ von einander unterscheiden, vorausgesetzt, dass L die obere Grenze der Absolutwerthe der $f(x)$ zwischen α und ∞ ist. Somit differiren S_δ

und $S_{\delta'}$ um weniger als $4\sigma + \varepsilon L$; man kann also nach dem bekannten Satz über die Grenzwerthe § 22 offenbar schliessen, dass die Summen S_δ oder

$$\sum_1^\infty \delta_s f_s$$

einen bestimmten und endlichen Grenzwerth haben. Es ist daher, nach dem Beweis des ersten Theils des Satzes,

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \lim \sum_1^\infty \delta_s f_s\,.$$

Damit wäre also unser Satz vollständig bewiesen.

§ 250. Aus dem eben geführten Beweis geht durchaus nicht hervor, dass die Gleichung (35) jedesmal dann angewendet werden darf, wenn das Integral

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$$

einen bestimmten und endlichen Werth hat; er gestattet vielmehr nur den Schluss, dass die Gleichung gilt, wenn entweder für die in ihr enthaltenen Systeme von speciellen Werthen der $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ die Reihe

$$\sum_1^\infty \delta_s f_s$$

einen bestimmten und endlichen Grenzwerth hat oder, wenn nicht nur

$$\sum_1^\infty \delta_s f_s$$

convergirt, sondern auch

$$\sum_1^\infty \delta_s D_s$$

Null zum Grenzwerth hat.

Dieses Resultat lässt sich jedoch noch vervollständigen, da man beweisen kann: Wenn die Function $f(x)$ zwischen α und ∞ numerisch immer kleiner als eine endliche

Zahl ist und das Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$$

einen bestimmten und endlichen Werth hat, so lassen sich die Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ immer auf unendlich viele verschiedene Arten so herstellen, dass, falls man sie, unter steter Beibehaltung desselben Bildungsgesetzes, gegen Null convergiren lässt, die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \delta_s D_s$$

zum Grenzwerth Null hat und die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \delta_s f_s$$

stets convergirt und also das Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$$

zum Grenzwerth hat.

Man bilde in der That die unendlich vielen Intervalle, deren Endpunkte mit den aufeinander folgenden Punkten

$$\alpha,\ \alpha + d,\ \alpha + 2d, \ldots,\ \ \alpha + rd,\ \alpha + (r+1)d, \ldots$$

zusammenfallen, wobei d eine beliebige positive und endliche Zahl ist. Wenn dann, wie wir vorausgesetzt haben, $f(x)$ immer endlich ist und das Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$$

einen bestimmten und endlichen Werth hat, oder auch allgemeiner, wenn $f(x)$ endlich und in jedem beliebigen Intervall integrirbar ist, so ist die Function $f(x)$ auch in jedem der endlichen Intervalle

$$(\alpha,\ \alpha + d),\ \ (\alpha + d,\ \alpha + 2d), \ldots,\ \ [\alpha + rd,\ \alpha + (r+1)d], \ldots$$

der Integration fähig. Man kann daher augenscheinlich eine von Null verschiedene und derartige Zahl ε_1 finden, dass,

wenn man das Intervall $(\alpha, \alpha + d)$ auf irgend eine Art in Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{m_1}$, die kleiner als ε_1 sind, zerlegt, die entsprechende Summe

$$\sum_1^{m_1} \delta_s D_s$$

beständig hinter einer positiven beliebig kleinen Zahl σ_1 zurückbleibt. Aehnlich lässt sich eine ebenfalls von Null verschiedene Zahl ε_2 so finden, dass, wenn man das folgende Intervall $(\alpha + d, \alpha + 2d)$ auf beliebige Art in die Theilintervalle $\delta_{m_1+1}, \delta_{m_1+2}, \ldots, \delta_{m_2}$ zerlegt, die sämmtlich kleiner als ε_2 sind, die entsprechende Summe

$$\sum_{m_1+1}^{m_2} \delta_s D_s$$

immer hinter σ_1^2 zurückbleibt. Und allgemein kann man dem Intervall

$$[\alpha + rd, \alpha + (r+1)d]$$

eine von Null verschiedene Zahl ε_{r+1} in der Weise zuordnen, dass für jede Zerlegung $(\delta_{m_r+1}, \delta_{m_r+2}, \ldots, \delta_{m_{r+1}})$ dieses Intervalls, deren Theilintervalle kleiner als ε_{r+1} sind, die correspondirende Summe

$$\sum_{m_r+1}^{m_{r+1}} \delta_s D_s$$

beständig kleiner als σ_1^{r+1} ausfällt. Für das so gewonnene System

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{m_1}, \delta_{m_1+1}, \delta_{m_1+2}, \ldots, \delta_{m_2}, \ldots$$

der Intervalle δ_s wird immer, welches auch der Werth der ganzen Zahl p sein mag, die Ungleichung

$$\sum_1^p \delta_s D_s < \sigma_1 + \sigma_1^2 + \cdots,$$

das heisst

$$\sum_1^p \delta_s D_s < \frac{\sigma_1}{1 - \sigma_1}$$

erfüllt sein, da σ_1 nicht nur kleiner als die Einheit, sondern so klein wie man nur will, angenommen werden kann. Beachtet man dann, dass die Reihe

$$\sum_1^\infty \delta_s D_s$$

auf solche Weise gebildet wird, dass die Summe einer beliebigen Anzahl von Gliedern, die z. B. auf das m_r^{te} folgen, stets kleiner als eine Zahl $\frac{\sigma_1^{r+1}}{1-\sigma_1}$ ausfällt, die bei hinreichend grossem r kleiner als irgend eine beliebige Zahl gemacht werden kann; oder beachtet man, dass die Reihe selbst aus positiven Gliedern besteht und die Summe einer beliebigen Anzahl ihrer ersten Glieder niemals $\frac{\sigma_1}{1-\sigma_1}$ überragt, so schliesst man, dass die Reihe für die erwähnten Werthe der $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots$ stets convergirt und dass ihre Summe, da sie stets hinter $\frac{\sigma_1}{1-\sigma_1}$ zurückbleibt, Null zum Grenzwerth hat, wenn man die δ_s nach dem oben angegebenen Bildungsgesetz unbeschränkt abnehmen lässt. Damit wäre denn vor der Hand bewiesen, dass, wenn $f(x)$ in dem ganzen Intervall (α, ∞) endlich und integrirbar ist, oder wenn sie dieses auch nur in jedem in diesem Intervall enthaltenen Theilintervall ist, man stets unendlich viele Werthsysteme $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ finden kann, für welche die Beziehung gilt

$$\lim \sum_1^\infty \delta_s D_s = 0 .$$

Nachdem so die Existenz dieser Werthsysteme der δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ erwiesen ist, wollen wir nun ein beliebiges dieser Systeme oder allgemeiner noch ein beliebiges Werthsystem in Betracht ziehen, für welches die Summe

$$\sum_1^\infty \delta_s D_s$$

convergirt. Aus der zugehörigen Reihe

$$\sum_1^\infty \delta_s f_s$$

heben wir eine beliebige Anzahl

$$\sum_{p+1}^q \delta_s f_s$$

von Gliedern heraus, die auf das p^{te} folgen.

Wenn dann k' zwischen -1 und 1 (-1 und 1 eingeschlossen) liegt, so ist:

$$\sum_{p+1}^{q} \delta_s f_s = \int_{\alpha+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_p}^{\alpha+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_q} f(x)\,dx + k' \sum_{p+1}^{q} \delta_s D_s .$$

Falls in dieser Gleichung p hinreichend gross ist, so fällt für jedes beliebige q die Summe

$$\sum_{p+1}^{q} \delta_s D_s$$

kleiner aus als jede willkürliche Zahl und dasselbe gilt auch von dem in ihr auftretenden Integral, wenn man sich der Voraussetzung erinnert, dass $f(x)$ zwischen α und ∞ endlich und integrirbar sein soll, insofern es weiter nichts als ein singuläres bestimmtes Integral in Bezug auf die Function $f(x)$ vorstellt. Die Summen einer beliebigen Anzahl von Gliedern, die auf das p^{te} Glied der Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \delta_s f_s$$

folgen, bleiben daher offenbar hinter einer willkürlichen vorgeschriebenen Zahl zurück, wenn nur p gehörig gross ist. Daraus folgt aber, dass, wenn $f(x)$ stets endlich ist und das Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$$

einen bestimmten und endlichen Werth hat und wenn dann die δ_s so gewählt werden, dass die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \delta_s D_s$$

convergirt, auch die denselben Werthen der δ_s entsprechende Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \delta_s f_s$$

convergent sein wird.

Dies genügt nach dem vorigen Satz, um auch behaupten zu können, dass die Reihe

$$\sum_1^\infty \delta_s f_s$$

einen bestimmten Grenzwerth hat, wenn die $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ in Gemässheit eines und desselben Bildungsgesetzes für alle aufeinander folgenden Stadien gegen Null abnehmen und dass jener Grenzwerth genau das Integral

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$$

wiedergiebt. Damit wäre der obige Satz nunmehr vollständig bewiesen.

---

§ 251. Die vorstehende Beweisführung schliesst nicht aus, dass die in ihr vorkommenden Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, \ldots$ eine Reihe absteigender Zahlen bilden und dass sie selbst der Null zustreben können. Ist das letztere der Fall, so lässt sich nicht mehr eine Zahl ε finden, die von Null verschieden, positiv und so beschaffen ist, dass für jedes System von Theilintervallen δ_s, deren Individuen kleiner als ε sind, beständig

$$\sum_1^\infty \delta_s D_s < \sigma$$

ist etc. Das heisst, wenn es sich um Integrationsintervalle von unendlich grosser Ausdehnung handelt, kann, auch wenn das Integral

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$$

bestimmt und endlich ist, keineswegs behauptet werden, dass die Summe

$$\sum_1^\infty \delta_s D_s$$

für jedes beliebige System von Intervallen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ den Grenzwerth Null ergebe. Dazu kommt, dass die Bedingung

$$\lim \sum_1^\infty \delta_s D_s = 0$$

bei unendlich grossen Integrationsintervallen nicht länger ausreicht, um die Integrabilität der entsprechenden Function $f(x)$ zwischen α und ∞ zu verbürgen, so lange wenigstens nicht, als die Existenz der Gleichung

$$\sum_1^\infty \delta_s D_s = 0$$

nur für eine Anzahl specieller Systeme von Intervallen δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ nachgewiesen ist. Vielmehr zeigen die vorhergehenden Lehrsätze, dass, um das Integral

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$$

zu einem bestimmten und endlichen zu machen, zu jener Bedingung immer noch die weitere Forderung hinzutreten muss, dass die entsprechende Reihe

$$\sum_1^\infty \delta_s f_s$$

auch ihrerseits einen bestimmten und endlichen Grenzwerth habe oder wenigstens convergire etc. Uebrigens haben wir ja auch beim Beweis des vorigen Satzes gesehen, dass immer specielle Systeme von Intervallen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ existiren, für welche die Bedingung

$$\lim \sum_1^\infty \delta_s D_s = 0$$

erfüllt ist, auch wenn die Function zwar in jedem beliebigen endlichen Intervall integrirbar ist, es aber in dem unendlich grossen Intervall nicht zu sein braucht. Wir befinden uns daher mit Rücksicht auf das in § 184 Gesagte einem tiefgreifenden Unterschied zwischen Integralen mit endlichen und solchen mit unendlich grossen Grenzen gegenüber, den wir jetzt näher besprechen wollen.

---

§ 252. Zu diesem Zweck lässt sich nun auf Grund der Beweisführung des vorigen Lehrsatzes die folgende Bemerkung machen: Wenn das Integral

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

einen bestimmten und endlichen Werth hat, so ist für alle diejenigen Systeme von Intervallen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$, für welche die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \delta_s D_s$$

convergirt, auch die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \delta_s f_s$$

convergent. Und wie man für jeden beliebigen endlichen Werth von n die Gleichung hat:

$$\sum_{1}^{n} \delta_s f_s = \int_{a}^{a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n} f(x)\,dx + k_n' \sum_{1}^{n} \delta_s D_s$$

$$(-1 \leqq k_n' < 1),$$

so ist auch im vorliegenden Fall:

$$\sum_{1}^{\infty} \delta_s f_s = \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx + k_0 \sum_{1}^{\infty} \delta_s D_s, \tag{37}$$

wobei unter k_0 eine andere bestimmte Zahl verstanden ist, die zwischen -1 und 1 liegt (-1 und 1 eingeschlossen).

Wenn zugleich

$$\lim \sum_{1}^{\infty} \delta_s D_s = 0$$

ist, so hat man auch:

$$\lim \sum_{1}^{\infty} \delta_s f_s = \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Ist man dagegen, wenn für gewisse Systeme von Intervallen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$

$$\lim \sum_{1}^{\infty} \delta_s D_s = 0$$

ist, darüber im Ungewissen, ob das Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$$

bestimmt und endlich ist oder nicht, weiss man aber, dass für dieselben speciellen Systeme der $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \delta_s f_s$$

convergirt, alsdann kann man nach dem Lehrsatz in § 249 behaupten, dass das Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$$

bestimmt und endlich ist, womit man wieder auf die obige Gleichung (37) kommt.

---

§ 253. Zur Vervollständigung der gewonnenen Resultate scheint es angezeigt, den Zusatz zu machen: W e n n d i e F u n c t i o n $f(x)$ i n j e d e m b e l i e b i g e n e n d l i c h e n I n t e r v a l l i n t e g r i r t w e r d e n k a n n u n d v o n e i n e m g e w i s s e n W e r t h v o n x a n b i s z u r U n e n d l i c h k e i t i n d e n j e n i g e n P u n k t e n, i n w e l c h e n s i e n i c h t N u l l i s t, s t e t s d a s s e l b e, z. B. d a s p o s i t i v e V o r z e i c h e n h a t, a l s d a n n i s t j e d e s m a l, w e n n d a s I n t e g r a l

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$$

u n e n d l i c h g r o s s i s t, a u c h d i e R e i h e

$$\sum_{1}^{\infty} \delta_s f_s$$

u n e n d l i c h g r o s s o d e r s t r e b t w e n i g s t e n s d e m G r e n z w e r t h ∞ z u, w e n n d i e δ_s n a c h i r g e n d e i n e m G e s e t z g e b i l d e t w e r d e n u n d u m g e k e h r t.

Wenn in der That die Function $f(x)$ von einem gewissen Werth x' von x an bis zur Unendlichkeit positiv oder Null ist und das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

für $\beta = \infty$ zum Grenzwerth ∞ hat, so bedeutet dies so viel als, dass bei immer kleiner werdenden $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ die Summen

$$\sum_1^n \delta_s f_s,$$

in denen δ_n das letzte der Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ ist, dessen unteres Ende nicht über β hinausgeht, schliesslich grösser ausfallen, als jede gegebene Grösse, und dass die Complementärsummen

$$\sum_{n+1}^{\infty} \delta_s f_s,$$

da sie aus positiven Gliedern bestehen, jene Summen noch vergrössern. Es gilt daher die Gleichung

$$\sum_1^{\infty} \delta_s f_s = \infty$$

oder wenigstens

$$\lim \sum_1^{\infty} \delta_s f_s = \infty.$$

Ist umgekehrt bei jedem beliebigen Werthsystem der δ_s die Reihe

$$\sum_1^{\infty} \delta_s f_s$$

unendlich gross oder hat ∞ zum Grenzwerth, so ist zunächst zu beachten, dass das letztere auch dann stattfindet, wenn man jene Werthsysteme der δ_s nimmt, für welche

$$\lim \sum_1^{\infty} \delta_s D_s = 0$$

wird und deren Existenz zu Anfang des § 250 nachgewiesen wurde. Man wird daher auch für diese Werthsysteme der δ_s eine derartige Zahl n finden können, dass die Summe

$$\sum_1^n \delta_s f_s$$

grösser als irgend eine verlangte Zahl ausfällt, während die Zahl $\alpha + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n$ grösser als x' ist.

Alsdann aber ist, da auch hier die Gleichung

$$(38) \qquad \sum_1^n \delta_s f_s = \int_\alpha^{\alpha+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n} f(x)\,dx + k_n' \sum_1^n \delta_s D_s$$

besteht, in welcher k_n' die bekannte zwischen -1 und 1 (-1 und 1 eingeschlossen) liegende Zahl ist, das Integral auf der rechten Seite auch selbst grösser als jede beliebige gegebene Zahl und da von x' an die Function $f(x)$ immer positiv bleibt, so wird das Integral diese Eigenschaft behalten, auch wenn an Stelle seiner oberen Grenze eine noch grössere Zahl gesetzt wird. In diesem Fall kommt man daher nothgedrungen zu dem Schluss, dass

$$\lim \int_\alpha^\zeta f(x)\,dx = \infty$$

ist. Damit wäre der Satz vollständig bewiesen.

§ 254. Als specielle Ergänzung des Satzes in § 250 lässt sich hinzufügen: Wenn die Function $f(x)$ in jedem beliebigen endlichen Intervall integrirbar ist, das Integral

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$$

aber unendlich gross oder unbestimmt ist, so giebt es nothwendig Werthsysteme der δ_s, für welche die Reihe

$$\sum_1^n \delta_s f_s$$

nicht nur ∞ zum Grenzwerth hat oder überhaupt eines bestimmten Grenzwerthes entbehrt, sondern auch vor Eintritt in den Grenzzustand unendlich gross, bezüglich unbestimmt wird. Denn wenn die δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ so gewählt werden, dass

$$\sum_1^\infty \delta_s D_s < \sigma,$$

was, wie wir wissen, immer geschehen kann, so liefert die Formel (38) für diese Werthe der $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$

$$\sum_1^n \delta_s f_s = \int_\alpha^{\alpha+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n} f(x)\,dx + k_n''\sigma, \tag{39}$$

$$(-1 \leq k_n'' \leq 1).$$

Wenn daher

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \infty$$

und man zur Grenze für $n = \infty$ übergeht, so erhält man offenbar

$$\lim \sum_1^n \delta_s f_s = \infty.$$

Wenn ferner das Integral

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$$

nicht bestimmt ist, dann wird

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

bei unbeschränkt wachsendem β schliesslich zwischen zwei Grenzwerthen hin und her schwanken, die endlich sind oder von denen wenigstens der eine unbeschränkt wächst. Es mag daher β so gross werden, als es will, das Integral wird stets auch Werthe annehmen, die um mehr als eine gewisse Grösse d, die über 2σ hinausgeht, von einander entfernt sind. Ferner kann, wenn die δ_s schon kleiner als ε geworden sind, die obere Grenze des Integrals

$$\int_\alpha^{\alpha+\delta_1+\cdots+\delta_n} f(x)\,dx$$

bei unbegrenzt wachsendem n einer beliebig grossen Zahl β

so nahe gebracht werden, wie man will und dieses Integral ist daher von

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

um weniger als εL verschieden, wenn L die obere Grenze der Absolutwerthe der $f(x)$ zwischen α und ∞ ist. Daraus folgt nach Gleichung (39), dass die Summe

$$\sum_{1}^{\infty} \delta_s f_s$$

im vorliegenden Fall stets unbestimmt bleibt, während die δ_s nach dem gewählten Gesetz unbegrenzt gegen Null abnehmen. Damit wäre die genannte Eigenschaft vollständig nachgewiesen.

Hat das Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$$

keinen bestimmten und endlichen Werth, obgleich $f(x)$ in jedem beliebigen Intervall endlich und integrirbar ist, so muss, wie noch auf Grund des ersten Theils des in § 249 bewiesenen Satzes hinzugefügt werden mag, die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \delta_s f_s$$

einen unendlich grossen Grenzwerth haben oder sie muss auch für diejenigen Werthsysteme der $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$, für welche sie vor Eintritt in den Grenzzustand convergirt, durchaus ohne Grenzwerth sein.

---

§ 255. Hiermit haben die Fragen, die im § 248 in Bezug auf die Definition von Integralen aufgeworfen wurden, die sich auf Intervalle von unendlich grosser Ausdehnung erstrecken, ihre Beantwortung gefunden. Zugleich enthalten die vorstehenden Ausführungen diejenigen Erweiterungen der Sätze 7 und 8 des § 190, von denen zu Anfang eben jenes § 248 die Rede war.

Tragen wir nämlich diesen Sätzen 7 und 8 und ebenso

der Gleichung (37) Rechnung, die, wie bereits hervorgehoben, falls das Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$$

einen bestimmten und endlichen Werth hat, immer gilt, wenn auch nicht für alle Werthsysteme der $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$, so doch für solche, die in Gemässheit bestimmter Gesetze gebildet wurden, so können wir ohne Weiteres schliessen: Wenn $f(x)$ zwischen α und ∞ endlich und integrirbar ist und man mit $k_1, k_2, \ldots, k_\delta$ bestimmte zwischen -1 und 1 liegende Zahlen versteht (-1 und 1 eingeschlossen), so gelten die folgenden Gleichungen

$$\delta_1 f_1 = \int_{\alpha}^{\alpha+\delta_1} f(x)\,dx + k_1 \sum_1^{\infty} \delta_s D_s,$$

$$\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 = \int_{\alpha}^{\alpha+\delta_1+\delta_2} f(x)\,dx + k_2 \sum_1^{\infty} \delta_s D_s,$$

. . . .

$$\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 + \delta_3 f_3 + \cdots = \sum_1^{\infty} \delta_s f_s = \int_{\alpha}^{\infty} f(x) + k_\delta \sum_1^{\infty} \delta_s D_s$$

stets dann, wenn die $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ ein Werthsystem bilden, für welches die Reihe

$$\sum_1^{\infty} \delta_s D_s$$

convergirt; und von solchen Werthsystemen der $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ existirt eine unendlich grosse Anzahl. Dies ist aber offenbar die gedachte Erweiterung der Sätze 7 und 8 des § 190.

---

§ 256. Um nun auch den Theoremen in § 191 und den folgenden eine grössere Ausdehnung zu geben, betrachten wir in Zukunft $+\infty$ und $-\infty$ als specielle Werthe von x, für welche eine Function $f(x)$ einen bestimmten endlichen oder

unendlich grossen Werth haben kann, den wir bezüglich mit $f(\infty)$ oder $f(-\infty)$ bezeichnen wollen; und es soll eine in einem unendlich grossen Intervall gegebene Function $f(x)$ als continuirlich für $x = \infty$ oder für $x = -\infty$ gelten, wenn die Grenze ihrer Werthe für $x = \infty$ oder für $x = -\infty$ bestimmt ist, mag dieser Grenzwerth endlich oder unendlich gross sein; und eben dieser Grenzwerth sei durch $f(\infty)$ oder $f(-\infty)$ bezeichnet.

Alsdann lassen sich mit unbedeutenden Aenderungen in der Formulirung die in den §§ 43 u. d. folg. besprochenen Eigenschaften von Functionen, die in einem endlichen Intervall endlich und stetig sind, auch auf solche ausdehnen, die es in einem unendlich grossen Intervall sind. Ein Gleiches gilt von den Eigenschaften, die in dem elften und zwölften Kapitel in Bezug auf die Derivirten und die Ableitungen entwickelt wurden. Was speciell den Satz in § 149 angeht, so findet man leicht, wenn es sich z. B. um das Intervall $(\alpha, +\infty)$ handelt und eine der Derivirten für $x = +\infty$ einen bestimmten (endlichen oder unendlich grossen) Grenzwerth hat, dass alsdann dasselbe auch von den anderen Derivirten gilt. Denn wenn z. B. dieser Grenzwerth endlich und $= A$ ist und man unter β eine hinreichend grosse und unter γ eine beliebige positive Zahl versteht, so differiren zwischen β und $\beta + \gamma$ die sämmtlichen Derivirten so wenig, wie man nur will, von A (§ 146) und haben daher A zum Grenzwerth. Analog der für endliche x eingeführten Bezeichnungsweise wollen wir, falls eine der Derivirten einer endlichen und stetigen Function $f(x)$ oder ihre rechts- oder linksseitigen Ableitungen, sofern sie überhaupt existiren, für $x = \infty$ einen bestimmten Grenzwerth haben, diesen Werth die Derivirte der $f(x)$ für $x = \infty$ nennen.

---

§ 257. Nach Einführung dieser Definitionen lässt sich nun aus § 231 und der Begriffsbestimmung von Integralen, die sich über Intervalle von unendlich grosser Ausdehnung erstrecken, unmittelbar ableiten: Wenn die Function $f(x)$ zwischen α und ∞ oder α und $-\infty$ oder $-\infty$ und ∞ integrirbar ist, so sind die Integrale

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx,$$

als Functionen von x betrachtet, für alle Werthe von x, die in die entsprechenden Intervalle (α, ∞), $(-\infty, \alpha)$, $(-\infty, \infty)$ fallen und speciell auch für $x = \infty$ oder $= -\infty$ endliche und stetige Functionen.

Beachtet man z. B. das Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$$

und setzt

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx,$$

so hat man, wie leicht zu sehen, für endliche Werthe von x bei hinreichend kleinem h

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h}\right| = \Theta_{x,h},$$

wobei $\Theta_{x,h}$ eine zwischen dem oberen und unteren Grenzwerth der $f(x)$ im Intervall $(x, x+h)$ liegende Zahl bedeutet. Es sind deshalb die Derivirten, z. B. die rechtsseitigen der $F(x)$, im Punkt x zwischen Zahlen enthalten, innerhalb deren $f(x)$ variirt, wenn die Variable sich von x nach einem willkürlich nahen rechtsseitigen Punkt $x + h$ bewegt. Daraus folgt unmittelbar: Wenn $f(x)$ zwischen α und ∞ integrirbar und für $x = \infty$ endlich und stetig ist, so ist das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$$

nicht nur eine endliche und stetige Function von x für alle Werthe von x zwischen α und ∞ (∞ eingeschlossen), sondern auch von der Beschaffenheit, dass seine Derivirte bestimmt und $= f(\infty)$ auch für $x = \infty$ ist. Damit ist auch jene Eigenschaft der bestimmten Integrale

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx,$$

welche ihnen in allen Punkten a, in denen $f(x)$ stetig ist u. s. w. (§ 232), als Derivirte die $f(a)$ zuweist, auf alle nur denkbaren Fälle ausgedehnt.

---

§ 258. Auch von dem Satz in § 233 kann man, wenn man z. B. wieder das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$$

zu Grunde legt, die folgende Erweiterung geben: Wenn eine Function $f(x)$ in jedem beliebigen endlichen Theil des Intervalls (α, ∞) integrirbar ist, und wenn zugleich $F(x)$ eine Function bezeichnet, die für alle Werthe von x in diesem Intervall, auch $x = \infty$ nicht ausgeschlossen, endlich und stetig ist, und für alle endlichen Werthe von x das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$$

bis auf eine Constante darstellt, derart dass

$$F(x) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx, \tag{40}$$

alsdann ist die Function $f(x)$ auch in dem unendlich grossen Intervall (α, ∞) integrirbar und die Gleichung (40) gilt auch für $x = \infty$, so dass also

$$(F\infty) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$$

ist. Denn offenbar, da die Gleichung (40) für alle endlichen Werthe von x besteht, und da die linke Seite für $x = \infty$ einen bestimmten und endlichen Grenzwerth $F(\infty) - F(\alpha)$

hat, gilt das Gleiche auch für die rechte Seite. Es hat daher das Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$$

einen bestimmten und endlichen Grenzwerth, der eben jener Werth $F(\infty) - F(\alpha)$ ist.

---

§ 259. Dieser Satz kann manchmal mit Vortheil angewendet werden, wenn es sich um die Entscheidung der Frage handelt, ob eine Function $f(x)$, die in jedem endlichen Theil eines unendlich grossen Intervalls (α, ∞) integrirbar ist, sich auch in dem ganzen Intervall (α, ∞) zur Integration eignet. Er setzt uns offenbar auch in den Stand, zu behaupten: Wenn eine Function $f(x)$ zwischen α und ∞ (∞ eingeschlossen) endlich und stetig verläuft und in jedem in endlicher Entfernung liegenden Punkt x z. B. eine rechtsseitige bestimmte Ableitung d_x oder auch nur eine Derivirte λ_x besitzt, welche mit den Eigenschaften ausgestattet ist, die (§§ 234 u. flg.) erforderlich sind, damit für jeden endlichen Werth von x

$$f(x) - f(\alpha) = \int_{\alpha}^{x} d_x dx \quad \text{oder} \quad f(x) - f(\alpha) = \int_{\alpha}^{x} \lambda_x \lambda x \qquad (41)$$

sei, *alsdann* hat man auch

$$f(\infty) - f(x) = \int_{\alpha}^{\infty} d_x dx \quad \text{oder} \quad f(\infty) - f(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \lambda_x dx,$$

das heisst die Gleichung (41) besteht auch für $x = \infty$.

---

§ 260. Durchaus ähnliche Betrachtungen, wie wir sie in den §§ 197, 198, 199 und 238 für endliche Integrationsintervalle gemacht haben, lassen sich jetzt auch für unendlich grosse Integrationsgebiete anstellen. So können wir, wenn wir zusammenfassen, behaupten: Was in Bezug auf die Integrabilität in einem endlichen oder unendlich

grossen Intervall für die rechtsseitigen Ableitungen oder allgemeiner für eine Derivirte einer Function gilt, die in dem betreffenden Intervall endlich und stetig ist, gilt auch für die linksseitigen Ableitungen (wenn sie existiren) oder für die übrigen Derivirten. Und dieses ist auch dann der Fall, wenn die betreffende Derivirte oder Ableitung nicht immer endlich ist, wobei freilich, wie früher, vorausgesetzt werden muss, dass diese Grössen in dem gegebenen Intervall oder in jedem endlichen Theil desselben (wenn es unendlich gross ist), falls sie unendlich gross werden, es nur in Punktmengen der ersten Gattung werden.

Man kann hinzufügen: Wenn eine der Derivirten einer endlichen und stetigen Function in dem endlichen oder unendlich grossen Intervall, in welchem sie in Betracht kommt, Null zum Integral hat (wobei diese Derivirte endlich, oder in den bekannten Punktmengen erster Gattung unendlich gross ist), so gilt dies auch von den übrigen Derivirten und die Function ist stets constant. Und: Wenn zwei endliche und stetige Functionen in einem gegebenen endlichen oder unendlich grossen Intervall so beschaffen sind, dass eine der Derivirten der ersten und ebenso eine der zweiten Function sich zur Integration eignen (gleichviel ob sie endlich oder in der bekannten Weise unendlich gross sind) und entweder einander gleich sind, oder höchstens um eine Function vom Integral Null von einander abweichen, so sind die beiden Functionen einander gleich oder differiren nur um eine constante Grösse.

Ferner lässt sich sagen: Wenn eine endliche oder unendlich grosse Function $f(x)$ in dem endlichen oder unendlich grossen Intervall, in welchem sie in Betracht kommt, integrirbar ist, so reducirt sich die Aufsuchung der Integralfunction $F(x)$, für welche die Gleichung gilt:

$$F(x) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$$

stets auf die Ermittlung einer endlichen und stetigen Function, deren eine Derivirte der $f(x)$ gleichkommt oder um eine Function vom Integral Null von ihr abweicht. Dieser allgemeinste Satz überträgt offenbar die in den Lehrbüchern gebräuchliche Definition der Integrale auf alle integrirbaren Functionen, ersetzt dabei aber die Ableitung der Integralfunction durch ihre Derivirten u. s. w.

---

§ 261. Versucht man das Theorem in § 204 zu erweitern, so kommt man zu dem Satz: Wenn unter der Voraussetzung eines endlichen α, oder für $\alpha = -\infty$, die Function $f(x)$ zwischen α und ∞ endlich und integrirbar ist, und wenn für jeden endlichen Werth von x, der α überragt, die Ungleichung

$$a < \int_\alpha^x f(x)\,dx < A$$

gilt, wenn ferner $\varphi(x)$ eine andere Function von x bezeichnet, die von α bis ∞ immer positiv und endlich ist und niemals wächst, alsdann eignet sich die Function $f(x)\varphi(x)$ zwischen α und ∞ zur Integration (§ 245) und man hat:

$$a\varphi(\alpha) \leqq \int_\alpha^\infty f(x)\varphi(x)\,dx \leqq A\varphi(\alpha) \tag{42}$$

für jeden zwischen α und ∞ gelegenen Werth von x (α und ∞ eingeschlossen).

Setzt man nämlich zunächst voraus, α sei endlich und beachtet, dass für jeden endlichen Werth von x (§ 204)

$$a\varphi(\alpha) < \int_\alpha^x f(x)\varphi(x) < A\varphi(\alpha)$$

und dass das Integral

$$\int_\alpha^\infty f(x)\varphi(x)$$

einen bestimmten und endlichen Werth hat (§ 245), so ist

ersichtlich, dass das letztere höchstens einem der Grenzwerthe $a\varphi(\alpha)$, $A\varphi(\alpha)$ gleichkommen, aber niemals aus dem von ihnen eingeschlossenen Gebiet heraustreten kann. Für ein endliches α gilt also die Formel (42).

Ist ferner $\alpha = -\infty$ und setzt man wieder

$$a < \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx < A,$$

so erhält man für jeden positiven und endlichen übrigens beliebig grossen Werth von β, und für jeden endlichen Werth von x, der $-\beta$ überragt,

$$a - \int_{-\infty}^{-\beta} f(x)\,dx < \int_{-\beta}^{x} f(x)\,dx < A - \int_{-\infty}^{-\beta} f(x)\,dx,$$

also auch (§ 204)

$$\left[a - \int_{-\infty}^{-\beta} f(x)\,dx\right] \varphi(-\beta) < \int_{-\beta}^{x} f(x)\varphi(x)\,dx <$$

$$< \left[A - \int_{-\infty}^{-\beta} f(x)\,dx\right] \varphi(-\beta),$$

und man kann, weil das Product $f(x)\varphi(x)$ sich zwischen $-\infty$ und ∞ zur Integration eignet, auch setzen

$$\left[a - \int_{-\infty}^{-\beta} f(x)\,dx\right] \varphi(-\beta) + \int_{-\infty}^{-\beta} f(x)\varphi(x)\,dx < \int_{-\infty}^{x} f(x)\varphi(x)\,dx <$$

$$< \left[A - \int_{-\infty}^{-\beta} f(x)\,dx\right] \varphi(-\beta) + \int_{-\infty}^{-\beta} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Weil nun das Integral

$$\int_{-\infty}^{-\beta} f(x)\,dx$$

für $\beta = \infty$ der Grenze Null zustrebt und zugleich $\varphi(-\beta)$ einen bestimmten und endlichen Grenzwerth $\varphi(-\infty)$ erreicht, und weil daher die beiden Werthe, zwischen welche

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)\varphi(x)\,dx$$

eingeschlossen ist, so wenig, wie man nur will, von $a\varphi(-\infty)$ bezüglich $A\varphi(-\infty)$ differiren, so gilt für jeden endlichen Werth von x die Ungleichung:

$$a\varphi(-\infty) < \int_{-\infty}^{x} f(x)\varphi(x)\,dx \leq A\varphi(-\infty).$$

Lässt man daher x durch positive Zahlwerthe hindurch unbeschränkt wachsen, so erhält man wieder die Formel (42), wenn man in ihr $\alpha = -\infty$ setzt.

---

§ 262. Aehnlicher Erweiterung sind die Sätze in den §§ 205, 206 und 207 fähig. Dehnt man jedoch speciell die Betrachtungen in den §§ 211 und 212 aus, so ergiebt sich: Wenn, α endlich oder $= -\infty$ vorausgesetzt, die Function $f(x)$ zwischen α und ∞ endlich und integrirbar ist und wenn, während x den Weg von α bis ∞ zurücklegt, die Function $\varphi(x)$ niemals negativ wird und niemals wächst, so besteht die Gleichung

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(\alpha)\int_{\alpha}^{x'} f(x)\,dx,$$

falls unter x' ein bestimmter Werth von x zwischen α und ∞ verstanden wird.

Daraus lässt sich dann mit Hülfe der Ausführungen in § 213 die Erweiterung der dort mitgetheilten Weierstrass'schen Formel auf Integrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\varphi(x)\,dx$$

ableiten, von denen die eine Grenze oder beide unendlich gross sind. Denn wenn $\beta = \infty$ und $\varphi(x)$ von α bis ∞ nirgends abnimmt, jedoch immer kleiner als eine endliche Zahl bleibt, so kann man sowohl wenn α endlich als wenn

31*

es $= -\infty$ ist, die vorstehende Gleichung in der Art anwenden, dass man $\varphi(\infty) - \varphi(x)$ statt $\varphi(x)$ setzt und erhält dann:

$$\int_\alpha^\infty f(x)[\varphi(\infty) - \varphi(x)]\,dx = [\varphi(\infty) - \varphi(\alpha)]\int_\alpha^{x'} f(x)\,dx$$

oder

$$\int_\alpha^\infty f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(\alpha)\int_\alpha^{x'} f(x)\,dx + \varphi(\infty)\int_{x'}^\infty f(x)\,dx,$$

worin x' wieder ein zwischen α und ∞ liegender Werth von x ist. Falls ferner die Function $\varphi(x)$ von α bis ∞ niemals wächst, jedoch absolut genommen nirgends eine endliche Zahl überschreitet, so liefert die Anwendung der gefundenen Gleichungen unter Verwandlung von $\varphi(x)$ in $\varphi(\alpha) - \varphi(x)$ die Relation:

$$\int_\alpha^\infty f(x)[\varphi(\alpha) - \varphi(x)]\,dx = [\varphi(\alpha) - \varphi(\infty)]\int_{x'}^\infty f(x)\,dx,$$

die sich wieder in die nämliche Gleichung

$$\int_\alpha^\infty f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(\alpha)\int_\alpha^{x'} f(x)\,dx + \varphi(\infty)\int_{x'}^\infty f(x)\,dx$$

umsetzen lässt. Daraus geht dann hervor, dass die im § 213 besprochene Weierstrass'sche Formel

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(\alpha)\int_\alpha^{x'} f(x)\,dx + \varphi(\beta)\int_{x'}^\beta f(x)\,dx$$

für jedes beliebige endliche oder unendlich grosse Intervall (α, β) ($\alpha = -\infty$ und $\beta = \infty$ eingeschlossen) in Geltung bleibt, vorausgesetzt, dass die Function $f(x)$ von α bis β endlich und der Integration fähig ist und $\varphi(x)$ numerisch stets kleiner bleibt als eine endliche Zahl und entweder nirgends wächst oder nirgends abnimmt.

---

§ 263. Wenn man die Sätze der §§ 211 und der folg., die wir nunmehr auf den Fall ausgedehnt haben, wo eine der

Grenzen des betrachteten Integrals unendlich gross ist, auf die singulären bestimmten Integrale anwendet, so können sie auch manchmal mit Vortheil benutzt werden, um zu entscheiden, ob eine Function zwischen unendlich grossen Grenzen der Integration fähig sei oder nicht. Ausser jenen Sätzen gilt aber auch der folgende, welcher, dem in § 239 aufgestellten Theorem durchaus ähnlich, in einer ausserordentlich grossen Anzahl von Fällen dem eben erwähnten Zweck dienen kann. Er lautet: Wenn die Function $f(x)$ zwischen α und einer endlichen, aber beliebig grossen und positiven Zahl β integrirbar ist, so hat das Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$$

jedesmal dann einen bestimmten und endlichen Werth, wenn $f(x)$ für $x=\infty$ unendlich klein von einer Ordnung wird, die grösser oder ebenso gross oder auch nur nicht kleiner (§ 27) ist, als die Ordnung einer der Functionen

$$\frac{1}{x^{1+\mu}},\quad \frac{1}{x(lx)^{1+\mu}},\quad \frac{1}{xlx(l^2x)^{1+\mu}},\ \ldots,$$

in denen μ eine bestimmte von Null verschiedene und positive Zahl bedeutet. Statt dessen wird dasselbe Integral immer dann unendlich gross, wenn die Function $f(x)$ von einem gewissen Werth von x an bis in die Unendlichkeit niemals das Vorzeichen wechselt und bei unbeschränkt wachsendem x sich von Null um mehr als eine bestimmte Grösse entfernt hält oder unendlich klein von einer Ordnung wird, die kleiner, ebenso gross oder auch nur nicht grösser ist, als die Ordnung einer der Functionen

$$\frac{1}{x},\quad \frac{1}{xlx},\quad \frac{1}{xlxl^2x},\ \ldots$$

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf Ueberlegungen, die denen in § 239 durchaus ähnlich sind.

Was zunächst den ersten Theil angeht, so wird in Folge der Voraussetzungen eine Zahl β' von der Beschaffenheit

existiren, dass für alle Werthe von x, die sie an Grösse übertreffen, eine der Grössen

$$f(x)x^{1+\mu},\quad f(x)x(lx)^{1+\mu},\quad f(x)xlx(l^2x)^{1+\mu},\ldots$$

numerisch stets kleiner als eine endliche und positive Zahl c ausfällt. Es wird deshalb, wenn $\beta > \beta'$ und γ beliebig aber positiv ist, das singuläre bestimmte Integral

$$\int_{\beta}^{\beta+\gamma} f(x)\,dx$$

numerisch kleiner sein, als eine der Grössen

$$c\int_{\beta}^{\beta+\gamma}\frac{dx}{x^{1+\mu}},\quad c\int_{\beta}^{\beta+\gamma}\frac{dx}{x(lx)^{1+\mu}},\quad c\int_{\beta}^{\beta+\gamma}\frac{dx}{xlx(l^2x)^{1+\mu}},\ldots$$

Weil nun diese Grössen bezüglich die Werthe

$$\frac{c}{\mu}\left(\frac{1}{\beta^{\mu}}-\frac{1}{(\beta+\gamma)^{\mu}}\right),\quad \frac{c}{\mu}\left[\frac{1}{(l\beta)^{\mu}}-\frac{1}{[l(\beta+\gamma)]^{\mu}}\right],$$

$$\frac{c}{\mu}\left\{\frac{1}{(l^2\beta)^{\mu}}-\frac{1}{[l^2(\beta+\gamma)]^{\mu}}\right\}$$

haben, welche bei unbeschränkt wachsendem β, die positive Zahl γ mag sein, wie sie will, der Null zustreben, so gilt dasselbe auch für jenes singuläre Integral

$$\int_{\beta}^{\beta+\gamma} f(x)\,dx$$

und folglich hat das Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$$

einen bestimmten und endlichen Werth.

Um nun auch den zweiten Theil unseres Satzes zu beweisen, bemerken wir, dass die Function $f(x)$ nach der Voraussetzung von einem bestimmten endlichen Werth γ des x an bei immer mehr wachsendem x niemals durch Null geht und immer dasselbe Vorzeichen behält. Bezeichnet man nun mit β eine beliebige Zahl, die grösser als γ ist, so kann man

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$$

setzen und es genügt deshalb, um den Werth des Integrals

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$$

zu erhalten, den Grenzwerth von

$$\int_\gamma^\beta f(x)\,dx,$$

für $\beta = \infty$ zu ermitteln.

Bedeutet aber c eine von Null verschiedene und positive Grösse, so ist immer auf Grund der gemachten Voraussetzungen offenbar das Integral

$$\int_\gamma^\beta f(x)\,dx$$

numerisch grösser als einer der Ausdrücke:

$$c\int_\gamma^\beta dx,\quad c\int_\gamma^\beta \frac{dx}{x},\quad c\int_\gamma^\beta \frac{dx}{x\,l\,x},\quad c\int_\gamma^\beta \frac{dx}{x\,l\,x\,l^2 x},\ldots$$

welche bezüglich die Werthe

$$c(\beta-\gamma),\quad c(l\,\beta - l\,\gamma),\quad c(l^2\beta - l^2\gamma),\quad c(l^3\beta - l^3\gamma)\ldots$$

haben. Da diese nun mit β ins Unendliche wachsen, so folgt, dass

$$\lim_{\beta=\infty}\int_\gamma^\beta f(x)\,dx = \pm\infty$$

und damit auch

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \pm\infty$$

ist, womit auch der zweite Theil des Satzes bewiesen ist[1]).

---

1) Ueber die Tragweite der gegebenen Kriterien vergl. Du Bois-Reymond, Journ. f. Math. Bd. 76 S. 88 und Worpitzky, Ueber die Endlichkeit bestimmter Integrale.

§ 264. Wenn, entgegen den früheren Voraussetzungen, die Function $f(x)$ bei unbeschränkt wachsendem x beständig das Vorzeichen wechselt, so kann die zweite Hälfte des letzten Satzes ihre Gültigkeit verlieren.

Betrachtet man z. B. die Integrale

$$\int_0^x \frac{\sin bx}{x} dx, \quad \int_0^x \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx,$$

$$\int_0^x \cos(x^2) dx, \quad \int_0^x \sin(x^2) dx, \quad \int_0^x \sqrt{x} \cos(x^2) dx, \ldots,$$

bei welchen in dem ersten b eine beliebige von Null verschiedene Constante bedeutet und in dem letzten die unter dem Integralzeichen stehende Function bei unbeschränkt wachsendem x numerisch auch unendlich grosse Werthe annimmt, so findet man leicht, dass dieselben bestimmte und endliche Werthe haben. Denn unterwirft man ihre singulären bestimmten Integrale

$$\int_\beta^{\beta+\gamma}$$

auf die gewöhnliche Methode der partiellen Integration und nimmt man für das erste Integral $\sin bx\,dx$, das zweite $\sin x\,dx$, das dritte und fünfte $\cos(x^2)\,2x\,dx$ und das vierte $\sin(x^2)\,2x\,dx$ zum Differentialfactor, so folgt aus dem ersten Theil des letzten Satzes, dass diese singulären bestimmten Integrale für $\beta = \infty$ sämmtlich Null zum Grenzwerth haben. Die gegebenen Integrale haben daher insgesammt bestimmte und endliche Werthe (§ 243)[1].

---

1) Vgl. auch Du Bois-Reymond, Math. Ann. Bd. 13 S. 251 und Thomae, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 23 S. 68.

Neunzehntes Kapitel.

Partielle Integration; Integration durch Substitution.

§ 265. Da die Berechnung bestimmter Integrale und die Begründung einiger Eigenschaften derselben häufig mit Hülfe der sogenannten theilweisen Integration, der Integration durch Substitution und der Integration durch unendliche Reihen geschieht, so scheint hier der Ort zu sein, einer jeden dieser Methoden einige Worte zu widmen und sie zugleich mit der ganzen Allgemeinheit zu behandeln, deren sie fähig sind.

Es seien zu dem Zweck u und v zwei Functionen von x, die in einem ganzen Intervall (α, β), das wir zunächst von endlicher Ausdehnung voraussetzen, endlich und stetig sind. Wir wollen mit λ_u und mit λ_v eine der Derivirten von u bezüglich von v in diesem Intervall bezeichnen. Diese Derivirten λ_u und λ_v mögen in dem Intervall (α, β) integrationsfähig sein, und sollten sie in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung unendlich gross werden, so wollen wir annehmen, dass sie sich in den Intervallen, in welchen sie endlich sind (und daher auch in dem ganzen Intervall (α, β) § 248) zur Integration eignen und dass wenigstens eins der Producte $u\lambda_v$ und $v\lambda_u$ auch in den Umgebungen der Unendlichkeitspunkte von λ_u und λ_v integrationsfähig bleibt[1]).

---

1) Die hier gestellte Bedingung, dass λ_u und λ_v zwischen α und β integrirbar sein sollen, ist nach den §§ 197, 198, 238 mit der andern gleichwerthig, dass u und v Functionen von x von der Form

$$u = a + \int_\alpha^x u_1\, dx, \qquad v = b + \int_\alpha^x v_1\, dx$$

sein sollen, wobei a und b Constante bedeuten und u_1 und v_1 Functionen von x sind, die sich zwischen α und β integriren lassen und von λ_u bezüglich λ_v nur um Functionen vom Integral Null verschieden sein können.

Man darf auch nicht vergessen, dass, wenn eine der Derivirten λ_u einer endlichen und stetigen Function u zwischen α und β integrirbar ist, dies auch von den übrigen gilt, und dass ihre Integrale sämmtlich einander gleich sind. Wenn ferner U und V zwei Functionen sind, die sich zwischen α und β ebenso wie ihr Product UV zur Integration

Unter diesen Bedingungen gilt die Beziehung

$$(43) \qquad \int_\alpha^\beta u\lambda_v dx = [uv]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta v\lambda_u dx,$$

die auch durch die folgende ersetzt werden kann

$$(44) \qquad \int_\alpha^\beta u V dx = [uv]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta v U dx.$$

Darin differiren V und U von λ_v und λ_u nur um Functionen vom Integral Null und wird mit $[uv]_\alpha^\beta$ die Differenz der Werthe, welche das Product uv in den beiden Integrationsgrenzen α und β hat, bezeichnet.

Diese Formeln stellen die Methode der theilweisen Integration in ihrer allgemeinsten Form dar, denn, falls u und v Derivirte u' und v' besitzen, die zwischen α und β bestimmt und integrirbar sind, kann man $\lambda_u = u'$ und $\lambda_v = v'$ setzen und erhält so die gewöhnlichen Formeln der Differentialrechnung. Um die Gültigkeit der Gleichungen (43) und (44) nachzuweisen, beginnen wir mit dem Fall, in welchem λ_u und λ_v zwischen α und β stets endlich sind.

Nach der Voraussetzung sind dann die Functionen $u\lambda_v$, $v\lambda_u$ und daher auch ihre Summe $u\lambda_v + v\lambda_u$ zwischen α und β integrirbar. Wenn wir uns nun das Intervall (α, β) in Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ zerlegt denken, so sieht man leicht ein, dass die Summe

$$\sum_1^n (u\lambda_v + v\lambda_u)_s \delta_s,$$

in welcher mit $(u\lambda_v + v\lambda_u)_s$ ein Werth der Function $u\lambda_v + v\lambda_u$ zwischen der unteren und oberen Grenze ihrer Werthe in dem

---

eignen, und wenn U_1 und V_1 sich von U und V nur um Functionen vom Integral Null unterscheiden, dann ist auch das Product $U_1 V_1$ zwischen α und β integrationsfähig und es besteht die Gleichung:

$$\int_\alpha^\beta U_1 V_1 dx = \int_\alpha^\beta U V dx.$$

Intervall δ_s bezeichnet wird, die Differenz $[uv]_\alpha^\beta$ zum Grenzwerth hat, wenn die δ_s gegen Null abnehmen.

Denn die untere und obere Grenze der Derivirten einer Function $f(x)$ in einem gegebenen Intervall enthalten die Werthe der für Punkte x dieses Intervalls gebildeten Zuwachsverhältnisse

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

selber zwischen sich, so lange auch die Punkte $x+h$ diesem Intervall angehören. Wenn daher (λ_u) und (λ_v) die Werthe von λ_u und λ_v in einem Punkt eines beliebigen Theil δ des Intervalls (α, β) sind, und die Schwankungen von λ_u und λ_v in diesem Theil δ die Werthe D bezüglich D' haben, dann liegen die Werthe des λ_u und der Zuwachsverhältnisse von u in dem gewählten δ zwischen $(\lambda_u) - D$ und $(\lambda_u) + D$ und die Werthe von λ_v und den Zuwachsverhältnissen von v zwischen $(\lambda_v) - D'$ und $(\lambda_v) + D'$. Das heisst also, man kann die ersteren Werthe durch $(\lambda_u) + \gamma D$ und die letzteren durch $(\lambda_v) + \gamma' D'$ zur Darstellung bringen, wenn γ und γ' Zahlen sind, die zwischen -1 und 1 liegen (-1 und 1 eingeschlossen).

Bezeichnet man daher mit d und d' die Schwankungen von u und v in dem Theil δ und beachtet, dass, wenn a und b die Endpunkte dieses Theiles sind, die Gleichung besteht

$$\frac{u(b)v(b)-u(a)v(a)}{\delta} = u(b)\frac{v(b)-v(a)}{\delta} + v(a)\frac{u(b)-u(a)}{\delta},$$

so findet man, dass

$$\frac{u(b)v(b)-u(a)v(a)}{\delta} = u\lambda_v + v\lambda_u + \gamma_1 d(\lambda_v + \gamma' D') +$$
$$+ \gamma_2 d'(\lambda u + \gamma D) + \gamma' u D' + \gamma v D$$

ist, wenn man unter u, v, λ_u, λ_v die Werthe dieser Grössen selbst in einem und demselben übrigens beliebigen Punkt des Intervalls δ und unter γ, γ', γ_1, γ_2 Zahlen versteht, die zwischen -1 und 1 liegen (-1 und 1 eingeschlossen). Multiplicirt man nun die rechte und linke Seite dieser Gleichung mit δ, wendet sie auf jedes der Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$

an, in welche das Gesammtintervall (α, β) zerlegt wurde und summirt schliesslich, so erhält man die Relation:

$$u(\beta)v(\beta) - u(\alpha)v(\alpha) = [uv]_\alpha^\beta = \sum_1^n (u\lambda_v + v\lambda_u)_s \delta_s +$$

$$+ \gamma_0 \lambda_{v,0} \sum_1^n \delta_s d_s + \gamma_0' \lambda_{u,0} \sum_1^n \delta_s d_s' + \gamma_0'' u_0 \sum_1^n \delta_s D_s' +$$

$$+ \gamma_0''' v_0 \sum_1^n \delta_s D_s,$$

in welcher der Index s immer auf die Zugehörigkeit zu dem Intervall δ_s hinweist, mit $\lambda_{u,0}$, $\lambda_{v,0}$, u_0, v_0 die oberen Grenzen der Absolutwerthe von λ_u, λ_v, u und v und mit $\gamma_0, \gamma_0', \gamma_0'', \gamma_0'''$ andere zwischen -1 und 1 gelegene Zahlen (diese Grenzen inbegriffen) bezeichnet sind. Weil nun nach der Voraussetzung die Summen

$$\sum_1^n \delta_s d_s; \quad \sum_1^n \delta_s d_s', \quad \sum_1^n \delta_s D_s, \quad \sum_1^n \delta_s D_s'$$

bei unbegrenzter Abnahme der Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ Null zum Grenzwerth haben, so ist der Grenzwerth der Summe

$$\sum_1^n (u\lambda_v + v\lambda_u)_s \delta_s$$

genau $= [uv]_\alpha^\beta$. Beachtet man, dass danach

$$[uv]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta (u\lambda_v + v\lambda_u)\, dx$$

ist und dass $u\lambda_v$ und $v\lambda_u$ auch einzeln integrirbar sind, so ergeben sich ohne Weiteres die Formeln (43) und (44), die mithin unter der Voraussetzung, dass λ_u und λ_v zwischen α und β stets endlich und integrationsfähig verlaufen, bewiesen sind.

Danach lässt sich der Fall sofort erledigen, dass eine dieser Derivirten oder dass beide in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung unendlich gross werden, wenn sie sich nur in jedem beliebigen Intervall, in dem sie endlich sind, und daher auch in dem ganzen Intervall (α, β) (§ 238) zur Integration eignen.

Denn da wir eben bewiesen haben, dass für alle Werthe von a und x, für welche das Intervall (a, x) keine Unendlichkeitspunkte von λ_u oder λ_v enthält, die Gleichung besteht:

$$[uv]_a^x = \int_a^x (u\lambda_v + v\lambda_u)\, dx, \tag{45}$$

so folgt aus der Voraussetzung, dass uv eine Function von x ist, die in jedem Punkt zwischen α und β endlich und stetig ist, nach § 233, dass die Function $u\lambda_v + v\lambda_u$ sich in dem ganzen Intervall (α, β) zur Integration eignet, und dass die Beziehung (45) für alle Werthsysteme der a und x gilt, die in das Intervall (α, β) fallen.

Deshalb aber und weil wir gleich Anfangs die Voraussetzung machten, dass auch in den Umgebungen der verschiedenen Unendlichkeitspunkte einer jeden der Functionen λ_u und λ_v wenigstens eine der beiden Functionen $u\lambda_v$, $v\lambda_u$ zur Integration geeignet sein solle, ergiebt sich weiter, dass dasselbe auch von der zweiten dieser Grössen gilt. Die Formel (45) kann daher auch in der Form

$$[uv]_a^x = \int_a^x u\lambda_v dx + \int_a^x v\lambda_u dx$$

gegeben werden, woraus man dann unmittelbar (43) und (44) erhält. Damit sind diese allgemeinen Formeln für die theilweise Integration vollständig für die Fälle bewiesen, wenn die Functionen u und v endlich und stetig, die Derivirten λ_u und λ_v stets endlich und integrirbar sind, oder wenn die letzteren, falls sie unendlich gross werden, es nur in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung und derart werden, dass sie sich in den Intervallen, in denen sie endlich verlaufen, zur Integration eignen und dass in den Umgebungen der Unendlichkeitspunkte wenigstens eine der beiden Functionen $u\lambda_v$, $v\lambda_u$ ebenfalls integrirbar sei.

Speciell haben daher die Gleichungen (43) oder (44) Geltung, wenn die Derivirten λ_u und λ_v der Functionen u und v in dem in Betracht gezogenen Intervall integrirt werden können und entweder stets endlich sind oder, wenn sie unend-

lich gross werden, es wenigstens niemals zusammen werden. Denn alsdann sind wir sicher, dass in den Umgebungen der Unendlichkeitspunkte von λ_u und λ_v wenigstens eins der Producte $u\lambda_v$, $v\lambda_u$ stets endlich ist. Ebenso behalten sie ihre Geltung, wenn zwar eine oder beide Derivirten λ_u und λ_v z. B. λ_v in einem Punkt unendlich gross werden, die betreffende Grösse aber integrirbar bleibt, auch wenn sie auf ihre Absolutwerthe reducirt wird oder wenn λ_u mindestens in den Umgebungen dieses Punktes keine weiteren Unendlichkeitspunkte aufweist und die Function v nicht unendlich viele Schwankungen erleidet; das heisst also, es darf (§§ 226 und 227) über die Integrirbarkeit von $v\lambda_u$ in diesen Umgebungen kein Zweifel bestehen.

---

§ 266. Von der Gleichung für die partielle Integration in der Gestalt (44) lässt sich sagen, sie gelte, wenn U und V zwischen α und β integrirbar sind und niemals gleichzeitig unendlich gross werden oder, wenn doch wenigstens eines der Producte uV, vU von einer der Grössen mit dem Integral der anderen auch in den Umgebungen ihrer Unendlichkeitspunkte integrirbar bleibt. Andererseits lassen sich die Formeln für die theilweise Integration auch in der Gestalt

$$(46)\qquad \int_\alpha^\beta uV\,dx = \left[u\int_b^x V\,dx\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \lambda_u\left(\int_b^x V\,dx\right)dx$$

oder unter der Form

$$(47)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\alpha^\beta V\left(\int_a^x U\,dx\right)dx = \left[\left(\int_a^x U\,dx\right)\left(\int_b^x V\,dx\right)\right]_\alpha^\beta - \\ \qquad\qquad\qquad\displaystyle - \int_\alpha^\beta U\left(\int_b^x V\,dx\right)dx \end{cases}$$

geben, falls man unter a und b zwei beliebige Werthe zwischen α und β versteht und U und V zwischen α und β integrirt werden können und in den Umgebungen ihrer Unendlichkeitspunkte wenigstens eins der beiden Producte

$$U \int_b^x V dx, \quad V \int_a^x U dx$$

gleichfalls integrirbar ist.

§ 267. Die Formel für die theilweise Integration (43) bleibt ferner anwendbar, wenn die in ihr vorkommenden Functionen u und v endlich und stetig sind und zugleich die Derivirten λ_u, λ_v nicht nur in den Intervallen, in welchen sie endlich sind, sich zur Integration eignen, sondern auch von der Beschaffenheit sind, dass das Vorhandensein von Unendlichkeitspunkten derselben zwischen α und β nicht die Wirkung hat, die Gleichung ihrer bestimmten Bedeutung zu berauben. Denn wenn die drei Glieder der Gleichung oder auch nur zwei eine bestimmte Bedeutung haben, dann sind alle Bedingungen erfüllt, die nothwendig sind, damit sie streng gültig sei. Wenn ferner eins der in ihr vorkommenden beiden Integrale unendlich gross oder unbestimmt ist, so ist dies auch das andere, oder u und v sind nicht mehr beide endlich und stetig. Wenn umgekehrt der letztere Fall in Bezug auf u und v eintritt, dann ist wenigstens das eine der beiden Integrale unendlich gross oder unbestimmt. Es kann daher stets die Gleichung (43) dazu benutzt werden, eine Entscheidung darüber zu treffen, ob eine Function in einem gegebenen Intervall integrirbar ist oder nicht.

Es ist eigentlich für die Gültigkeit der Formel (43) nicht einmal erforderlich, u und v in dem ganzen Intervall (α, β) als endlich und stetig vorauszusetzen; auf die bekannte Art lässt sich leicht ersehen, dass diese Functionen in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung (bezw. nicht ausgedehnten Menge) Singularitäten haben dürfen, falls nur das Product uv in diesen Punkten endlich und stetig bleibt.

Analoge Bemerkungen lassen sich in Bezug auf die Formeln (44), (46) und (47) machen.

§ 268. Wir gehen nun dazu über, ein Intervall (α, ∞) von unendlich grosser Ausdehnung vorauszusetzen und wollen annehmen, u und v seien in dem früher in § 256 definirten Sinn für $x = \infty$ endlich und stetig oder es sei wenigstens ihr Product uv für $x = \infty$ endlich und stetig. Ueberdies sei die Gleichung (43) in jedem beliebigen endlichen, wenn auch noch so grossen Intervall (α, β) anwendbar.

Geht man dann in dieser Gleichung zur Grenze für $\beta = \infty$ über, so sieht man sofort, dass die allgemeine Methode der theilweisen Integration sich auch zwischen α und ∞ anwenden lässt. Es besteht die Gleichung

$$\int_\alpha^\infty u\lambda_v dx = [uv]_\alpha^\infty - \int_\alpha^\infty v\lambda_u dx \tag{48}$$

jedesmal dann, wenn eine der Functionen $u\lambda_v$, $v\lambda_u$ sich zwischen einer beliebig grossen Zahl x' und ∞ zur Integration eignet, oder einfacher, so oft den verschiedenen Gliedern dieser Gleichung eine bestimmte Bedeutung zukommt. So kann man speciell behaupten (§ 245), dass sich die Methode auch immer anwenden lässt, wenn wenigstens eine der Grössen λ_u und λ_v von einem bestimmten Werth von x' an bis zur Unendlichkeit integrirbar ist und dauernd hinter einer endlichen Zahl zurückbleibt und wenn der zugehörige Factor v oder u zwischen dieser Zahl und der Unendlichkeit keine Schwankungen macht; oder immer dann, wenn wenigstens eine der Grössen λ_u und λ_v zwischen x' und ∞, auch nachdem sie durch ihre Absolutwerthe ersetzt worden ist, integrirbar bleibt.

Dasselbe lässt sich von den Formeln

$$\int_\alpha^\infty uV dx = [uv]_\alpha^\infty - \int_\alpha^\infty vU dx \tag{49}$$

$$\begin{cases} \int_\alpha^\infty V\left(\int_a^x U dx\right) dx = \left[\left(\int_a^x U dx\right)\left(\int_b^x V dx\right)\right]_\alpha^\infty - \\ \qquad - \int_\alpha^\infty U\left(\int_b^x V dx\right) dx \end{cases} \tag{50}$$

sagen, die den Gleichungen (44) und (47) analog sind.

Wenn u und v auch für $x = \infty$ endlich und stetig sind oder es wenigstens ihr Product ist, so kann man jetzt, da die Gleichung (48) aus (43) durch Uebergang zur Grenze hervorgegangen ist, behaupten: Wenn die Beziehung (43) für jeden beliebigen endlichen Werth von β gilt und es tritt dann der Fall ein, dass eins von den beiden in (48) vorkommenden Integralen unendlich gross oder unbestimmt wird, so ist dasselbe auch bei dem andern der Fall.

Wenn ferner die Formel (43) für jeden beliebigen endlichen Werth von β besteht, aber eine der Functionen u und v oder wenigstens ihr Product für $x = \infty$ nicht endlich und stetig ist, dann muss wenigstens eins der beiden in (48) vorkommenden Integrale unbestimmt oder unendlich gross sein etc.

Aehnliche Bemerkungen lassen sich über die Formeln (49) und (50) machen und so kann die Methode der theilweisen Integration auch dazu dienen, sich über die Integrirbarkeit einer Function zwischen α und ∞ ein Urtheil zu bilden.

---

§ 269. Auf Grund der Formel (43), die für den Fall, dass λ_u und λ_v in allen Intervallen von α bis β integrirbar sind, bewiesen wurde, können wir dann weiter aus den Sätzen in § 238 den Schluss ziehen: Wenn u und v zwei Functionen bedeuten, die in einem ganzen endlichen Intervall (α, β) endlich und stetig sind und eine der Derivirten λ_u, λ_v sich bei einer jeden von ihnen in diesem Intervall zur Integration eignet, dann können die Derivirten des Products uv in diesem Intervall von der Summe $u\lambda_v + v\lambda_u$ nur um eine Function vom Integral Null differiren.

---

§ 270. Wir beschäftigen uns nun zunächst mit der Methode der Integration durch Substitution und wollen damit beginnen, mit Hülfe dieser Methode das Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

vorerst unter der Voraussetzung umzuformen, dass das Intervall (α, β) endlich und die Function $f(x)$ in ihm integrirbar sei.

Wir bezeichnen zu dem Ende mit $\psi(y)$ eine Function von y, die für zwei Punkte a und b des Intervalles, in dem sie gegeben ist, den Werth α bezüglich β hat. Ist nun $\psi(y)$ eine von den Functionen, wie wir sie hier betrachten, die in jedem Punkte des Intervalls (a, b), in dem sie gegeben sind, einen einzigen und bestimmten Werth haben, so müssen offenbar die Punkte a und b von einander verschieden sein. Wir setzen zunächst voraus, sie befänden sich beide in endlicher Entfernung von einander und betrachten sie als Endpunkte eines Intervalls (a, b), in dem $\psi(y)$ bekannt ist. $\psi(y)$ sei in diesem Intervall stetig und gehe, während y den Weg von a nach b zurücklegt, von dem Werth α zu dem Werth β über, indem es dabei immer wachse oder immer abnehme, je nachdem $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ ist.

Alsdann nimmt $\psi(y)$, während y den Weg von a bis b zurücklegt, alle Werthe von α bis β und jeden nur einmal an, so dass also jeder Werth von x zwischen α und β als zu einem bestimmten Werth von y zwischen a und b gehörig betrachtet werden kann und umgekehrt. Mit andern Worten: Man kann jeden Werth x in dem Intervall (α, β) als durch den entsprechenden Werth y in dem Intervall (a, b) bestimmt auffassen und umgekehrt. Es lässt sich daher x als eine Function von y in dem Intervall (a, b) ansehen, bestimmt durch die Gleichung $x = \psi(y)$, und umgekehrt y als Function von x in dem Intervall (α, β) bestimmt durch die Gleichung $y = \varphi(x)$. Dabei ist $\varphi(x)$ eine Function von x [inverse Function der $\psi(x)$] der Art, dass, wenn für einen Werth a_1 von y, zwischen a und b, $\psi(y) = \alpha_1$ ist, der Werth der $\varphi(x)$ für $x = \alpha_1$ eben dieses a_1 ist.

Ferner kann die Function $f(x)$ auch als eine gewisse Function $F(y)$ von y in dem Intervall (a, b) aufgefasst werden und lässt sich mit $f[\psi(y)]$ bezeichnen. Diese Function $F(y)$ wird zudem, falls es sich durchgängig um analytische Functionen handelt, selbst als analytische Function ihres Arguments darstellbar sein, insofern man zur Bildung derselben in $f(x)$ für x lediglich seinen Ausdruck $\psi(y)$ zu setzen hat.

Nach diesen Vorbemerkungen ist leicht zu beweisen, dass, wenn λ_ψ eine der Derivirten der $\psi(y)$ für zwischen a und b liegende y ist und sich in diesem Intervall integriren lässt, auch die Function $f[\psi(y)]\lambda_\psi$ in demselben Intervall integrirbar ist und die Gleichung besteht:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_a^b f[\psi(y)]\lambda_\psi dy, \tag{51}$$

die sich auf die bekannte Relation für die Integration durch Substitution reducirt, sobald $\lambda_\psi = \psi'(y)$ ist.

Zum Beweis setzen wir zunächst voraus, $f(x)$ sei zwischen α und β stets endlich und auch λ_ψ verlaufe zwischen a und b immer endlich. Wir denken uns ferner das Intervall (a, b) in nach Belieben kleine Theilintervalle $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_n'$ zerlegt und $a < b$.

Diesen den y zugehörigen Intervallen $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_n'$ entsprechen in Bezug auf x andere Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, in welche das Intervall (α, β) zerlegt wird und deren Endpunkte mit Hülfe der Formel $x = \psi(y)$ bestimmt werden. Weil nun $\psi(y)$ zwischen α und β stetig ist, so kann man nach dem Cantor'schen Satz (§ 42) die Intervalle $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_n'$ so klein annehmen, dass die entsprechenden $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ sämmtlich kleiner ausfallen, als jede noch so kleine vorgeschriebene Zahl σ.

Ausserdem besteht nach unserer Voraussetzung (§ 198 Anm.) die Gleichung $\delta_s = \lambda_s \delta_s'$, wenn λ_s eine bestimmte zwischen dem unteren und oberen Grenzwerth von λ_ψ in dem Intervall δ_s' gelegene Zahl ist. Falls daher $f(x_s)$ der dem Punkt x_s in dem Intervall δ_s entsprechende Werth der $f(x)$ und y_s der dem x_s in dem Intervall δ_s' entsprechende Werth von y ist, so ist:

$$\sum_1^n \delta_s f(x_s) = \sum_1^n f[\psi(y_s)]\,\lambda_{y_s}\delta_s' - \sum_1^n f[\psi(y_s)](\lambda_{y_s} - \lambda_s)\delta_s',$$

worin λ_{y_s} der Werth von λ_ψ im Punkt y_s ist. Es ist ferner $f(x)$ zwischen α und β integrirbar und die Summe

$$\sum_1^n f[\psi(y_s)]\,(\lambda_{y_s} - \lambda_s)\,\delta_s'$$

hat bei unbeschränkt wachsendem n Null zum Grenzwerth. Dies ergiebt sich daraus, dass λ_ψ zwischen a und b integrirbar ist und überdies, wenn L die obere Grenze der absoluten Werthe der $f(x)$ zwischen α und β vorstellt, die Relation stattfindet

$$\left|\sum_1^n f[\psi(y)]\,(\lambda_{y_s} - \lambda_s)\,\delta_s'\right| < L \sum_1^n \left|\lambda_{y_s} - \lambda_s\right| \delta_s'.$$

Man erhält daher durch Uebergang zur Grenze:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim \sum_1^n f[\psi(y_s)]\,\lambda_{y_s}\,\delta_s'.$$

Um also die Gültigkeit der Formel (51) nachzuweisen, genügt es offenbar zu beweisen, dass sich die Function $f[\psi(y)]\,\lambda_\psi$ zwischen a und b zur Integration eignet.

Dies würde unmittelbar aus dem Satz über die Integrabilität der Producte hervorgehen, wenn die Integrabilität der $f[\psi(y)]$ zwischen a und b eine unmittelbare Folge derjenigen der $f(x)$ zwischen α und β wäre. Da jedoch dieses nicht ohne Weiteres einleuchtet, es sei denn, man mache weitere einschränkende Bedingungen für $f(x)$ oder $\psi(y)$, so empfiehlt es sich, anders zu verfahren.

Da die fragliche Eigenschaft der Integrabilität offenbar in dem speciellen Fall vorhanden ist, wenn $f(x)$ zwischen α und β constant ist, so genügt es, vorauszusetzen, $f(x)$ sei stets positiv. Denn, wäre es dieses nicht, so würde es ausreichen, statt $f(x)$ die Function $f(x) + c$ in Betracht zu ziehen, in welcher c eine so gewählte Constante ist, dass $f(x) + c$ zwischen α und β stets positiv ist.

Aber auch λ_ψ ist in den Punkten y zwischen a und b, in denen es von Null verschieden ist, immer positiv oder immer negativ, da $\psi(y)$ immer wächst oder immer abnimmt, wenn y den Weg von a bis b macht. Nimmt man daher z. B. an, λ_ψ sei, wo es von Null verschieden ist, stets positiv, und bezeichnet mit λ_s' und Λ_s' die unteren und oberen Grenzwerthe von λ_ψ in dem Intervall δ_s', mit l_s und L_s diejenigen

der $f(x)$ in dem Intervall δ_s und mit D_s' die Schwankung von $f[\psi(y)]\lambda_\psi$ in dem Intervall δ_s', so erhält man offenbar:

$$D_s' < L_s A_s' - l_s \lambda_s'$$

oder

$$D_s' < L_s(A_s' - \lambda_s') + \lambda_s'(L_s - l_s).$$

Beachtet man, dass $\lambda_s' \delta_s' \leq \delta_s$ ist, so kann man auch schreiben:

$$D_s' \delta_s' < L(A_s' - \lambda_s')\delta_s' + (L_s - l_s)\delta_s,$$

wenn L die obere Grenze der Absolutwerthe von $f(x)$ zwischen α und β bedeutet. Das setzt uns nun in den Stand, nach der Voraussetzung über die Integrabilität von λ_ψ und $f(x)$ in den bezüglichen Intervallen (a, b) und (α, β) zu behaupten, dass

$$\lim \sum_1^n D_s' \delta_s' = 0$$

ist, dass in Folge dessen die Function $f[\psi(y)]\lambda_\psi$ zwischen a und b integrirbar ist und mithin die Formel (51) gilt.

Ist aber die letzterwähnte Relation für den Fall bewiesen dass $f(x)$ zwischen a und b stets endlich ist, so erledigt sich der weitere Fall mit geringer Mühe, in welchem $f(x)$ unter Bewahrung seiner Integrabilität zwischen α und β in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung zwischen α und β und auch λ_ψ in eben solchen Punkten zwischen a und b unendlich gross wird, dabei aber in allen Intervallen, in denen es endlich verläuft (und mithin auch (§ 238) überhaupt zwischen a und b) integrirbar bleibt.

Denn nach der Voraussetzung ist das Integral

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx$$

$(\alpha \leq x < \beta)$ eine endliche und stetige Function $F_1(x)$ im Intervall (α, β), die auch, da $x = \psi(y)$, als eine ebenfalls endliche und stetige Function $F_1([\psi(y)]$ von y in dem Intervall (a, b) betrachtet werden kann. Wie wir gezeigt haben, kann diese Function $F_1[\psi(y)]$ zur Bestimmung der Integrale

$$\int_c^d f[\psi(y)]\,\lambda_\psi dy$$

in allen Intervallen (c, d) benutzt werden, in denen $f[\psi(y)]$ und λ_ψ endlich sind, denn es besteht die Gleichung:

$$F_1[\psi(d)] - F_1[\psi(c)] = \int_c^d f[\psi(y)]\lambda_\psi dy.$$

Nach § 233 ist daher $f[\psi(y)]\lambda_\psi$ zur Integration auch in dem ganzen Intervall (a, b) geeignet und gilt diese Gleichung auch in den Intervallen (c, d), in welche Unendlichkeitspunkte der $f[\psi(y)]$ oder von λ_ψ fallen; es ist daher immer

$$\int_{\psi(c)}^{\psi(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f[\psi(y)]\lambda_\psi dy$$

für alle Punkte c und d des Intervalls (a, b). Damit wäre der Beweis vervollständigt, dass die Formel (51) unter den im Anfang gemachten Voraussetzungen Geltung hat.

---

§ 271. Bisher hatten wir angenommen, $\psi(y)$ wachse, wenn y von a nach b übergeht, beständig oder nehme beständig ab, je nachdem $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ ist. Statt dessen wollen wir jetzt zunächst voraussetzen, $\psi(y)$ besitze zwischen a und b eine endliche Anzahl von Maxima und Minima in den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_m$, habe dagegen keine Invariabilitätszüge.

Wenn alsdann z. B. $\alpha < \beta$ und das Maximum der Werthe, die $\psi(y)$ zwischen a und b annimmt, β und das Minimum α ist, dann liegen alle Werthe dieser Function $\psi(y)$ wieder zwischen α und β und speciell die Werthe $\psi(a_1)$, $\psi(a_2), \ldots, \psi(a_m)$, die den Maxima und Minima der $\psi(y)$ entsprechen, sind in diesen Grenzen enthalten oder doch höchstens β bezüglich α gleich. Während aber jedem Werth von y zwischen a und b wieder ein einziger Werth von x zwischen α und β entspricht, ist das Umgekehrte nicht mehr der Fall; das heisst, jedem Werth von x zwischen α und β entspricht nicht mehr ein einziger Werth von y; die im vorigen Paragraphen mit $\varphi(x)$ bezeichnete inverse Function hört daher auf, eindeutig zu sein, es sei denn, man zerlege das Gesammtintervall (a, b) in die Theilintervalle (a, a_1), $(a_1, a_2)\ldots$, für welche die früheren Be-

dingungen erfüllt sind. Betrachtet man daher x wieder als eine durch die Gleichung $x = \psi(y)$ bestimmte Function von y und also $f(x)$ als eine Function $f[\psi(y)]$ von y zwischen a und b und nimmt an, eine der Derivirten λ_ψ von $\psi(y)$ zwischen a und b eigne sich zur Integration, so braucht man nur zu beachten, dass die Function $\psi(y)$ in dem Intervall von a bis a_1 beständig wächst, von a_1 bis a_2 beständig abnimmt etc., um wieder die Gleichungen zu erhalten:

$$\int_{\alpha}^{\psi(a_1)} f(x)\,dx = \int_{a}^{a_1} f[\psi(y)]\lambda_\psi dy$$

$$\int_{\psi(a_1)}^{\psi(a_2)} f(x)\,dx = \int_{a_1}^{a_2} f[\psi(y)]\lambda_\psi dy$$

. . . .

Summirt man dann diese Gleichungen und bedenkt, dass die Function $f(x)$ in jedem Punkt x einen einzigen und bestimmten Werth hat, so kommt man wieder auf die Formel (51).

Wenn ferner das Maximum M oder das Minimum m der Werthe der $\psi(y)$ zwischen a und b oder diese beiden Zahlen zugleich zwar endlich sind, aber nicht mehr zwischen α und β liegen, dann nimmt $\psi(y)$ bei dem Durchgang des y von a nach b auch Werthe an, die ausserhalb des Intervalls (α, β) liegen. Man muss daher x von m bis M statt von α bis β in Betracht ziehen und annehmen, $f(x)$ sei in dem ganzen Intervall (m, M) gegeben und integrirbar, oder man muss sich wenigstens $f(x)$ auch ausserhalb des Intervalls (α, β) durch eine Function fortgesetzt denken, die einwerthig und integrirbar ist. Die vorstehenden Formeln behalten dann ihre bestimmte Bedeutung und ihre strenge Berechtigung und führen daher wieder zur Formel (51).

Diese Formel gilt ferner offenbar auch dann, wenn die Function $\psi(y)$ eine endliche Anzahl von Invariabilitätszügen zwischen a und b besitzt; denn wenn (a_1, a_2) einer dieser Züge ist, so ist, für die in ihm liegenden Werthe von y, $\lambda_\psi = 0$ und überdies $\psi(a_1) = \psi(a_2)$. Daher behält die zweite der obigen Gleichungen ihre Gültigkeit. Dies wiederholt sich aber für alle Invariabilitätszüge, die etwa in $\psi(y)$ auftreten,

sowie auch für die übrigen Züge, deren Endpunkte in Maximal- oder Minimalpunkten der $\psi(y)$ oder in Grenzpunkten der Invariabilität liegen. Man kommt daher wieder auf die Gleichung (51).

Auf die bekannte Art lässt sich letztere Gleichung auch auf den Fall ausdehnen, wenn $\psi(y)$ zwischen a und b eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima oder von Invariabilitätszügen hat, wenn nur diese Maxima und Minima und die Grenzpunkte der Invariabilitätszüge eine Punktmenge der ersten Gattung bilden.

§ 272. Wir gehen nun dazu über, den Fall zu untersuchen, in welchem wenigstens eine der Grenzen eines der Intervalle (α, β) und (a, b) oder auch beider Intervalle unendlich gross wird. Zu dem Zweck setzen wir zunächst voraus, b allein sei z. B. $+\infty$, so dass also die Function $\psi(y)$, die wir uns nunmehr in einem unendlich grossen Intervall gegeben denken, nur dann $=\beta$ wird, wenn $y=\infty$ ist und nehmen an, $\psi(y)$ müsse auch für $y=\infty$ als stetig angesehen werden, der Art also, dass $\lim\limits_{y=\infty}\psi(y)=\beta$ ist.

Sind alsdann die Bedingungen erfüllt, unter denen die Gleichung (51) bezüglich der x für jedes Intervall gilt, das von α bis zu einer an β beliebig nahen Zahl $\beta-\varepsilon$ reicht oder bezüglich der y für ein Intervall, das von a bis zu einer willkürlich grossen Zahl geht und erinnert sich des Satzes in § 233 oder geht einfacher noch zur Grenze für $y=\infty$ in der Gleichung

$$\int_{\alpha}^{\psi(y)} f(x)\,dx = \int_{a}^{y} f[\psi(y)]\,\lambda_\psi dy$$

über, die der Voraussetzung nach für jeden endlichen Werth von y streng gültig ist, so findet man wieder die Gleichung (51).

Dasselbe ist auch der Fall, wenn $a=-\infty$, $b=+\infty$ ist, wenn dann nur die Function $\psi(y)$ für die reellen Werthe ihres Arguments mindestens einmal alle zwischen α und β gelegenen Zahlwerthe annimmt und zwar so, dass $\psi(y)$ in

jedem zwischen a und b gelegenen Intervall die Maxima und Minima und die Endpunkte der Invariabilitätszüge in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung hat.

---

§ 273. Schliesslich nehmen wir an, wenigstens eine der beiden Grössen α und β sei unendlich gross und es sei z. B. $\beta = \infty$, $f(x)$ aber bleibe zwischen α und ∞ integrirbar. Wenn dann b endlich ist und $\psi(y)$ auch für $y = b$ als stetig angesehen werden muss, so dass also $\lim\limits_{y=b} \psi(y) = \infty$ ist, und man bezeichnet mit ε_1 eine positive, willkürlich kleine Zahl, so erhält man, für $a < b$,

$$\int_\alpha^{\psi(b-\varepsilon_1)} f(x)\,dx = \int_a^{b-\varepsilon_1} f[\psi(y)]\,\lambda_\psi dy$$

und beim Uebergang zur Grenze

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 = 0} \int_a^{b-\varepsilon_1} f[\psi(y)]\,\lambda_\psi dy =$$

$$= \int_a^b f[\psi(y)]\,\lambda_\psi dy.$$

Die Formel (51) gilt also immer noch.

Wenn dann zugleich mit $\beta = \infty$ auch $b = \infty$ und $\psi(y)$ für $y = \infty$ stetig ist, dann besteht für jeden noch so grossen Werth von b_1 die Gleichung

$$\int_\alpha^{\psi(b_1)} f(x)\,dx = \int_a^{b_1} f[\psi(y)]\,\lambda_\psi dy$$

und in der Grenze ist

$$\int_\alpha^\infty f(x) dx = \lim_{b_1 = \infty} \int_a^{b_1} f[\psi(y)]\,\lambda_\psi dy = \int_a^\infty f[\psi(y)]\,\lambda_\psi dy.$$

Da man zu demselben Ergebniss auch dann kommt, wenn entweder α oder a oder beide Grenzen zugleich $-\infty$ sind, so kann man jetzt den Satz aufstellen: Wenn die Function

$f(x)$ in einem endlichen oder unendlich grossen Intervall (α, β) integrirbar ist, so lässt sich das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

mittelst der Substitution $x = \psi(y)$, falls λ_ψ eine der Derivirten der $\psi(y)$ ist, stets dann in das Integral

$$\int_{a}^{b} f[\psi(y)]\,\lambda_\psi\,dy$$

umformen, wenn die Function $\psi(y)$ in zwei Punkten a und b des endlichen oder unendlich grossen Intervalles, in welchem sie definirt ist, die Werthe α und β annimmt, in dem Intervall (a, b) stets endlich und stetig ist, eine Derivirte λ_ψ besitzt, die sich zur Integration eignet und, entweder in dem Intervall (a, b) oder, wenn dieses unendlich gross ist, in jedem endlichen Theil desselben, ihre Maxima und Minima und die Endpunkte ihrer Invariabilitätszüge in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung hat.

Dabei ist es zulässig, dass $f(x)$, wenn sie nur in dem Intervall (α, β) stets integrirbar bleibt, ebenfalls in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung unendlich gross wird, wie ein Gleiches auch für λ_ψ in dem Intervall (a, b) statthaft ist. Man kann sogar auch voraussetzen, dass $\psi(y)$ in gewissen zwischen a und b liegenden Punkten unendlich gross wird, nur müsste dann $f(x)$ auch ausserhalb des Intervalls (α, β) entweder selbst gegeben sein oder durch eine integrirbare Function fortgesetzt werden.

---

§ 274. Wir fügen hinzu, dass man statt der Bedingung der Integrirbarkeit der $f(x)$ zwischen α und β auch hätte festsetzen können, dass die transformirte Function $f[\psi(y)]\lambda_\psi$ in dem neuen Intervall (a, b) sich zur Integration eignen solle.

Um dies darzuthun, beschränken wir uns auf den Fall,

dass die Intervalle (α, β) und (a, b), sowie die Functionen $f(x)$ und λ_ψ stets endlich sind, da sich die so gewonnenen Resultate durch Uebergang zur Grenze wie früher auch auf die übrigen Fälle ausdehnen lassen. Zerlegt man dann das Intervall (a, b) in die Theilintervalle $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_n'$ und bezeichnet mit $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ die entsprechenden Intervalle von (α, β) und mit l_s und L_s den unteren und oberen Grenzwerth der $f(x)$ in dem Intervall δ_s, wie in § 270, so findet man ohne Mühe:

$$\sum_1^n (L_s - l_s)\delta_s = \sum_1^n (L_s - l_s)\lambda_s\delta_s' = \sum_1^n L_s\lambda_s\delta_s' - \sum_1^n l_s\lambda_s\delta_s' =$$

$$= \sum_1^n L_s\lambda_{y_s}\delta_s' - \sum_1^n l_s\lambda_{y_s'}\delta_s' + \sum_1^n L_s(\lambda_s - \lambda_{y_s})\delta_s' +$$

$$+ \sum_1^n l_s(\lambda_{y_s'} - \lambda_s)\delta_s',$$

falls man unter λ_s eine bestimmte Zahl versteht, die zwischen dem unteren und oberen Grenzwerth von λ_ψ in dem Intervall δ_s' liegt und λ_{y_s} und $\lambda_{y_s'}$ Werthe bedeuten, die λ_ψ thatsächlich in zwei beliebigen Punkten y_s, y_s' des Intervalls δ_s' annimmt.

Ist nun $a < b$ und L die obere Grenze der Absolutwerthe der $f(x)$ zwischen α und β und sind λ_s' und Λ_s' der untere und obere Grenzwerth der λ_ψ in dem Intervall δ_s', so sind die Summen

$$\sum_1^n L_s(\lambda_s - \lambda_{y_s})\delta_s', \quad \sum_1^n l_s(\lambda_{y_s'} - \lambda_s)\delta_s'$$

numerisch kleiner als

$$L\sum_1^n (\Lambda_s' - \lambda_s')\delta_s'.$$

Es werden daher, weil λ_ψ zwischen a und b sich integriren lässt, diese beiden Summen, sobald nur die $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_n'$ hinlänglich klein sind, kleiner ausfallen, als jede vorgeschriebene noch so kleine Zahl.

Betrachtet man nun eine der Summen

$$\sum_1^n L_s \lambda_{y_s} \delta_s', \quad \sum_1^n l_s \lambda_{y_s'} \delta_s',$$

z. B. die erste, so sieht man, dass, weil L_s die obere Grenze der Werthe der $f(x)$ in dem Intervall δ_s ist, ein Punkt ξ_s in diesem Intervall existiren muss, in welchem die Function $f(x)$ entweder thatsächlich den Werth L_s oder doch einen Werth $f(\xi_s)$ annimmt, der näher an L_s liegt, als jede beliebig kleine Zahl σ beträgt. Nimmt man daher für y_s den zu ξ_s gehörigen Werth von y, so ist λ_{y_s} der Werth von λ_ψ im Punkt y_s und es resultirt

$$\sum_1^n L_s \lambda_{y_s} \delta_s' = \sum_1^n f[\psi(y_s)] \lambda_{y_s} \delta_s' + \omega,$$

worin ω eine Grösse bedeutet, die numerisch kleiner ist als $\sigma A \Sigma \delta_s'$ oder als $\sigma A(b-a)$, falls A die obere Grenze der Absolutwerthe von λ_ψ zwischen a und b vorstellt.

Ebenso erhält man

$$\sum_1^n l_s \lambda_{y_s'} \delta_s' = \sum_1^n f[\psi(y_s')] \lambda_{y_s'} \delta_s' + \omega_1,$$

wenn unter ω_1 eine Grösse verstanden wird, die numerisch kleiner als $\sigma A(b-a)$ ist. Die Summen

$$\sum_1^n f[\psi(y_s)] \lambda_{y_s} \delta_s', \quad \sum_1^n f[\psi(y_s')] \lambda_{y_s'} \delta_s'$$

haben aber das Integral

$$\int_a^b f[\psi(y)] \lambda_\psi dy$$

zum Grenzwerth, weil nach der Voraussetzung die Function $f[\psi(y)] \lambda_\psi$ zwischen a und b integrirbar ist. Daraus folgt, dass

$$\lim \sum_1^n (L_s - l_s) \delta_s = 0$$

ist. Damit ist der obige Satz bewiesen.

Es ist zu beachten, dass, falls $\psi(y)$ den Bedingungen des vorigen Paragraphen genügt, die Integrirbarkeit der $f(x)$ zwi-

schen α und β diejenige von $f[\psi(y)]\lambda_{y'}$ zwischen a und b nach sich zieht und umgekehrt, so dass auch die Integration durch Substitution dazu dienen kann, die Frage der Integrirbarkeit einer Function in einem gegebenen endlichen oder unendlich grossen Intervall zu entscheiden.

---

§ 275. Wäre $\psi(y)$ in dem Intervall (a, b) entweder nicht gegeben oder genügte in ihm den obigen Bedingungen nicht, sondern wäre, a und b endlich und $a < b$ vorausgesetzt, in gewissen ausserhalb (a, b) gelegenen Intervallen bekannt und nähme für die Werthe a' und b' von y $(a' < a$ und $b' > b)$ denselben zwischen α und β liegenden Werth γ an, während in den Intervallen (α, γ), (a, a') und (γ, β), (b', b) alle obigen für $f(x)$ und $\psi(y)$ in den Intervallen (α, β), (a, b) festgesetzten Bedingungen erfüllt sind, dann gelten offenbar die folgenden Gleichungen:

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx = \int_a^{a'} f[\psi(y)]\lambda_\psi dy, \quad \int_\gamma^\beta f(x)\,dx = \int_{b'}^b f[\psi(y)]\lambda_\psi dy.$$

Um also das Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

umzuformen, kann man sich statt der Gleichung (51) auch der folgenden bedienen

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_a^{a'} f[\psi(y)]\lambda_\psi dy + \int_{b'}^b f[\psi(y)]\lambda_\psi dy, \tag{52}$$

welche sich für $a' = -\infty$ und $b' = \infty$ auch so schreiben lässt

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_{-\infty}^a f[\psi(y)]\lambda_\psi dy - \int_b^\infty f[\psi(y)]\lambda_\psi dy. \tag{53}$$

Setzt man speciell $\psi(y) = \frac{1}{y}$ und haben α und β entgegengesetzte Vorzeichen, α z. B. das negative, so kann man zur Umformung des Integrals

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

die Formel benutzen:

$$(54) \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\frac{1}{\alpha}} f\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{y^2} + \int_{\frac{1}{\beta}}^{\infty} f\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{y^2},$$

da im vorliegenden Fall $\lambda_\psi = -\frac{1}{y^2}$ ist.

---

§ 276. Ist schliesslich statt $\psi(y)$ die Function $\varphi(x)$ gegeben, so dass die Beziehung besteht $y = \varphi(x)$, welche der früheren $x = \psi(y)$ entspricht, dann findet man unter ähnlichen Bedingungen, wie bisher, eine Transformationsformel, die der Gleichung (51) analog ist.

Sind nämlich $\varphi(\alpha)$ und $\varphi(\beta)$ unter sich verschieden und bleibt $\varphi(x)$ bei dem Uebergang des x von α nach β fortwährend stetig und wächst immer oder nimmt stets ab, je nachdem $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$ oder $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$ ist, so besteht gleichzeitig mit der Beziehung $y = \varphi(x)$ auch die umgekehrte $x = \psi(y)$, in welcher $\psi(y)$ für alle zwischen $\varphi(\alpha)$ und $\varphi(\beta)$ liegende y eine eindeutige, endliche und stetige Function ist, die bei dem Uebergang des y von $\varphi(\alpha)$ nach $\varphi(\beta)$ den Weg von α nach β entweder stets wachsend oder stets abnehmend zurücklegt. Zudem sind die Zuwachsverhältnisse dieser Function $\psi(y)$, sowie ihre Derivirten in jedem Punkt y zwischen $\varphi(\alpha)$ und $\varphi(\beta)$ offenbar zu denen der Function $\varphi(x)$ im entsprechenden Punkt x reciprok. Diese Derivirten sind natürlich nur im Allgemeinen reciprok zu einander; denn es können die rechtsseitigen der $\psi(y)$ den linksseitigen der $\varphi(x)$ entsprechen und umgekehrt.

Wir bezeichnen daher mit λ_φ eine der Derivirten der $\varphi(x)$ und mit λ_ψ die reciproke Derivirte der $\psi(y)$. Weiss man dann, dass das zu λ_φ reciproke $\frac{1}{\lambda_\varphi}$ als Function von x betrachtet, zwischen α und β sich zur Integration eignet und

dass auch $\left[\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\right]_y$, womit die Grösse $\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}$ in ihrer Bedeutung als Function von y bezeichnet werden soll, zwischen $\varphi(\alpha)$ und $\varphi(\beta)$ integrirt werden kann oder dass die Function $\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\lambda_\varphi$, das heisst $f(x)$ zwischen α und β integrirbar ist, alsdann besteht nach den vorigen Paragraphen die Gleichung

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}\left[\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\right]_y dy = \int_\alpha^\beta \frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\lambda_\varphi dx$$

oder:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}\left[\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\right]_y dy, \tag{55}$$

in welcher man λ_φ durch die Ableitung $\varphi'(x)$ jedesmal dann ersetzen kann, wenn diese Ableitung existirt und das reciproke $\frac{1}{\varphi'(x)}$ zwischen α und β integrirbar ist.

---

§ 277. Diese Formel, in welcher, wie schon gesagt, unter $\left[\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\right]_y$ eine Function von y verstanden wird, ist der Gleichung (51) analog. Damit sie aber Geltung habe, ist es nöthig, dass $\varphi(x)$ beim Uebergang des x von α nach β entweder stets wächst oder stets abnimmt.

In der That würde ja, wenn dieses nicht der Fall wäre, die inverse Relation $x = \psi(y)$ nicht mit Hülfe einer Function $\psi(y)$ hergestellt werden können, die zwischen $\varphi(\alpha)$ und $\varphi(\beta)$ eindeutig wäre. Wenn z. B. beim Uebergang des x von α nach β die Function $\varphi(x)$ so lange wüchse, als x sich von α nach γ bewegt und dann beim Uebergang des x von γ nach β abnähme ($\alpha < \gamma < \beta$), so hätte man doch sicherlich:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma)}\left[\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\right]_y dy + \int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\beta)}\left[\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\right]_y dy.$$

Trotzdem wenigstens ein Theil des zweiten Intervalls $[\varphi(\gamma)$ $\varphi(\beta)]$ dem ersten $[\varphi(\alpha), \varphi(\gamma)]$ angehört und bei den Integra-

tionen diese gemeinsamen Theile in entgegengesetztem Sinn durchlaufen werden, kann man doch nicht behaupten, dass die zwei Integrale auf der rechten Seite sich auf ein einziges von $\varphi(\alpha)$ bis $\varphi(\beta)$ erstrecktes Integral reduciren. Denn offenbar hat $\left[\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\right]_y$, als Function von y betrachtet, für denselben Werth von y in den beiden Integralen wenigstens im Allgemeinen nicht denselben Werth, weil die zu demselben y gehörigen Werthe von x, welche in $\left[\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\right]_y$ auftreten, im Allgemeinen verschieden sind.

Ist z. B. $y = \varphi(x) = \sin x$, so erhält man

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \int_0^1 \left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]_y dy + \int_1^0 \left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]_y dy$$

oder:

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{f(\operatorname{arc\,sin} y)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy + \int_0^1 \frac{f\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,cos} y\right)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy,$$

worin die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist und arc sin y und arc cos y Bögen, die kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind, bezeichnen, die y zum Sinus oder Cosinus haben. Offenbar ist im Allgemeinen keineswegs

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = 0.$$

Zwanzigstes Kapitel.

Integration unendlicher Reihen. Die Grenzwerthe bestimmter Integrale.

§ 278. Wir gehen nun dazu über, die Integration durch Reihen zu besprechen und behandeln dabei die Fälle, in denen der Satz von der Integration endlicher Summen auf unendliche Reihen Anwendung findet, das heisst also, in denen das

bestimmte Integral der Summe einer gegebenen Reihe die Summe der Reihe ist, die aus den bestimmten Integralen der einzelnen Glieder der ursprünglichen Reihe gebildet wird. Man sagt in diesem Fall, die Reihe könne gliedweise integrirt werden.

Wir beginnen damit, den folgenden Lehrsatz zu begründen:

Wenn die Glieder $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ einer unendlichen Reihe

$$\sum_1^\infty u_n$$

endliche und integrirbare Functionen von x in einem endlichen Intervall (α, β) sind und die Reihe selbst in diesem Intervall gleichmässig convergirt, so ist auch die Summe $f(x)$ der Reihe nicht nur überall zwischen α und β eine endliche Function von x, sondern sie ist auch der Integration fähig. Die Reihe

$$\sum_1^\infty \int_\alpha^\beta u_n,$$

die aus den von α bis β erstreckten Integralen der einzelnen Glieder der gegebenen Reihe

$$\sum_1^\infty u_n$$

gebildet wird, convergirt alsdann und ihre Summe ist das zwischen α und β genommene bestimmte Integral der Summe $f(x)$ der Reihe

$$\sum_1^\infty u_n.$$

Das heisst also, es ist die Integration durch Reihen anwendbar und es besteht die Beziehung:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum_1^\infty \int_\alpha^\beta u_n\,dx. \tag{56}$$

Denn, wenn man unter n eine beliebige endliche Zahl versteht, so ist

$$f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + R^n, \qquad (57)$$

worin R_n der Rest der Reihe

$$\sum_1^\infty u_n$$

ist. Da diese Reihe in dem Intervall (α, β) gleichmässig convergirt, so existirt zu jeder positiven noch so kleinen Zahl σ eine endliche Zahl m der Art, dass für Werthe von n, die grösser als m sind und, für jeden zwischen α und β (α und β eingeschlossen) liegenden Werth von x, $|R_n| < \sigma$ ist.

Es sei sonach n bereits grösser als jene Zahl m. Denkt man sich dann das Integral (α, β) in die Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ zerlegt und bezeichnet mit $D_{1,s}, D_{2,s}, \ldots, D_{n,s}, D_{f,s}, D_{R,s}$ die Schwankungen von $u_1, u_2, \ldots, u_n, f(x)$ und R_n in dem Intervall δ_s, so ist:

$$D_{f,s} < D_{1,s} + D_{2,s} + \cdots + D_{n,s} + D_{R,s}.$$

Denn offenbar übersteigen die Werthe der $f(x)$ in dem Intevall δ_s nicht die Summe der oberen Grenzwerthe von $u_1, u_2, \ldots, u_n$ und R_n in demselben Intervall und bleiben nicht hinter der Summe der unteren Grenzwerthe dieser Grössen zurück. Weil nun aber $D_{R,s}$ in jedem beliebigen Intervall δ_s, wie wir vorhin gesehen haben, kleiner als 2σ ist, so findet man

$$\sum_1^p \delta_s D_{f,s} < \sum_1^p \delta_s D_{1,s} + \sum_1^p \delta_s D_{2,s} + \cdots$$
$$+ \sum_1^p \delta_s D_{n,s} + 2\sigma(\beta - \alpha).$$

Da nun $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ zwischen α und β integrirbar sind, kann man, nachdem n und σ fest gewählt worden sind, die $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ so klein nehmen, dass die einzelnen Summen auf der rechten Seite kleiner als eine beliebige Zahl z. B. $\frac{\sigma}{n}$ sind. Dann erhält man

$$\sum_1^p \delta_s D_{f,s} < \sigma + 2\sigma(\beta - \alpha).$$

Daraus ergiebt sich, weil σ willkürlich klein ist, dass (§ 185) die Summe $f(x)$ der Reihe

$$\sum_1^\infty u_n$$

sich in dem Intervall (α, β) zur Integration eignet.

Die Integrirbarkeit der $f(x)$ hat auch diejenige von R_n zur Folge; die Gleichung (57) liefert daher:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \sum_1^n \int_\alpha^\beta u_n\,dx = \int_\alpha^\beta R_n\,dx.$$

Wenn man nun, wie bisher, voraussetzt, n sei grösser als die oben näher bezeichnete Zahl m und es sei $|R_n| < \sigma$ für alle Werthe von x zwischen α und β, so ist offenbar:

$$\left|\int_\alpha^\beta R_n\,dx\right| < \sigma(\beta - \alpha).$$

Man erhält daher wieder für jeden beliebigen Werth von n, der grösser als m ist:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \sum_1^n \int_\alpha^\beta u_n\,dx\right| < \sigma(\beta - \alpha).$$

Daraus geht dann hervor, dass die Reihe

$$\sum_1^\infty \int_\alpha^\beta u_n\,dx$$

convergirt und dass sie das Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

der Summe der gegebenen Reihe

$$\sum_1^n u_n$$

zur Summe hat. Damit ist der obige Satz vollständig bewiesen.

Zu bemerken ist noch, dass es nach dieser Beweisführung vollständig ausreicht, wenn die Reihe

$$\sum_1^\infty u_n$$

einfach gleichmässig (§ 91) zwischen den Grenzen α und β convergirt, um daraus den Schluss ziehen zu können, dass die Summe dieser Reihe zwischen denselben Grenzen integrirbar ist. So lange man aber die Untersuchung allgemein führt und dieselbe nicht durch weitere Bedingungen einschränken will, muss man, um den obigen Beweis zu führen, annehmen, die Convergenz der gegebenen Reihe Σu_n sei durchaus gleichmässig[1]).

§ 279. Macht man dieselben Voraussetzungen wie im vorigen Satz, so erhält man auch die Formel

$$\left| \int_\alpha^x f(x)\,dx - \sum_1^n \int_\alpha^x u_n\,dx \right| < \sigma(\beta - \alpha),$$

die für alle Werthe von x zwischen α und β gilt. Da die Differenz auf der linken Seite nichts Anderes als der Rest

$$\sum_{n+1}^\infty \int_\alpha^x u_n\,dx$$

der Reihe der von α bis x erstreckten Integrale ist, so kann man auch behaupten: Wenn die Glieder $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ der Reihe

$$\sum_1^\infty u_n$$

zwischen α und β endlich und integrirbar sind und diese Reihe in dem Intervall (α, β) gleichmässig convergirt, so ist auch die Reihe

$$\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n\,dx$$

der von α bis x erstreckten Integrale in demselben Intervall (α, β) gleichmässig convergent.

1) Vgl. hierzu Du Bois-Reymond, Sitzungsber. d. Berl. Ak. 1886. S. 359.

§ 280. Dazu kommt dann noch das Folgende: Zu den Reihen, die in jedem beliebigen endlichen Intervall convergiren, gehören auch jene Reihen, welche das Princip der Verdichtung der Singularitäten liefert. Da ferner die einzelnen Glieder dieser letzteren Reihen stets endlich und integrirbar sind, so findet man, wie in § 187, 3, dass die durch solche Reihen dargestellten Functionen in jedem beliebigen endlichen Intervall integrirbar sind und dass ihr Integral und die Summe der Reihe der Integrale der einzelnen Glieder, falls beiderseits die Integrale zwischen denselben Grenzen genommen werden, identisch sind. So kann man auch auf diesem Weg unzählige Functionen, die, obgleich stets endlich und stetig, doch in einer unendlich grossen Anzahl von Punkten eines jeden beliebigen endlichen Theils des betrachteten Intervalls ohne Derivirte sind, in analytischer Form darstellen.

---

§ 281. Nach dem, was wir bisher gesagt haben, muss man wissen, dass eine Reihe zwischen den gewollten Integrationsgrenzen gleichmässig convergirt, um Gewissheit darüber zu haben, ob diese Reihe einer gliedweisen bestimmten Integration unterworfen werden kann. Doch auch, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, können unter Umständen besondere Eigenthümlichkeiten der gegebenen Reihe es ermöglichen, die bestimmte Integration zwischen vorgeschriebenen Grenzen auf sie anzuwenden. Man darf aber nicht übersehen, dass, auch wenn die Bedingung gleichmässiger Convergenz nicht erfüllt ist, es sehr wohl zuweilen vorkommen kann, dass die Summe der Reihe stetig ist, obwohl die Reihe der Integrale ihrer Glieder divergirt oder unbestimmt ist, oder wenn die letztere Reihe convergirt, dass sie dann von dem Integral der Summe der gegebenen Reihe abweicht.

Sind z. B. die Glieder einer Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} u_n$$

zwischen α und β endlich und stetig und können der Art zerlegt werden, dass sie die Form annehmen $u_n = v_n - v_{n+1}$, wobei die Functionen v_n (wie die u_n) zwischen α und β end-

lich und stetig sind, für $x = \alpha$ verschwinden und mit unbeschränkt wachsendem n zwar der Null zustreben, aber für die verschiedenen Werthe von x nicht mit gleichmässiger Geschwindigkeit, alsdann ist die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} u_n$$

zwischen α und β nicht gleichmässig convergent, obgleich ihre Summe die endliche und stetige Function v_1 ist. Ihr Integral zwischen α und x ist

$$\int_{\alpha}^{x} v_1 \, dx,$$

während die Reihe der Integrale

$$\sum_{1}^{\infty} \int_{\alpha}^{x} u_n \, dx$$

die Differenz

$$\int_{\alpha}^{x} v_1 \, dx - \int_{\alpha}^{x} v_{n+1} \, dx$$

zur Summe ihrer n ersten Glieder hat. Wenn daher das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} v_{n+1} \, dx$$

der in v_n vorhandenen Eigenthümlichkeit wegen zum Grenzwerth nicht Null hat, so ist die gliedweise Integration nicht anwendbar, vielmehr kann die Reihe der Integrale

$$\sum_{1}^{\infty} \int_{\alpha}^{x} u_n \, dx$$

je nach dem Werth des Integrals

$$\int_{\alpha}^{x} v_{n+1} \, dx$$

auch unbestimmt sein oder divergiren.

Ein solches Verhalten zeigen nun unzählige Reihen

$$\sum_1^x u_n.$$

Wenn z. B. die Functionen v_n, die zur Zerlegung der u_n dienen, durch die Gleichung

$$v_n = \frac{k_n \varphi_n'(x)}{1 + \varphi_n^2(x)}$$

gegeben sind, in welcher k_n eine Function von n bedeutet, die mit n ins Unendliche wachsen kann, und $\varphi_n(x)$ ebenso wie ihre Ableitung $\varphi_n'(x)$ eine zwischen α und β endliche und stetige Function ist, welche für $x = \alpha$ verschwindet, dagegen für von α verschiedene x mit n unbegrenzt wächst, so jedoch, dass v_n der Null zustrebt, so erhält man:

$$\int_\alpha^x v_{n+1}\,dx = k_{n+1} \text{ arc tang } \varphi_{n+1}(x)$$

und

$$\int_\alpha^x v_1\,dx = k_1 \text{ arc tang } \varphi_1(x),$$

worin mit arc tang z allgemein der kleinste Bogen bezeichnet wird, dessen Tangente z ist. Wenn daher

$$k_{n+1} \text{ arc tang } \varphi_{n+1}(x)$$

weder Null ist noch der Null zustrebt, so ist die Summe der aus den Integralen der Glieder der gegebenen Reihe

$$\sum_1^x \left[\frac{k_n \varphi_n'(x)}{1 + \varphi_n^2(x)} - \frac{k_{n+1} \varphi_{n+1}'(x)}{1 + \varphi_{n+1}^2(x)}\right]$$

gebildeten Reihe mit dem Integral k_1 arc tang $\varphi_1(x)$ nicht identisch, vielmehr kann die Reihe der Integrale auch unbestimmt sein oder divergiren.

Ist speciell $\varphi_n(x) = h_n(x - \alpha)^2$, worin h_n eine positive Zahl ist, die mit n unbegrenzt wächst, so ist für von α verschiedene x

$$\lim \text{ arc tang } \varphi_n(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Die Reihe der Integrale convergirt daher, fällt aber mit dem Integral der Summe der gegebenen Reihe jedesmal dann nicht zusammen, wenn k_n einen bestimmten und endlichen von Null

verschiedenen Grenzwerth hat. Wird dagegen z. B. $k_n = \sqrt{h_n}$ gesetzt, so divergirt die Reihe der Integrale, wogegen dieselbe Reihe beispielsweise für $k_n = \sin h_n$ für unendlich viele Formen der Function h_n unbestimmt ist[1]).

Ist in einem andern Fall

$$v_n = \frac{k_n \varphi_n'(x)}{1 + \varphi_n(x)}$$

und kann k_n wieder mit n unbeschränkt wachsen, während $\varphi_n(x)$ ebenso wie ihre Derivirte $\varphi_n'(x)$ für $x = \alpha$ verschwindet, diese Functionen im Uebrigen aber stets endlich und stetig verlaufen und so beschaffen sind, dass v_n bei unbeschränkt wachsendem n entweder Null ist oder Null zum Grenzwerth hat, so gilt die Gleichung:

$$\int_\alpha^x v_{n+1}\, dx = k_{n+1}\, l\, [1 + \varphi_{n+1}(x)].$$

Je nach dem Verhalten des Grenzwerthes von $k_n\, l\, [1 + \varphi_n(x)]$ für $n = \infty$ ist jetzt die Reihe der Integrale

$$\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n\, dx$$

von dem Integral der Summe der ursprünglichen Reihe Σu_n verschieden und kann divergiren oder unbestimmt sein trotzdem, dass die ursprüngliche Reihe

$$\sum_1^\infty u_n$$

stets convergirt und ihre Summe $\frac{k_1 \varphi_1'(x)}{1 + \varphi_1(x)}$ für jeden zwischen α und β liegenden Werth von x endlich und stetig ist.

Wenn z. B. wieder $\varphi_n(x) = h_n(x - \alpha)^2$ gesetzt wird mit der Bedingung dass, bei unbegrenzt wachsendem n, k_n gegen Null abnimmt und h_n durch positive Werthe ins Unendliche wächst, so ist:

---

1) Vgl. auch Cantor, Math. Ann. Bd. 16 S. 269.

$$\sum_1^n \int_\alpha^x u_n dx - \int_\alpha^x dx \sum_1^\infty u_n = - k_{n+1} l[1 + h_{n+1}(x-\alpha)^2] =$$
$$= - k_{n+1} l h_{n+1} - k_{n+1} l \left[\frac{1}{h_{n+1}} + (x-\alpha)^2\right].$$

Darin hat das letzte Glied auf der rechten Seite bei unbeschränkt wachsendem n Null zum Grenzwerth. Ist deshalb z. B. $k_n = \frac{1}{l h_n}$, so convergirt die Reihe der Integrale

$$\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx,$$

hat aber nicht das Integral

$$\int_\alpha^x dx \sum_1^\infty u_n$$

der Summe der gegebenen Reihe zur Summe. Ist dagegen $k_n = \frac{\sin h_n}{l h_n}$, so ist jene Reihe für unendlich viele Formen der Function h_n unbestimmt, für $k_n = \frac{1}{\sqrt{l h_n}}$ schliesslich divergirt sie.

---

§ 282. Wir kehren nun zu der allgemeinen Behandlung der Frage zurück und beweisen den folgenden Satz: Es werde vorausgesetzt, die Reihe

$$\sum_1^\infty u_n$$

convergire in allen Punkten eines endlichen Intervalls (α, β), höchstens mit Ausnahme einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge G der ersten Gattung, in welcher alle oder gewisse Glieder derselben unendlich gross oder unbestimmt werden oder in welchen die gegebene Reihe divergirt oder unbestimmt ist. Zugleich mögen die Glieder $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ derselben, wenn ihnen auch in den Punkten, in denen sie unbestimmt sind, beliebige Werthe beigelegt

werden, sich zwischen α und β zur Integration eignen; ferner convergire die Reihe der Integrale

$$\sum_1^{x} \int_\alpha^x u_n dx$$

und stelle eine zwischen α und β endliche und stetige Function dar; schliesslich sei die gliedweise Integration auf die Reihe $\sum\limits_1^{x} u_n$ in denjenigen Intervallen anwendbar, in welchen sie bestimmt und endlich ist. Alsdann ist die Summe dieser Reihe

$$\sum_1^{\infty} u_n ,$$

wenn ihr in den Punkten, in denen sie unbestimmt ist, beliebige Werthe beigelegt werden, auch in dem ganzen Intervall (α, β) integrirbar, und ihr Integral kann vermöge der Formel

$$\int_\alpha^x dx \sum_1^{x} u_n = \sum_1^{x} \int_\alpha^x u_n dx \tag{58}$$

für jeden beliebigen Werth von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen) durch gliedweise Integration gefunden werden.

Denn bezeichnet unter diesen Voraussetzungen $F(x)$ die Function, die durch die Reihe der Integrale

$$\sum_1^{x} \int_\alpha^x u_n dx$$

dargestellt wird, so genügt sie in Bezug auf das Integral

$$\int_\alpha^x dx \sum_1^{x} u_n$$

den Bedingungen des § 233, falls derselbe, wie offenbar möglich ist, auch auf den Fall ausgedehnt wird, dass die dort mit $f(x)$ bezeichnete Function zwischen α und β in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge unbestimmt wird.

$$\sum_1^\infty u_n$$

ist daher in dem ganzen Intervall (α, β) integrirbar und die Gleichung (58) gilt für jeden Werth von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen), wie wir behauptet hatten.

---

§ 283. Erinnert man sich speciell an die Sätze über die gleichmässig convergenten Reihen, die aus stetigen Gliedern zusammengesetzt sind (§ 98), so erkennt man, dass auch der folgende Satz gilt: Wenn die Reihe

$$\sum_1^\infty u_n$$

zwischen α und β nur im Allgemeinen gleichmässig oder in denjenigen Intervallen gleichmässig convergirt, welche übrig bleiben, wenn man durch kleine Umgebungen eine endliche oder unendlich grosse Punktmenge der ersten Gattung ausscheidet, in denen die Reihe divergirt oder unbestimmt ist, wenn dagegen die Reihe der Integrale

$$\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx$$

in dem ganzen Intervall (α, β) gleichmässig convergirt, alsdann ist die gliedweise Integration in jedem Intervall zwischen α und β auf die gegebene Reihe

$$\sum_1^\infty u_n$$

anwendbar.

---

§ 284. Hinsichtlich der Integration von Reihen zwischen unendlich grossen Grenzen bemerken wir: Wenn auf die Reihe

$$\sum_1^\infty u_n$$

die gliedweise Integration in jedem beliebig grossen aber endlichen Intervall (α, β) anwendbar ist, so gilt dies auch von dem unendlich grossen Intervall (α, ∞) und es ist

$$\int_\alpha^\infty dx \sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty \int_\alpha^\infty u_n dx$$

jedesmal dann, wenn die Integralreihe

$$\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx$$

convergirt und eine auch für $x = \infty$ endliche und stetige Function darstellt.

Denn, wenn man die Summe der Reihe der Integrale mit $F(x)$ bezeichnet, so folgt aus § 258 und der Formel

$$F(x) - F(\alpha) = \int_\alpha^x dx \sum_1^\infty u_n,$$

welche nach unsern Voraussetzungen für alle endlichen Werthe von x gilt, die Beziehung:

$$F(\infty) - F(\alpha) = \int_\alpha^\infty dx \sum_1^\infty u_n.$$

Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass für die gegebene Reihe

$$\sum_1^\infty u_n$$

in jedem beliebigen endlichen Intervall zwischen α und ∞ in der oft genannten Form von Mengen erster Gattung auch Punkte auftreten können, in denen sie divergirt oder unbestimmt wird, oder Punkte, in denen ihre Glieder sämmtlich oder zum Theil unendlich gross oder unbestimmt werden etc.

§ 285. Zuweilen wird gefordert, dass man eine gegebene Reihe

$$\sum_1^\infty u_n,$$

auf welche sich die gliedweise Integration anwenden lässt, ehe man zur Integration schreitet, mit einer gewissen Function U multipliciren soll. Wenn dann die Reihe

$$\sum_1^\infty u_n$$

in den endlichen Intervallen (α, β) gleichmässig convergirt und U endlich ist, so ist auch die Reihe

$$\sum_1^\infty U u_n$$

gleichmässig convergent. Es genügt daher, sich von der Integrirbarkeit der Function U zu überzeugen, wenn man gewiss sein will, dass für alle Werthe von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen) die Gleichung besteht

$$\int_\alpha^x dx\, U \sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty \int_\alpha^x U u_n\, dx.$$

Ist ferner die Reihe

$$\sum_1^\infty u_n$$

zwischen α und β nicht gleichmässig convergent oder ist man wenigstens darüber im Ungewissen, oder ist das Intervall (α, β) unendlich gross, so gilt der Satz: Wenn von der gegebenen Reihe

$$\sum_1^\infty u_n$$

nur bekannt ist, dass sie für jeden Werth von x in dem endlichen oder unendlich grossen Intervall (α, β) convergirt und dass auf sie die gliedweise Integration in diesem Intervall angewendet werden kann, so besteht die Gleichung

$$\int_{\alpha}^{x} dx\, U \sum_{1}^{\infty} u_n = \sum_{1}^{\infty} U u_n\, dx$$

für alle Werthe von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen) jedesmal dann, wenn die Integralreihe

$$\sum_{1}^{\infty} \int_{\alpha}^{x} u_n\, dx \quad \text{der} \quad \sum_{1}^{\infty} u_n$$

zwischen α und β gleichmässig convergirt und wenn die Function U zwischen α und β stets endlich verläuft und entweder keine Schwankungen oder doch nur eine endliche Anzahl derselben erleidet.

Denn nach der Voraussetzung, dass sich auf die gegebene Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} u_n$$

die gliedweise Integration anwenden lässt, gilt die Geichung:

$$\sum_{1}^{\infty} \int_{\alpha}^{x} u_n\, dx = \int_{\alpha}^{x} dx \sum_{1}^{\infty} u_n = \int_{\alpha}^{x} dx \sum_{1}^{n} u_n + \int_{\alpha}^{x} R_n\, dx =$$

$$= \sum_{1}^{n} \int_{\alpha}^{x} u_n\, dx + \int_{\alpha}^{x} R_n\, dx,$$

worin R_n der Rest der Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} u_n$$

von dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Glied ab ist, also das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} R_n\, dx$$

den entsprechenden Rest der Reihe der Integrale

$$\sum_{1}^{\infty} \int_{\alpha}^{x} u_n\, dx$$

bedeutet. Nach der Voraussetzung also, dass die letztgenannte Reihe in dem endlichen oder unendlich grossen Intervall (α, β),

in welchem sie in Betracht kommt, gleichmässig convergiren soll, muss offenbar zu jeder positiven und beliebig kleinen Zahl σ eine solche Zahl m existiren, dass das Integral

$$\int_\alpha^x R_n\,dx$$

für jeden beliebigen Werth von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen), wenn $n > m$, numerisch stets kleiner ausfällt als σ.

Weil ferner die Function U zwischen α und β Schwankungen, wenn überhaupt, nur in endlicher Anzahl macht, so ist sie und sind daher auch die Producte $Uu_1, Uu_2, \ldots, Uu_3 \ldots$ sowie $U\sum_1^n u_n$, UR_n zwischen α und β integrirbar und man erhält:

$$\int_\alpha^x U \sum_1^x u_n\,dx = \int_\alpha^x \sum_1^n Uu_n\,dx + \int_\alpha^x UR_n\,dx =$$

$$= \sum_1^n \int_\alpha^x Uu_n\,dx + \int_\alpha^x UR_n\,dx.$$

Nach einem bekannten Satz (§§ 207 und 262) ist aber absolut genommen

$$\int_\alpha^x UR_n\,dx < pU_1\sigma,$$

wenn man unter p eine endliche Zahl und unter U_1 die obere Grenze der Absolutwerthe von U zwischen α und x oder α und β versteht. Die Reihe

$$\sum_1^x \int_\alpha^x Uu_n\,dx$$

convergirt daher offenbar und ihre Summe wird durch das Integral

$$\int_\alpha^x U \sum_1^\infty u_n \, dx$$

dargestellt, wie wir behauptet hatten.

Wir fügen hinzu, dass unter den in dem Satz enthaltenen Voraussetzungen die Integralreihe

$$\sum_1^\infty \int_\alpha^x U u_n \, dx$$

zwischen α und β gleichmässig convergirt, weil für jeden in diesem Intervall gelegenen Werth von x ihr Rest

$$\int_\alpha^x U R_n \, dx$$

numerisch kleiner als $p U_1 \sigma$ ist. Ferner behält der Satz auch dann seine Gültigkeit, wenn U zwischen α und β eine unendlich grosse Anzahl von Schwankungen macht, vorausgesetzt nur, dass die Function U in diesem Intervall alle Schwankungen verliert, wenn man ihr eine Function ersten Grades zufügt oder dieselbe von ihr wegnimmt.

---

§ 286. Wir beweisen ferner den Satz: Wenn die Glieder u_1, u_2, ... der Reihe

$$\sum_1^\infty u_n$$

zwischen α und β endlich und integrirbar sind, und wenn die Function U in dem Intervall (α, β) oder, falls es unendlich gross ist, in jedem endlichen Theil desselben stets endlich ist oder nur in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung unendlich gross wird, *alsdann* besteht wieder die Gleichung

$$\int_\alpha^x dx \, U \sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty \int_\alpha^x U u_n \, dx$$

für alle Werthe von x zwischen α und β und die Integralreihe

$$\sum_1^{\infty} \int_{\alpha}^{x} U u_n \, dx$$

convergirt in diesem Intervall jedesmal dann gleichmässig, wenn auch die Reihe

$$\sum_1^{\infty} u_n$$

gleichmässig convergent ist und die Function U auch integrirbar bleibt, falls sie auf ihre Absolutwerthe reducirt wird.

Denn unter diesen Voraussetzungen sind alle Glieder $U u_n$, sowie $U \sum_1^n u_n$, $U R_n$ zwischen α und β integrirbar und in der Gleichung

$$\int_{\alpha}^{x} dx \, U \sum_1^{\infty} u_n = \sum_1^{n} \int_{\alpha}^{x} U u_n \, dx + \int_{\alpha}^{x} U R_n \, dx$$

ist das Glied

$$\int_{\alpha}^{x} U R_n \, dx$$

von einem bestimmten Werth von n an aufwärts numerisch kleiner als

$$\sigma \int_{\alpha}^{x} | U | \, dx,$$

wenn σ eine beliebig kleine Zahl bedeutet. Die Reihe

$$\sum_1^{\infty} \int_{\alpha}^{x} U u_n \, dx$$

convergirt daher offenbar und hat das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} dx \, U \sum_1^{\infty} u_n$$

zur Summe.

Dabei convergirt die Reihe

$$\sum_1^{\infty} \int_\alpha^x U u_n \, dx$$

zwischen α und β gleichmässig, weil ihr Rest

$$\int_\alpha^x U R_n \, dx$$

von einem gewissen Werth von n an aufwärts numerisch kleiner als

$$\sigma \int_\alpha^x | U | \, dx$$

und daher auch kleiner als

$$\sigma \int_\alpha^\beta | U | \, dx$$

für jedes beliebige x ist. Damit ist der obige Satz vollständig bewiesen.

---

287. Wir beschäftigen uns zum Schluss noch mit den Grenzwerthen der bestimmten Integrale

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx.$$

Wir betrachten zu dem Ende den Fall, in welchem die Function $f(x)$, welche wir jetzt mit $f_\lambda(x)$ bezeichnen, von einem Parameter λ abhängt, welcher entweder alle Werthe zwischen λ_0 und ε (höchstens λ_0 ausgeschlossen) oder zwischen diesen Grenzen nur eine unendliche Anzahl von Werthen annehmen kann, von welchen λ_0 ein Grenzpunkt ist. Dabei sei unter λ_0 eine Zahl verstanden, die immer positiv vorausgesetzt werden kann, und ε bedeute eine hinreichend kleine positive oder negative, hier z. B. positive Zahl.

Wir setzen voraus, dass die Function $f_\lambda(x)$ für jeden der Werthe von λ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon$, die hier in Betracht kommen können, eine zwischen α und β integrirbare Function

von x sei und dass α und β entweder constant seien oder selbst wieder von λ abhängen; in letzterem Fall sollen sie jedoch für $\lambda = \lambda_0$ zur Rechten endliche oder unendlich grosse Grenzwerthe α_0 und β_0 annehmen. Unsere Aufgabe sei, den rechtsseitigen Grenzwerth des Integrals

$$\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx$$

für $\lambda = \lambda_0$ zu ermitteln.

Wir nehmen zu dem Ende zunächst an, α und β seien endlich und die Function $f_\lambda(x)$ sei für alle Werthe von x zwischen α und β (α und β eingeschlossen), höchstens mit Ausnahme der, einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge der ersten Gattung entsprechenden, Werthe $i_1, i_2, i_3, \ldots$ beständig endlich. Für $\lambda = \lambda_0$ habe ferner $f_\lambda(x)$ auf der rechten Seite einen bestimmten Grenzwerth $\psi(x)$, der stets endlich ist und höchstens bei der Annäherung des x an sämmtliche oder einige der Punkte $i_1, i_2, i_3, \ldots$ unbeschränkt ins Unendliche wächst; und in diesen Punkten $i_1, i_2, i_3, \ldots$ sei $f_\lambda(x)$ endlich oder unendlich gross oder auch unbestimmt und habe im letzteren Fall einen unendlich grossen oder gar keinen Grenzwerth, so jedoch, dass, wenn man $\psi(x)$ auch in diesen Punkten einen beliebigen bestimmten Werth beilegt, dieser Grenzwerth $\psi(x)$ eine zwischen α_0 und β_0 integrirbare Function von x wird.

Wir nehmen ferner an, man hätte nach einander mittelst hinreichend kleiner Intervalle die Punkte $i_1, i_2, i_3, \ldots$ auf die Art, wie in § 14, ausgeschlossen und wäre ebenso mit den Punkten α_0 und β_0 verfahren. Für jedes der so ausgeschlossenen Intervalle η_s oder doch wenigstens für die Theile dieser Intervalle, die in Folge des Werthes von λ[1]) in dem Integral

1) Wenn $(\alpha_0 - \delta,\ \alpha_0 + \delta)$ das Intervall bezeichnet, das den Punkt α_0 ausschliesst, und wenn ε_0' hinreichend klein ist, so befindet sich schliesslich die Zahl α offenbar immer in diesem Intervall. Setzt man daher z. B. $\alpha_0 < \beta_0$ voraus, so figurirt nicht das ganze über das erwähnte Intervall erstreckte Integral

$$\int_{\alpha_0-\delta}^{\alpha_0+\delta} f_\lambda(x)\,dx,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_{\lambda}(x)\,dx$$

auftreten, mögen die über diese Theile erstreckten Integrale

$$\int_{\eta_s} f_{\lambda}(x)\,dx\,, \quad \int_{\eta_s} \psi(x)\,dx$$

für alle zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon_0'$ liegenden Werthe von λ bei hinreichend kleinem ε_0', kleiner als jede beliebige noch so kleine Zahl σ_0 vorausgesetzt werden wenigstens dann, wenn die aufeinander folgenden Intervalle η_s passend ausgewählt werden. Wir nehmen schliesslich noch an, dass nach allen erwähnten Ausscheidungen die Function $f_{\lambda}(x)$ in allen Punkten x der übrig bleibenden Intervalle ξ_s gleichmässig gegen den entsprechenden Grenzwerth $\psi(x)$ convergire und zwar so, dass sich zu jeder noch so kleinen positiven Zahl σ eine Zahl $\varepsilon_0 < \varepsilon_0'$ auffinden lässt, die so klein ist, dass, für alle Werthe von λ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon_0$ (λ_0 ausgeschlossen) und für die sämmtlichen erwähnten Werthe von x, $|f_{\lambda}(x) - \psi(x)| < \sigma$ ist[1]).

Wenn man nun ähnlich verfährt wie in § 14 und ε_0' hinreichend klein annimmt, so lassen sich die Intervalle η_s, mit deren Hülfe die Punkte $i_1, i_2, i_3, \ldots, \alpha_0, \beta_0$ ausgeschieden werden, derart wählen, dass die Summe der entprechenden Integrale

$$\int_{\eta_s} \psi(x)\,dx, \quad \text{sowie der} \quad \int_{\eta_s} f_{\lambda}(x)\,dx$$

---

sondern nur der zwischen α und $\alpha_0 + \delta$ liegende Theil desselben in dem Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_{\lambda}(x)\,dx\,.$$

Dasselbe gilt vom Punkt β_0. — Dagegen treten bei den innerhalb des Intervalls (α, β) gelegenen Punkten $i_1, i_2, \ldots$ in dem Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_{\lambda}(x)\,dx$$

die auf die ausschliessenden Intervalle in ihrer ganzen Ausdehnung erstreckten Integrale auf.

1) Stolz, Math. Ann. Bd. 26 S. 83 ff.

für alle Werthe von λ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon_0'$ kleiner als eine ganz beliebig kleine Grösse σ_1 ausfällt. Man kann daher offenbar setzen:

$$\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)\,dx = \sum \int_{\xi_s} f_\lambda(x)\,dx + \sigma'$$

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)\,dx = \sum \int_{\xi_s} \psi(x)\,dx + \sigma''$$

worin σ' und σ'' Grössen bedeuten, die für alle zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon_0$ in Betracht kommenden Werthe von λ sich numerisch stets kleiner als σ_1 halten und worin die Integrale

$$\int_{\xi_s}$$

über die nicht ausgeschiedenen Intervalle ξ_s erstreckt werden.

Aus diesen Gleichungen erhält man aber:

$$\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)\,dx - \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)\,dx = \sum \int_{\xi_s} [f_\lambda(x) - \psi(x)]\,dx + \sigma' - \sigma''$$

und nach den Voraussetzungen lässt sich eine Zahl $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_0'$ ausfindig machen von der Beschaffenheit, dass für alle Werthe von λ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon_0$ und für alle Werthe von x zwischen den Integrationsgrenzen $|f_\lambda(x) - \psi(x)| < \sigma$ ausfällt. Daher ist offenbar:

$$\left|\sum \int_{\xi_s} [f_\lambda(x) - \psi(x)]\,dx\right| < \sigma(\beta_0 - \alpha_0)$$

und deshalb

$$\lim_{\lambda=\lambda_0} \int_\alpha^\beta f_\lambda(x)\,dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)\,dx.$$

Wenn daher die obigen Bedingungen in Bezug auf $f_\lambda(x)$ und ihren Grenzwerth $\psi(x)$ wie bezüglich der Integrale

$$\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)\,dx, \quad \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)\,dx$$

erfüllt sind und die Grenzwerthe α_0 und β_0 von α und β endlich sind, so existirt stets der Grenzwerth des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_{\lambda}(x)\,dx$$

und lässt sich ermitteln, indem man unter dem Integralzeichen und in den Grenzen des Integrals selbst den Uebergang zur Grenze vollzieht.

---

§ 288. Aber auch wenn über die Integrirbarkeit der $\psi(x)$ zwischen α und β und über die Ausdrücke

$$\int_{\xi_s} \psi(x)\,dx$$

nichts bekannt sein sollte, lässt sich, falls nur die übrigen Bedingungen sämmtlich erfüllt sind, behaupten, dass der Grenzwerth des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_{\lambda}(x)\,dx$$

eine bestimmte und endliche Grösse L ist.

Wenn nämlich, bei hinreichend kleinem ε_0, μ und ν zwei Werthe von λ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon_0$ bedeuten und wenn α', β' und α'', β'' die entsprechenden Werthpaare der α und β sind, so erhält man

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f_{\mu}(x)\,dx = \sum \int_{\xi_s} f_{\mu}(x)\,dx + \sum \int_{\eta_s} f_{\mu}(x)\,dx$$

$$\int_{\alpha''}^{\beta''} f_{\nu}(x)\,dx = \sum \int_{\xi_s} f_{\nu}(x)\,dx + \sum \int_{\eta_s} f_{\nu}(x)\,dx$$

und daher auch:

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f_{\mu}(x)\,dx - \int_{\alpha''}^{\beta''} f_{\nu}(x)\,dx = \sum \int_{\xi_s} [f_{\mu}(x) - f_{\nu}(x)]\,dx + \sigma' - \sigma_1',$$

wenn σ' und σ_1' Grössen bezeichnen, deren Absolutwerth abhängig von der Kleinheit des ε_0 und der Intervalle η_s ist und kleiner als jede beliebige Grösse angenommen werden kann. Es wird nun bei hinreichend kleinem ε_0, nach den in Bezug

auf $f_\lambda(x)$ gemachten Voraussetzungen, für alle Werthe von x, die in die Intervalle ξ_s fallen, und für alle Werthe μ und ν von λ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon_0$ (λ_0 ausgeschlossen)

$$|f_\mu(x) - f_\nu(x)| < 2\sigma$$

ausfallen, wobei σ willkürlich klein ausgewählt ist. Daraus folgt, dass immer bei hinreichend kleinem ε_0 und für alle Werthe μ und ν von λ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon_0$ die Differenzen

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f_\mu(x)\,dx - \int_{\alpha''}^{\beta''} f_\nu(x)\,dx$$

numerisch kleiner als jede vorgeschriebene Grösse σ'' sind. Dieses genügt, um behaupten zu können (§ 18), dass das Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

einen bestimmten und endlichen Grenzwerth L hat.

Anstatt ferner anzunehmen, dass die Integrale

$$\int_{\eta_s} f_\lambda(x)\,dx,$$

welche über die die singulären Punkte $i_1, i_2, \ldots$ ausschliessenden Intervalle η_s erstreckt sind, von einem bestimmten Werth von λ an aufwärts insgesammt so klein sind, wie immer verlangt werden kann, genügt es offenbar auch vorauszusetzen, dass dies für alle Werthsysteme von μ und ν, die λ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon_0$ bei hinreichend kleinem ε_0 annehmen kann, bei den Integralen

$$\int_{\eta_s} [f_\mu(x) - f_\nu(x)]\,dx$$

der Fall sei. Bemerkenswerth ist auch, dass der Grenzwerth L, dessen Existenz wir soeben nachgewiesen haben, nach dem vorigen Paragraphen identisch mit dem Integral der Grenzwerthe

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)\,dx$$

ist, falls auch dieses einen bestimmten und endlichen Werth hat.

§ 289. Wenn weiter die Grenzwerthe α und β constant und daher gleich α_0 und β_0 sind und zwischen α_0 und β_0 (α_0 und β_0 eingeschlossen) keine singulären Punkte $i_1, i_2, \ldots$ der $f_\lambda(x)$ oder der $\psi(x)$ existiren, so hat nothwendiger Weise die gleichmässige Convergenz der $f_\lambda(x)$ gegen ihren Grenzwerth $\psi(x)$ für alle Werthe von x zwischen α_0 und β_0 (α_0 und β_0 eingeschlossen) und die Integrirbarkeit der $f_\lambda(x)$ für alle Werthe von λ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon_0$ zur Folge, dass das Integral

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)\,dx$$

bestimmt und endlich ist und daher mit dem Grenzwerth des Integrals

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_\lambda(x)\,dx$$

für $\lambda = \lambda_0$ zusammenfällt.

Man hat in der That bei hinreichend kleinem ε_0 für alle Werthe von λ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon_0$ und für alle Werthe von x zwischen α_0 und β_0 (α_0 und β_0 eingeschlossen):

$$\psi(x) = f_\lambda(x) + \sigma',$$

wenn σ' numerisch kleiner als eine noch so kleine positive Zahl σ ist. Zerlegt man daher das Intervall (α, β) in die Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ und bezeichnet mit $D_{\lambda,s}$ und D_s die Schwankungen von $f_\lambda(x)$ und $\psi(x)$ in dem Intervall δ_s, so erhält man die Ungleichung:

$$D_s < D_{\lambda,s} + 2\sigma$$

und somit

$$\sum_1^n \delta_s D_s < \sum_1^n \delta_s D_{\lambda,s} + 2\sigma(\beta - \alpha).$$

Daraus geht dann hervor, dass, wenn α und β constant und gleich α_0 und β_0 sind, die gleichmässige Convergenz der $f_\lambda(x)$ gegen ihren Grenzwerth $\psi(x)$ und die Integrirbarkeit der $f_\lambda(x)$ zwischen α und β oder α_0 und β_0 nothwendiger Weise auch die Integrirbarkeit der $\psi(x)$ zur Folge hat und dass daher:

$$\lim \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_\lambda(x)\,dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)\,dx.$$

§ 290. Wir wollen jetzt wieder voraussetzen, α und β könnten mit λ variiren, aber immer so, dass ihre Grenzwerthe α_0 und β_0 bestimmt und endlich sind und annehmen, dass zwischen α_0 und β_0 singuläre Punkte $i_1, i_2, \ldots$ auftreten, die wie früher eine endliche oder unendlich grosse Menge der ersten Gattung bilden. Ferner mögen sich auf die Art wie in § 14 zu jeder Zahl σ nacheinander Intervalle η_s finden lassen, die diese Punkte und die Endpunkte α_0 und β_0 ausschliessen und von der Beschaffenheit sind, dass auch bei ihrer successiven Verkleinerung immer eine entsprechende Zahl ε (mit dem Kleinerwerden der Intervalle η_s veränderlich oder nicht) sich in der Weise ermitteln lässt, dass die den η_s entsprechenden Integrale

$$\int_{\eta_s} f_\lambda(x)\,dx$$

für alle Werthe von λ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon$ numerisch kleiner als σ sind. Alsdann hat, ähnlich wie vorhin, die Integrirbarkeit der $f_\lambda(x)$ zwischen α und β und ihre gleichmässige Convergenz gegen ihren Grenzwerth $\psi(x)$ in allen übrig bleibenden Intervallen ξ_s nothwendiger Weise zur Folge, dass $\psi(x)$ auch zwischen α_0 und β_0 integrirbar ist und dass die Gleichung besteht:

$$\lim \int_\alpha^\beta f_\lambda(x)\,dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)\,dx.$$

Denn, bezeichnet man mit L den Grenzwerth von

$$\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)\,dx,$$

der, wie in § 287 ausgeführt, zweifellos existirt, so erhält man für zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon$ liegende λ bei hinreichend kleinem ε:

$$\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)\,dx = L + \sigma' = \sum \int_{\xi_s} f_\lambda(x)\,dx + \sum \int_{\eta_s} f_\lambda(x)\,dx,$$

wo σ' und

$$\sum \int_{\eta_s} f_\lambda(x)\,dx$$

beliebig klein sind. Setzt man nun zunächst voraus, die Punkte $i_1, i_2, \ldots$ seien in endlicher Anzahl vorhanden, so enthalten die Intervalle ξ_s keine singulären Punkte und es ist, wie im vorigen Paragraphen bewiesen wurde:

$$\sum \int_{\xi_s} f_\lambda(x)\,dx = \sum \int_{\xi_s} \psi(x)\,dx + \sigma'',$$

wenn man unter σ'' eine neue beliebig kleine Zahl versteht. Daraus folgt:

$$L - \sum \int_{\xi_s} \psi(x)\,dx = \sigma_1,$$

mit der gleichen Massgabe für σ_1. Beachtet man daher, dass man höchstens nöthig hat, die Zahl ε entsprechend zu verkleinern, damit man die Intervalle η_s so klein voraussetzen kann, wie man nur will, ohne dass σ_1 aufhört, jeden vorgeschriebenen Grad von Kleinheit zu bewahren, so ergiebt sich aus der Definition des Integrals

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)\,dx$$

sofort:

$$L = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)\,dx.$$

Damit wäre unsere Behauptung für den Fall bewiesen, dass die Punkte $i_1, i_2, \ldots$ in endlicher Anzahl vorkommen.

Auf die bekannte Art lässt sich dieses Resultat dann auch auf den andern Fall ausdehnen, dass die genannten Punkte eine beliebige unendliche grosse Menge der ersten Gattung bilden.

---

§ 291. Will man sich überzeugen, ob das Integral

$$\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)\,dx$$

einen bestimmten und endlichen Grenzwerth hat und ob derselbe identisch mit

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)\,dx$$

ist, so genügt es offenbar, an Stelle der Bedingungen in § 287 die Voraussetzungen des vorigen Paragraphen treten zu lassen. Sollte das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)\,dx$$

einen bestimmten und endlichen Grenzwerth L haben, dieser aber nicht mit dem Integral der Grenzwerthe

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)\,dx$$

zusammenfallen, sei es nun, weil das letztere nicht bestimmt und endlich ist, sei es, weil es von L verschieden ist, dann müssen einige von den gestellten Bedingungen nicht erfüllt sein. Das wäre beispielsweise der Fall, wenn unendlich viele singuläre Punkte zwischen α_0 und β_0 vorhanden wären, die eine Menge der zweiten Gattung bilden, oder wenn $f_\lambda(x)$ in den Intervallen ξ_s nicht gleichmässig gegen $\psi(x)$ convergirte oder den Bedingungen des vorigen Paragraphen in Bezug auf die Intervalle η_s nicht genügt werden könnte.

---

§ 292. Wir gehen nun dazu über, den Fall zu untersuchen, in welchem wenigstens eine der beiden Grenzen des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)\,dx$$

unendlich gross ist oder für $\lambda = \lambda_0$ rechts oder links, hier z. B. rechts Unendlich zum Grenzwerth hat.

Zu dem Ende nehmen wir der Einfachheit wegen an, nur β sei unendlich gross oder habe Unendlich zum Grenzwerth, α dagegen sei endlich ebenso wie sein Grenzwerth α_0. Zwischen α und jeder festen und endlichen, im Uebrigen aber beliebig

grossen Zahl β_1 seien dann die bisherigen Bedingungen erfüllt, nach denen

$$\lim_{\lambda=\lambda_0} \int_{\alpha_0}^{\beta_1} f_\lambda(x) dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_1} \psi(x) dx.$$

Ferner sei das Integral

$$\int_{\alpha_0}^{\infty} \psi(x) dx$$

bestimmt und endlich und das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x) dx$$

habe, wenn λ sich dem λ_0 nähert, einerlei ob β schon unendgross ist oder noch unbeschränkt wächst, einen bestimmten und endlichen Werth und convergire für jeden Werth von λ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon_0$, wobei ε_0 bestimmt und hinreichend klein ist, mit wachsendem β gleichmässig gegen seinen Grenzwerth. Das letztere geschehe derart, dass es möglich ist, zu dem für ε_0 gewählten Werth und zu jeder positiven und willkürlich kleinen Zahl σ eine solche Zahl γ zu ermitteln, dass für jeden Werth von β', der zwischen γ und β liegt und für alle Werthe von λ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon_0$ (λ_0 ausgeschlossen)

$$\left| \int_{\beta'}^{\beta} f_\lambda(x) dx \right| < \sigma$$

ist. Nun ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x) dx - \int_{\alpha_0}^{\infty} \psi(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta_1} f_\lambda(x) dx - \int_{\alpha_0}^{\beta_1} \psi(x) dx +$$

$$+ \int_{\beta_1}^{\beta} f_\lambda(x) dx - \int_{\beta_1}^{\infty} \psi(x) dx.$$

Da ferner β_1 grösser als γ und so gross genommen werden kann, dass auch

$$\left| \int_{\beta_1}^{\infty} \psi(x) dx \right| < \sigma_1,$$

bei beliebig klein ausgewähltem σ_1 ist, und da die beiden ersten Integrale auf der rechten Seite so wenig verschieden von einander vorausgesetzt werden können, wie man nur will, so folgt, dass unter den von uns gestellten Bedingungen die Gleichung gilt:

$$\lim_{\lambda=\lambda_0} \int_\alpha^\beta f_\lambda(x)\,dx = \int_\alpha^\infty \psi(x)\,dx.$$

Dieselbe verallgemeinert die Eigenschaft, die in § 287 unter der Voraussetzung nachgewiesen wurde, dass α und β ebenso wie ihre Grenzwerthe endlich sind.

---

§ 293. Um den vorstehenden Beweis zu führen, ist es eigentlich gar nicht nöthig vorauszusetzen, dass das Integral

$$\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)\,dx$$

gleichmässig für alle Werthe von λ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon_0$ convergire; es genügt offenbar die Annahme, dass zu jeder positiven und beliebig kleinen Zahl σ ein specielles β_1 existirt, das grösser als eine hinreichend grosse Zahl ist (das heisst grösser als diejenige, von welcher ab

$$\left| \int_{\beta_1}^\infty \psi(x)\,dx \right| < \sigma_1$$

ausfällt) und zu welchem sich eine entsprechende Zahl ε von der Beschaffenheit ermitteln lässt, dass für alle Werthe von λ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon$

$$\left| \int_{\beta_1}^\beta f_\lambda(x)\,dx \right| < \sigma$$

ist.

Wir wollen nun die folgenden Voraussetzungen machen. Man wisse nichts über die Integrirbarkeit der $\psi(x)$ zwischen α und ∞, im Uebrigen seien aber alle andern Bedingungen des vorigen Paragraphen erfüllt und auch diejenige in Bezug

auf die gleichmässige Convergenz der $f_\lambda(x)$ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon_0$ oder derjenigen bezüglich der Existenz eines speciellen, der Zahl σ zugeordneten β_1 für welches

$$\left| \int_{\beta_1}^{\beta} f(x)\,dx \right|$$

zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon$ bei hinreichend kleinem ε hinter σ zurückbleibt. Alsdann hat das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)dx$$

zwar für $\lambda = \lambda_0$ auf der rechten Seite einen bestimmten und endlichen Grenzwerth; dieser Grenzwerth braucht aber durchaus nicht mit dem Integral

$$\int_{\alpha_0}^{\infty} \psi(x)dx$$

identisch zu sein, wie denn nicht einmal die Existenz des letzteren sicher ist.

Sind in der That μ und ν zwei beliebige Werthe von λ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon$, ist ε hinreichend klein und sind α', β' und α'', β'' die entsprechenden Werthe von α und β und hat β_1 die eben erwähnte Bedeutung, so ist offenbar:

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f_\mu(x)dx - \int_{\alpha''}^{\beta''} f_\nu(x)dx = \int_{\alpha'}^{\beta_1} f_\mu(x)dx - \int_{\alpha''}^{\beta_1} f_\nu(x)dx + $$
$$+ \int_{\beta_1}^{\beta'} f_\mu(x)dx - \int_{\beta_1}^{\beta''} f_\nu(x)dx.$$

Weil nun die beiden letzten Integrale auf der rechten Seite nach der Voraussetzung willkürlich klein sind und die beiden ersten bei genügend kleinem ε so wenig man nur will von

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_1} \psi(x)\,dx$$

abweichen, so folgt aus § 18, dass das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)\,dx$$

einen bestimmten und endlichen Grenzwerth L für $\lambda = \lambda_0$ hat. Daraus folgt aber durchaus nicht, dass das Integral

$$\int_{\alpha_0}^{\infty} \psi(x)\,dx$$

bestimmt und endlich sein und deshalb mit dem Grenzwerth L von

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)\,dx$$

zusammenfallen muss.

---

§ 294. Wenn aber bei hinreichend kleinem ε_0 die Convergenz des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)\,dx$$

zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon_0$ gleichmässig erfolgt oder allgemeiner, wenn jeder positiven und willkürlich kleinen Zahl σ eine Zahl γ so zugeordnet ist, dass sich zu jedem Werth von β_1, der grösser als γ ist, eine Zahl ε von der Beschaffenheit finden lässt, dass für jedes zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon$ gelegene λ, wenn β bereits grösser geworden ist als β_1,

$$\left| \int_{\beta_1}^{\beta} f_\lambda(x)\,dx \right| < \sigma$$

ist, alsdann hat das Integral

$$\int_{\alpha_0}^{\infty} \psi(x)\,dx,$$

falls die übrigen Voraussetzungen in Geltung bleiben, den bestimmten und endlichen Werth L.

Denn man erhält dann für $\beta_1 > \gamma$ aus:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta_1} f_\lambda(x)\,dx + \int_{\beta_1}^{\beta} f_\lambda(x)\,dx$$

die Gleichung:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta_1} f_\lambda(x)\,dx + h\sigma,$$

wenn h numerisch kleiner als die Einheit ist. Da man ferner ε so klein voraussetzen kann, dass für alle Werthe von λ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon$ die Integrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)\,dx, \quad \int_{\alpha}^{\beta_1} f_\lambda(x)\,dx$$

von ihren bezüglichen Grenzwerthen L und

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_1} \psi(x)\,dx$$

um weniger als eine positive beliebig kleine Zahl σ_1 abweichen, so ist für alle Werthe von β_1, die grösser als γ sind,

$$L - \int_{\alpha_0}^{\beta_1} \psi(x)\,dx = 2h'\sigma_1 + h\sigma,$$

wenn h_1 numerisch kleiner als die Einheit ist. Dies beweist somit, dass das Integral

$$\int_{\alpha_0}^{\infty} \psi(x)\,dx$$

bestimmt und endlich ist und den Werth L hat.

Daraus geht dann offenbar hervor, dass, wenn die Bedingungen des vorigen Paragraphen erfüllt sind, nach welchen das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)\,dx$$

einen bestimmten und endlichen Grenzwerth L hat, dieser Grenzwerth aber nicht mit dem Integral

$$\int_{\alpha_0}^{x} \psi(x)\, dx$$

identisch ist, weil das letztere unendlich gross oder unbestimmt ist, unmöglich die früheren Bedingungen in Bezug auf die gleichmässige Convergenz des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)\, dx$$

zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon$ oder bezüglich der Integrale

$$\int_{\beta_1}^{\beta} f_\lambda(x)\, dx,$$

in welchen $\beta_1 > \gamma$, sämmtlich erfüllt sein können.

Diese Ergebnisse können auch dazu benutzt werden, um die Fälle zu bestimmen, in denen die bekannten Sätze über die Derivation oder Integration unter dem Integralzeichen in aller Strenge angewendet werden dürfen.

Verzeichniss der im Text angeführten Abhandlungen,

nach den Namen ihrer Verfasser geordnet.

Abkürzungen.

Jour. f. Math. = Journal für die reine und angewandte Mathematik; herausgegeben von Crelle, später von Borchardt und jetzt von Kronecker und Weierstrass.

Math. Ann. = Mathematische Annalen; herausgegeben von Clebsch und Neumann, später von Klein und Mayer, jetzt von Klein, Dyck und Mayer.

Zeitsch. f. Math. u. Ph. = Zeitschrift für Mathematik und Physik; herausgegeben von Schömilch, Kahl und Cantor.

Abel. 1) Untersuchungen über die Reihe

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \cdots$$

Jour. f. Math. Bd. 1. Seite 311—339.

2) Oeuvres complètes, rédigées par Holmboe; Christiania 1839. Bd. 1. Seite 66—92.

3) Oeuvres complètes. Nouvelle édition, publiée par Sylow et Lie. Christiania 1881. Bd. 1. Seite 219—250.

Ampère. Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées, qui conduisent etc. Journal de l'école polytechnique. Bd. 6. 13ième Cahier. (1806.) Seite 148—181.

Ascoli. Sul concetto del integrale definito. Atti della R. Accademia dei Lincei. Ser. 2. Vol. 2. 1874. 1875. Seite 862—872.

Bendixson. 1) Sur la puissance des ensembles parfaits de points. Bihang till Kong. Svenska Vetenskaps-Akademiens handlingar. Bd. 9. 1884/85. Heft 6 und 7.

2) Några studier öfver oändliga punktmängder. Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Forhandlingar. 40. Jahrgang. 1883. Heft 2. Seite 31—35.

Biermann. Theorie der analytischen Functionen. Leipzig 1887.[1]

---

1) Leider sind gerade die ersten Kapitel dieses Buches, die hier in Frage kommen, durch eine überaus grosse Zahl von Fehlern entstellt, so dass es sich zur ersten Einführung durchaus nicht eignet.

Bolzano. Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Aus den Abhandlungen der Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. 5. Prag 1817.

Cantor, G. 1) Beweis, dass eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Function $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt. Jour. f. Math. Bd. 72. Seite 139—142.

2) Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Math. Ann. Bd. 5. Seite 122—132.

3) Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. Journ. f. Math. Bd. 77. Seite 258—262.

4) Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Jour. f. Math. Bd. 84. S. 242—258.

5) Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Math. Ann. Bd. 15. Seite 1—7.

6) Desgl. Bd. 21. Seite 51—58.

7) Desgl. Bd. 21. Seite 545—591. Auch unter dem Titel: „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre". Leipzig 1883, besonders erschienen.

8) Desgl. Bd. 23. Seite 453—488.

9) Fernere Bemerkungen über trigonometrische Reihen. Math. Ann. Bd. 16. Seite 267—269.

10) Ueber ein neues und allgemeines Condensationsprincip der Singularitäten von Functionen. Math. Ann. Bd. 19. Seite 588—594.

11) De la puissance des ensembles parfaits de points. Acta Mathematica. Bd. 4. Seite 381—392.

Die unter Nr. 2, 3, 4, 5, 6, 7 angeführten Abhandlungen sind in Acta Mathematica. Bd. 2. Seite 305—408 in französischer Uebersetzung abgedruckt.

Cauchy. 1) Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants. Journal de l'école polytechnique. Bd. 12. 19ième Cahier. Seite 511—592.

2) Mémoire sur les intégrales définies. Gelesen 1814; aber erst 1825 in den „Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences. Sciences mathématiques et physiques. Bd. 1. Paris 1827. Seite 599—799" gedruckt. Wieder abgedruckt in den Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. Bd. 1. Paris 1882. Seite 319—509.

Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal. Tome prémier. Paris 1823. (Es ist kein weiterer Band erschienen.)

Darboux. 1) Mémoire sur les fonctions discontinues. Annales de l'école normale supérieure. Ser. 2. Bd. 4. Seite 57—112.

2) Addition au mémoire sur les fonctions discontinues. Ebenda. Bd. 8. Seite 195—202.

Dedekind. 1) Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig 1872.
2) Was sind und was sollen die Zahlen. Braunschweig 1888.

Dirichlet. 1) Sur la convergence des séries trigonométriques, qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. Jour. f. Math. Bd. 4. Seite 157—169.
2) Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen. Repertorium der Physik von Dove. Bd. 1. Seite 152—174. Beide Abhandlungen sind abgedruckt in Lejeune-Dirichlet's Werke; herausgegeben von Kronecker. Bd. 1. Berlin 1889. Seite 117—132 und 132—160.

Du Bois-Reymond. 1) Ueber die allgemeinen Eigenschaften der Classe von Doppelintegralen, zu welchen das Fourier'sche Doppelintegral gehört. Jour. f. Math. Bd. 69. Seite 65—108.
2) Bemerkungen über die verschiedenen Werthe, welche eine Function zweier reellen Variablen erhält, wenn man diese Variablen entweder nach einander oder gewissen Bedingungen gemäss gleichzeitig verschwinden lässt. Jour. f. Math. Bd. 70. Seite 10—45.
3) Antrittsprogramm, enthaltend neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen, zur Uebernahme der ordentlichen Professur für Mathematik an der Universität Freiburg verfasst. Freiburg i. Br. 1870.
4) Notiz über einen Cauchy'schen Satz, die Stetigkeit von Summen unendlicher Reihen betreffend. Math. Ann. Bd. 4. Seite 135—137.
5) Sur la grandeur rélative des infinis des fonctions. Annali d. Matematica. Ser. 2. Bd. 4. Seite 338—353.
6) Théorème général concernant la grandeur rélative des infinis des fonctions et de leurs dérivées. Jour. f. Math. Bd. 74. Seite 294—304.
7) Ueber die sprungweisen Werthänderungen analytischer Functionen. Math. Ann. Bd. 7. Seite 241—261.
8) Eine neue Theorie der Convergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern. Jour. f. Math. Bd. 76. Seite 61—91.
9) Beweis, dass die Coefficienten der trigonometrischen Reihen u. s. w. Abhandlungen der math.-phys. Classe der bayrischen Academie der Wissenschaften. Bd. 12. 1. Abtheilung. Seite 118—166.
10) Ueber asymptotische Werthe, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen. Math. Ann. Bd. 8. Seite 363—414.
11) Nachträge zur Abhandlung: Ueber asymptotische Werthe u. s. w. Ebenda. Bd. 8. Seite 574—576.
12) Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen. Jour. f. Math. Bd. 79. Seite 21—37.
13) Ueber eine veränderte Form der Bedingung für die Integrirbarkeit der Functionen. Jour. f. Math. Bd. 79. Seite 259—262.
14) Anzeige von Thomae's Schrift „Einleitung in die Theorie der

bestimmten Integrale“ in Zeitschrift f. Math. und Phys. 20. Jahrgang. 1875. Historisch-literarische Abtheilung. Seite 123—129.

15) Notiz über infinitäre Gleichheiten. Math. Ann. Bd. 10. Seite 576—578.

16) Notiz über Convergenz von Integralen mit nicht verschwindendem Argument. Math. Ann. Bd. 13. S. 251—254.

17) Ein allgemeiner Satz der Integrirbarkeitslehre. Math. Ann. Bd. 16. Seite 112.

18) Beweis des Fundamentalsatzes der Integralrechnung. Math. Ann. Bd. 16. Seite 115—128.

19) Ein allgemeiner Satz über die Integrirbarkeit von Functionen integrirbarer Functionen. Math. Ann. Bd. 20. Seite 122—124.

20) Die allgemeine Functionentheorie. Erster Theil. Tübingen 1882.

21) Ueber die Integration der Reihen. Sitzungsberichte der kgl. preussischen Academie der Wissenschaften zu Berlin. 1886. Seite 359—371.

22) Ueber den Convergenzgrad der variablen Reihen und den Stetigkeitsgrad der Functionen zweier Argumente. Jour. f. Math. Bd. 100. Seite 331—358.

Gilbert. Mémoire sur l'existence de la dérivée dans les fonctions continues. Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'académie des sciences de Belgique. Reihe in Octav. Bd. 23. Bruxelles 1873. Heft 3. Seite 1—31.

Grassmann. Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten. Berlin 1861.

Hamilton. 1) Theory of conjugate functions or algebraic couples with a preliminary and elementary essay on Algebra as the science of pure time. Transactions of the royal Irish academy. Bd. 17. Theil II. Dublin 1835. Seite 293—422.

2) Lectures on Quaternions. Dublin 1853.

Hankel. Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. (Einladungsschrift der Universität.) Tübingen 1870. Auch abgedruckt in Math. Ann. Bd. 20. Seite 63—112.

Harnack. 1) Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1881.

2) Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihe. Math. Ann. Bd. 19. Seite 235—279.

3) Die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Functionen einer reellen Variablen mit ihren Ableitungen. Erster Theil. Math. Ann. Bd. 23. Seite 224—284. Zweiter Theil. Math. Ann. Bd. 24. S. 217—252.

4) Ueber den Inhalt von Punktmengen. Math. Ann. Bd. 25. Seite 241—250.

Heine. 1) Ueber trigonometrische Reihen. Jour. f. Math. Bd. 71. Seite 353—365.

2) Die Elemente der Functionenlehre. Jour. f. Math. Bd. 74. Seite 172—188.

Helmholtz. Zählen und Messen. Enthalten in „Philosophische Aufsätze. Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctor-Jubiläum gewidmet." Leipzig 1887. Seite 15—52.

Hölder. Zur Theorie der trigonometrischen Reihen. Math. Ann. Bd. 24. Seite 181—216.

König. Ueber stetige Functionen, die innerhalb jedes Intervalls extreme Werthe haben. Monatshefte für Mathematik und Physik, herausgegeben von Escherisch und Weyr. Bd. 1. Seite 7—12.

Köpke. 1) Ueber Differentiirbarkeit und Anschaulichkeit der stetigen Functionen. Math. Ann. Bd. 29. Seite 123—140.

2) Ueber eine durchaus differentiirbare, stetige Function mit Oscillationen in jedem Intervalle. Math. Ann. Bd. 34. Seite 161—171.

3) Nachtrag dazu. Math. Ann. Bd. 35. Seite 104—109.

Kossak. Die Elemente der Arithmetik. (Programm-Beilage des Werder'schen Gymnasiums in Berlin.) Berlin 1872.

Kronecker. 1) Ueber den Zahlbegriff. Enthalten in „Philosophische Aufsätze. Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet." Leipzig 1887. Seite 260—274.

2) Ueber den Zahlbegriff. Jour. f. Math. Bd. 101. Seite 337—355. [Theilweise umgearbeiteter und erweiterter Abdruck von 1).]

Lerch. 1) Sur une fonction discontinue. Giornale di Matematiche (Battaglini). Bd. 26. (1881.) Seite 375—376.

2) Ueber die Nichtdifferentiirbarkeit gewisser Functionen. Jour. f. Math. Seite 126—138.

Lipschitz. Die Grundlagen der Analysis. 2 Bände. Bonn 1877.

Lüroth. Bemerkung über gleichmässige Stetigkeit. Math. Ann. Bd. 6. Seite 319—320.

Méray. Nouveau précis d'analyse infinitésimale. Paris 1872.

Neumann, C. Die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunctionen fortschreitenden Entwicklungen unter durchgängiger Anwendung des Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatzes. Leipzig 1881.

Pasch. Ueber einige Punkte der Functionentheorie. Math. Ann. Bd. 30. Seite 132—154.

Phragmen. Beweis eines Satzes aus der Mannigfaltigkeitslehre. Acta mathematica. Bd. 5. Seite 47—48.

Pringsheim. 1) Ueber die Werthänderungen bedingt convergenter Reihen und Producte. Math. Ann. Bd. 22. Seite 455—503.

2) Ueber analytische Ausdrücke mit hebbaren Unstetigkeiten. Math. Ann. Bd. 26. Seite 167—192.

3) Darstellung der zahlentheoretischen Function $E(x)$ durch eine unendliche Reihe. Math. Ann. Bd. 26. Seite 192—196.

4) Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern. Math. Ann. Bd. 35. Seite 297—394.

5) Zur Theorie der bestimmten Integrale und der unendlichen Reihen. Math. Ann. Bd. 37. Seite 591—604.

Riemann. 1) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. (Inaugural-Dissertation.) Göttingen 1851.

2) Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Abhandlungen der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 13. Seite 1—47.

Diese beiden Abhandlungen sind abgedruckt in „Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber. Leipzig 1876", auf Seite 1—47 und 213—252.

Scheefer. Zur Theorie der stetigen Functionen einer reellen Veränderlichen. Acta Mathematica. Bd. 5. Seite 183—194 und 279—296.

Schröder. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Erster Band. Leipzig 1873.

Schwarz. 1) Eine Mittheilung in der oben unter Nr. 1) angeführten Abhandlung von Cantor. Jour. f. Math. Bd. 72. Seite 141.

2) Neues Beispiel einer stetigen nicht differentiirbaren Function. Verhandlungen der Gesellschaft Schweizerischer Naturforscher. Bd. 56. (1873.) Seite 252—258. Auch in Archives des sciences naturelles. 1873. September. Seite 33—38. Abgedruckt in „Gesammelte mathematische Abhandlungen". Bd. 2. Berlin 1890. Seite 269—274.

Seidel. Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen. Abhandlungen der math.-phys. Classe der kgl. bayrischen Academie der Wissenschaften. Bd. 5. Seite 380—393.

Smith. On the integration of discontinuous functions. Proceedings of the London mathematical society. Bd. 6. Seite 140—153.

Stolz. 1) Ueber die Grenzwerthe der Quotienten. Math. Ann. Bd. 14. Seite 231—240.

2) Ueber die Grenzwerthe der Quotienten (Nachtrag zum eben genannten Aufsatz). Math. Ann. Bd. 15. Seite 556—559.

3) Ueber einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth. Math. Ann. Bd. 23. Seite 152—156.

4) Die gleichmässige Convergenz von Functionen mehrerer Veränderlicher zu den dadurch sich ergebenden Grenzwerthen, dass einige derselben constanten Werthen sich nähern. Math. Ann. Bd. 26. Seite 83—96.

5) Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. 2 Bände. Leipzig 1885.

Tannery. 1) Note sur la théorie dès ensembles. Bulletin de la société mathématique de France. Bd. 12. 1883/84. Seite 90—96.

2) Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. Paris 1885.

Thomae. 1) Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen. 1. Auflage. Halle 1870.

2) Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale. Halle 1875.

3) Ueber bestimmte Integrale. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 23. Seite 67—68.

4) Ein Beispiel einer unendlich oft unstetigen Function. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 24. Seite 64.

5) Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen. Halle 1880.

Veltmann. 1) Ueber die Anordnung unendlich vieler Singularitäten einer Function. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 27. Seite 176—179.

2) Bemerkung über den Ausdruck: Theilung einer Strecke in unendlich kleine Theile. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 28. Seite 64.

Volterra. 1) Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue. Giornale di Matematiche (Battaglini). Bd. 19. (1881.) Seite 76—86.

2) Sui principii del calcolo integrale. Ebenda. Seite 333—372.

Wiener. Geometrische und analytische Untersuchung der Weierstrassschen Funktion. Jour. f. Math. Bd. 90. Seite 221—252.

Worpitzky. Ueber die Endlichkeit bestimmter Integrale. Berlin 1867.

Verbesserungen und Zusätze.

Seite 1 Fussnote 1) ist beizufügen: Husserl, Philosophie der Mathematik. Halle 1891.

„ 7 Z. 1 v. o. lies 3 für 2.

„ 7 Z. 15 v. o. sind auf der rechten Seite der Gleichung die beiden Glieder durch $+$ statt durch $-$ zu verbinden.

„ 7 Z. 2 v. u. ist das letzte $+$ und

„ 7 Z. 1 v. u. das $+\cdots$ links zu streichen.

„ 10 Z. 11 v. o. lies $a_1 - a_{p_1}$ für $a_1 - a_p$.

„ 12 Z. 2 v. u. ist vor „stets" einzufügen „jenseits N".

„ 18 Z. 4 v. u. und 3 v. u. ist nach „ist" ein Komma zu tilgen und Z. 4 v. u. nach x_2 einzufügen.

„ 19 Z. 10 v. u. lies x_n für x.

„ 28 § 15. Auf den Unterschied zwischen unterer und oberer Grenze und Minimum bezw. Maximum macht schon Gauss in seiner Dissertation (§ 6. Nr. 4, Werke Bd. III S. 10) aufmerksam.

„ 28 Z. 10 v. u. ist y zu tilgen.

„ 37 Z. 2 v. o. ist „wie wir in der Folge sehen werden" zu streichen.

„ 56 Ist zu Fussnote 1) noch das Citat beizufügen: Ascoli, Atti d. R. Accad. d. Lincei. Ser. 2, Bd. 2 S. 869.

„ 76 Z. 15 v. u. lies: dem Intervalle statt den Intervallen.

„ 77 Im letzten Absatz sind aus Versehen einige Betrachtungen weggefallen. Man schalte Z. 7 v. u. vor „In diesem Falle . . ." Folgendes ein: „Sei nun, zwischen a und $a + \varepsilon$, 1) $f(x) < f(a)$. Weil $f(x)$ nicht monoton sein soll, muss sie zwischen a und $a + \varepsilon$ (beide ausgeschlossen) Maxima haben. Denn hätte sie keine Maxima, sondern nur ein Minimum (und mehr sind dann nicht möglich) für $a + \varepsilon'$, so wäre sie zwischen a und $a + \varepsilon'$, gegen die Annahme, monoton. Fällt nun ein Maximum auf $a + \delta_1$, so ist für gehörig gewählte $\delta < \delta_1$, $f(a + \delta) < f(a + \delta_1)$; und daraus folgt

$$|f(a + \delta) - f(a)| > |f(a + \delta_1) - f(a)|,$$

weil die Differenzen negativ sind.

In ähnlicher Weise findet man diese Ungleichung, wenn 2) $f(x) > f(a)$ ist. Ist aber 3) zwischen a und $a + \varepsilon$, für gewisse x, $f(x) > f(a)$, für andere $f(x) < f(a)$, so sei zuerst $f(a + \varepsilon) > f(a)$. Weil es dann zwischen a und $a + \varepsilon$ auch x giebt, für die $f(x) > f(a)$ ist, so muss es zwischen jenen Grenzen auch ein absolutes Minimum geben, das $x = a + \delta$ entspreche. Man kann dann $\delta_1 > \delta$, aber $< \varepsilon$, so wählen, dass $f(a + \delta_1) > f(a + \delta)$ ist, woraus wieder die frühere Ungleichung

sich ergiebt. Und in gleicher Weise findet sie sich, wenn $f(a+\varepsilon) < f(a)$ ist. Aber auch die Umkehrung ist richtig. Wenn es, wie klein auch ε gewählt sei, stets Werthe $\delta_1 < \varepsilon$ und $\delta < \delta_1$ giebt, so dass $|f(a+\delta) - f(a)| > |f(a+\delta_1) - f(a)|$ ist, so ist im ersten der oben behandelten Fälle $f(a+\delta) < f(a+\delta_1)$, so dass $f(x)$ im Innern des Intervalles $(a, a+\delta_1)$ ein absolutes Minimum haben muss. Im zweiten Falle ergiebt sich ein absolutes Maximum und im dritten entweder das eine oder das andere."

Man verändere weiter den Anfang des folgenden Satzes zu „In jedem Falle ...".

Seite 85 Z. 3 v. o. nach „vorhanden" einzuschalten: „dass in ihr die Schwankung und folglich alle Sprünge kleiner als σ sind, und".
„ 111 Z. 3 und 6 v. o. lies $f'(\alpha)$ für $f'(x)$.
„ 116 Z. 17 v. u. und 117 Z. 5 v. o. lies Schwankung für Schwankungen.
„ 124 Z. 5 v. u. nach „positiv" einzuschalten „und gehörig klein".
„ 188 Z. 2 v. o. lies $\frac{1}{\mu^s}$ für $\frac{1}{\mu_s}$.
„ 192 Z. 16 v. o. lies $N-1$ und $-(N-1)$ für N und $-N$.
„ 192 Z. 4 v. u. lies (zweimal) α für β.
„ 192 Z. 2 v. u. ist hinter $\leqq 1$ ein | zu tilgen.
„ 193 Z. 11 und 14 v. o. sind die Ungleichheitszeichen umzukehren.
„ 195 Z. 2 v. o. lies im Exponenten $\varkappa$ für n.
„ 195 Z. 6 v. o. lies c_n für c^n.
„ 197 Z. 1 v. o. setze nach „sind" Strichpunkt für Komma.
„ 197 Z. 4 v. o. setze man auf der rechten Seite in der Klammer ϑ_1 für ϑ, wobei ϑ_1 ein ächter Bruch ist.
„ 197 Z. 13 v. o. in der Ungleichung links setze $\frac{1}{2}$ statt §.
„ 218 Z. 8 v. u. lies a_n' für a'.
„ 253 Z. 17 v. u. ist im Anfang der Zeile 1 ausgefallen.
„ 318 Fussnote 1) und 409 Fussnote ist weiter beizufügen: Résumé des leçons d. à l'éc. roy. polyt. Bd. 1 S. 81 ff. bezw. S. 97.
„ 385 Z. 5 v. o. lies „der $f(x)$" statt „$f(x)$ der".
„ 409 letzte Fussnote letzte Zeile lies 572 für 590.
„ 418 Z. 10 v. o., 419 Z. 1 v. o. und Z. 12 v. o., 422 Z. 1 v. o., 452 Z. 4 v. o. sind jeweils auf der linken Seite des Gleichheitszeichens die Striche | | der absoluten Werthe zu setzen.
„ 433 Z. 1 v. o. lies $\nu - 1$ für $\nu - t$.
„ 455 Z. 3 v. o. ist in der Summe die obere Grenze ∞, nicht n zu nehmen.
„ 468 Z. 5 v. o. ist lim vor das $\sum$ Zeichen zu setzen.
„ 477 Z. 17 v. u. sind links die Striche | | zu tilgen.
„ 479 Z. 10 v. u. in Formel 41 muss es unter dem Integralzeichen dx für λx heissen.







